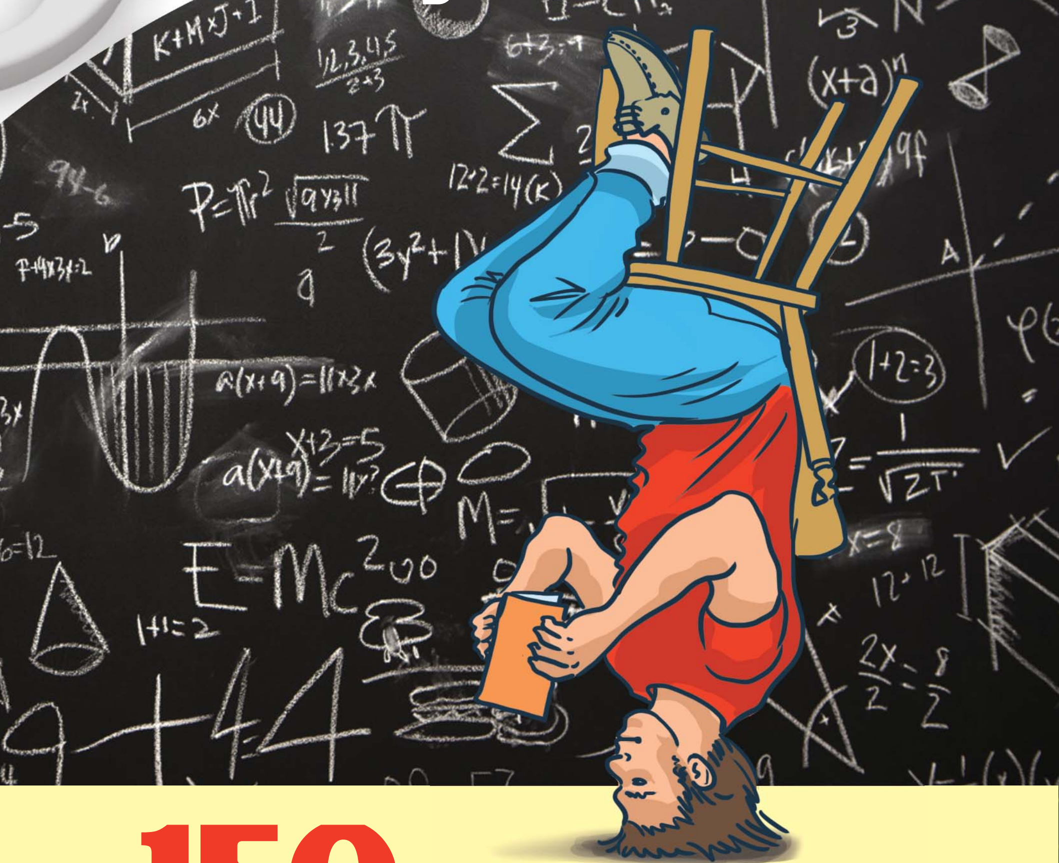
Толпыго А. К.

Нестандартные задачи из запасников математических олимпиад



150

нестандартных задач и еще немного...

А. К. Толпыго

Нестандартные задачи из запасников математических олимпиад

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
Т52

Толпыго А. К.
Нестандартные задачи из запасников математических олимпиад.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
190 с.
ISBN 978-5-4439-3145-6

Предлагаемые задачи составлялись на протяжении более чем 50 лет для различных олимпиад.

Все задачи в том или ином смысле нестандартные. Их решение требует смекалки, сообразительности, а иногда и многочасовых размышлений.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков, школьников старших классов, студентов педагогических специальностей. Она будет интересна всем любителям красивых математических задач.

Подготовлено на основе книги:
Толпыго А. К. Нестандартные задачи из запасников математических олимпиад. — М.: МЦНМО, 2017. — 192 с. — ISBN 978-5-4439-1145-8

12+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3145-6

Содержание

Предисловие

Задачи, предлагаемые вниманию читателя, составлялись на протяжении нескольких десятилетий. Мало-помалу из них получилась книга, которая, благодаря неоценимой помощи Московского центра непрерывного математического образования и редакции журнала «Квант», выходит вот уже в третий раз. Первое издание вышло в 2008 году в издательстве МЦНМО под названием «96 нестандартных задач», второе — в «Библиотечке „Кванта“» в 2012 году, уже как «130 нестандартных задач». Теперь книжка еще немного «подросла», немного перестроилась и опять получила новое название.

Почти все задачи придуманы автором книги. Впрочем, в отношении задач «авторского права» не существует — в частности, по той причине, что порой задачу, придуманную одним, корректирует (а иной раз корежит) другой, решение находит третий... Вот и в этом сборнике есть несколько задач, насчет авторства которых нет полной ясности, или которые придумал автор, а решил кто-то другой, а иногда — наоборот. В принципе такие задачи автор вставлять избегал, но несколько задач, в которых авторство «спорно», все-таки вставил — уж очень они понравились автору и, надеюсь, понравятся читателям.

Значительная их часть предлагалась на олимпиадах разного уровня: на Московских городских, на Украинских республиканских, на международном Турнире городов, на разнообразных студенческих олимпиадах, матбоях и т. д. Другие «не пошли в дело», и за такие задачи мне всегда было особенно обидно. В особенности — если задача возникала сразу после очередной олимпиады: такие задачи обычно всегда кажутся лучше, по крайней мере — их автору.

В виде дополнения в книге помещена статья «Что такое математика, или Метаматематика для нематематиков».

Хочу выразить благодарность моим коллегам из Независимого университета, а также всем работникам редакции журнала «Квант» за многолетнее сотрудничество, которое, между прочим, породило некоторые задачи сборника. Но особо хочу поблагодарить Сергея Дориченко и Юрия Торхова, без участия которых сборник вряд ли вышел бы в свет.

А. Толпыго

Сокращения

ВМШ — Вечерняя математическая школа,
ММО — Московская математическая олимпиада,
СО — та или иная студенческая олимпиада,
ТГ — Математический международный Турнир городов,
ТПЯ — Турнир юных математиков им. М. Ядренко.

Задачи отмечаются звёздочками

$*$ — лёгкая,
$**$ — средняя,
$***$ — трудная,
$****$ — очень трудная или решение неизвестно.

Задачи

Задачи на шахматной доске

1.** На бесконечной шахматной доске расставлены белые пешки на чёрных полях, через три поля на четвёртое, как показано на рис. 1. Может ли конь обойти такую доску, побывав на каждом поле (кроме занятых пешками) ровно по одному разу?

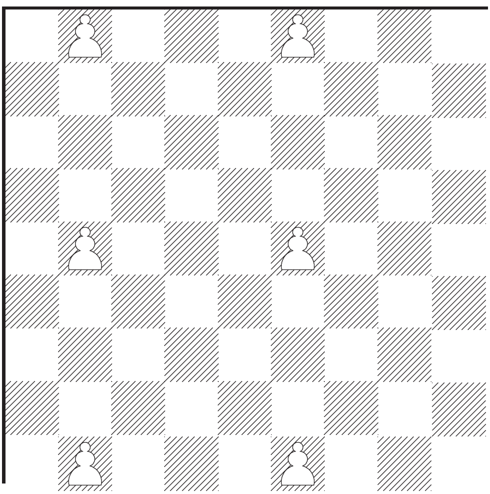


Рис. 1

(*Конкурс ВМШ*, 1966; *IX ТГ*, *весна* 1988)

2*.** Требуется расставить ладьи на доске 8×8 так, чтобы каждое поле доски оказалось под боем не менее чем двух ладей (в том числе должны быть биты и поля, на которых стоят ладьи, причём считается, что ладья не бьёт то поле, на котором она стоит). Каким минимальным числом ладей можно обойтись, если при этом:

а) считается, что ладья бьёт «через» ладью, перекрывающую ей дорогу к полю;

б) считается, что ладья не бьёт «через» ладью.

Например, на приводимом рис. 2 поле, отмеченное знаком •, в варианте а) бито 5 раз, а в варианте б) только 2.

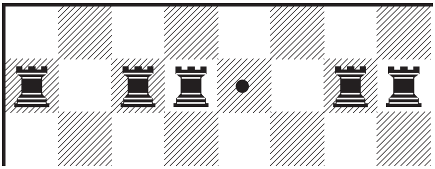


Рис. 2

3*.** а) Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером 30×30, в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, однако, что:

— любая фигура с любого поля бьёт не более 20 полей;

— если фигуру сдвинуть на несколько полей, то битые поля соответственно сдвигаются (может быть, за пределы доски).

Докажите, что:

1) любая фигура бьёт данное поле X не более, чем с 20 полей;

2) можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

б) Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером 100×100, в ней участвуют 20 фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьёт не более 20 полей. Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

(*VII ТГ, осень* 1985)

4*. а) Можно ли на бесконечной шахматной доске расставить ферзей так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали (обоих направлений) стояло ровно по 1 ферзю?

б) Можно ли расставить ферзей на бесконечной доске так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали одного направления стояло по ферзю, а из диагоналей другого направления битой оказалась каждая вторая?

в) А каждая пятая?

(*СО*, 1994)

5*.** Можно ли расставить 15 ферзей на цилиндрической доске 15×15 так, чтобы они не били друг друга?

6**. Ладья обходит шахматную доску, каждый раз переходя с клетки на соседнюю (с общей стороной), и, побывав на каждой клетке один раз, возвращается на начальное место. Таким образом, её маршрут — несамопересекающаяся замкнутая ломаная, ограничивающая невыпуклый многоугольник. Найдите его площадь. (Считайте площадь клетки равной 1; маршрут проходит через центры клеток.)

7**. а) Ладья обходит шахматную доску, каждый раз переходя с клетки на соседнюю (с общей стороной), и, побывав на каждой клетке один раз, возвращается на начальное место. Известно, что она попала на поле b2 с поля a2. С какого поля она попала на поле h8?

б) Ладья обходит шахматную доску. Маршрут начинается в клетке d4 и кончается в клетке d6. Ладья каждый раз переходит с клетки на соседнюю (с общей стороной), побывав на каждой клетке не более одного раза. Известно, что ладья побывала во всех четырёх углах доски и попала на поле a1 с поля a2, на поле a8 с поля a7 и на поле h8 с поля h7. С какого поля она попала на поле h1?

(*XIII ТПЯ*, *Николаев*, 2010)

8*. Белая ладья стоит на поле b2, чёрная на поле c4. Игроки ходят по очереди, начинают белые. Ладье запрещается становиться под бой другой ладьи, а также вторично становиться на ранее пройденное поле. Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто должен выиграть, если оба игрока играют наилучшим образом?

(*XXXIII ТГ*, *весна* 2012)

9*. Чернопольный слон обходит чёрные клетки шахматной доски, переходя каждый раз с клетки на соседнюю и не возвращаясь на уже пройденные клетки. Какое наибольшее число клеток он может обойти?

10. На шахматной доске размером $80\,000 \times 80\,000$ требуется расставить шахматных коней так, чтобы каждое белое поле было под боем хотя бы одного коня.

Достаточно ли для этого:

а) 400 000 000 коней; б) 401 000 000 коней?

Геометрия

11*. Построить 10-угольник $A_1A_2\ldots A_{10}$, зная все его углы и сторону A_1A_2, если ещё известно, что в этот 10-угольник можно вписать окружность.

(*ВМШ*, 1964; *Сборник «Математические задачи»*, 1965)

12*. Дана окружность с центром O и вектор $\boldsymbol{v}$. Найти на окружности две такие точки A и B, чтобы угол между векторами $\boldsymbol{v}+\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{v}+\overrightarrow{OB}$ был максимален.

(*XVIII УРО*, 1978)

13*. Можно ли разрезать квадратный пирог на 9 равновеликих частей таким образом: выбрать внутри квадрата две точки и соединить каждую из них прямолинейными разрезами со всеми четырьмя вершинами квадрата (рис. 3)? Если можно, то какие две точки следует выбрать?

(*XXX ММО,* 1967)

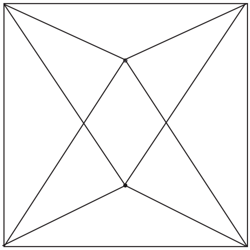


Рис. 3

14.** В бесконечно большой каравай, занимающий всё пространство, в точках с целыми координатами впечены изюминки диаметра 0,1. Каравай разрезали на части несколькими плоскостями. Доказать, что найдётся неразрезанная изюминка.

(*XXX ММО*, 1967)

15.** Некий жулик приобрёл квадратный участок земли, обнёс его забором и получил у доверчивого председателя колхоза документ, в котором сказано, что он имеет право несколько раз произвести следующую операцию: провести прямую через любые две точки забора, огораживающего его участок, снести кусок забора между двумя точками и достроить такой же участок забора с другой стороны симметрично снесённой части относительно выбранной прямой. Сможет ли он такими операциями увеличить площадь своего участка?

(*XXXII ММО*, 1969)

16.** В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписаны два тетраэдра ACB_1D_1 и BDA_1C_1. Найти объём их пересечения, если объём куба равен 1.

17. а)** Ребро деревянного куба равно 1. От одной из вершин куба на каждом выходящем из неё ребре отложен отрезок длины a. Плоскость, проходящая через 3 полученные точки, отрезает от куба треугольную пирамиду. Проведём 8 таких плоскостей (возможно, полученные пирамиды будут пересекаться); известно, что часть куба, не принадлежащая ни одной из пирамид, имеет объём $\frac{1}{2}$. Найти a.

б)*** Та же задача в n-мерном пространстве.

18****.** Учитель продиктовал классу задание, которое каждый ученик выполнил в своей тетради. Вот это задание (рис. 4): «Нарисуйте две концентрические окружности радиусов 1 и 10. К малой окружности проведите три касательных так, чтобы точки их пересечения A, B и C лежали внутри большой окружности. Измерьте площадь S треугольника ABC и площади S_1, S_2 и S_3 трёх образовавшихся «секторов» с вершинами в точках A, B и C. Найдите $S_1+S_2+S_3-S$». Доказать, что у всех учеников, которые правильно выполнили задание, получилось одно и то же число.

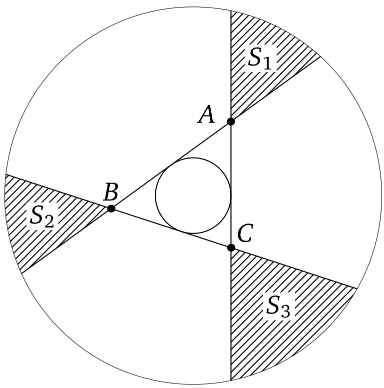


Рис. 4

(*VII ТГ*, *осень* 1985)

19****.** Дан полуправильный[1] восьмиугольник $ABCDEFGH$. В нём проведены 8 диагоналей через две вершины на третью: AD, BE и т. д. В центре образовался новый полуправильный восьмиугольник $A_1B_1\ldots H_1$, с которым та же операция проделана ещё раз, и т. д. Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно.

(*XIII ТГ*, *осень* 1991)

20*****.** В пространстве заданы 48 точек с координатами (±1, ±2, ±3), где порядок цифр 1, 2, 3 и выбор знаков осуществляется все-

[1] Полуправильным называется такой восьмиугольник, у которого все углы равны $\frac{3\pi}{4}$, а стороны равны через одну: $AB=CD=EF=GH$ и $BC=DE=FG=HA$, но $AB\neq BC$. Другое, равносильное (для восьмиугольника) определение: полуправильный восьмиугольник есть пересечение двух *неравных* квадратов с общим центром, из которых один повёрнут относительно другого на $\frac{\pi}{4}$. (При этом, разумеется, предполагается, что ни один из квадратов не лежит целиком внутри другого.)

ми мыслимыми способами. Сколько граней имеет выпуклый многогранник с этими вершинами? Какова форма этих граней?

(*Матбой Москва—Ленинград*, 1982,
XVI *Всесоюзная олимпиада*)

21*. На плоскости задана бесконечная сетка из правильных шестиугольников площади 1. На эту сетку наложен квадрат со стороной 1000. Сколько вершин шестиугольной сетки попало внутрь квадрата? Найти ответ с ошибкой не более 5 %.

22*. Даны две выпуклые фигуры, каждая площадью 1. Требуется построить выпуклую фигуру площади S, в которую можно поместить обе фигуры. Каково должно быть S, чтобы задача всегда имела решение?

23*. Построить треугольник по вершине A и двум прямым, на которых лежат биссектрисы, проведённые из вершин B, C.

24**.** Даны 80 векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, …, $\overrightarrow{A_{80}B_{80}}$, длина каждого из них больше 1. Доказать, что из них можно выбрать 7 таким образом, что всё расстояния A_iB_j $(i \neq j)$ больше 0,3.

(*Лемма из книги «Геометрия близости»*[1])

25. Куб с ребром 1 лежит по одну сторону от плоскости.

1) Доказать, что 8 чисел — расстояния от вершин куба до плоскости — можно так разбить на две четвёрки $\{a, b, c, d\}$ и $\{e, f, g, h\}$, что:

а)* $a+b+c+d=e+f+g+h$,

б)** $a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2+h^2$.

2**) Найти для того же разбиения соотношение между числами $a^3+b^3+c^3+d^3$ и $e^3+f^3+g^3+h^3$.

26*.** Петя нарисовал на плоскости два треугольника: ABC и $A'B'C'$. Он сказал Коле: «В треугольнике ABC выполняется равенство:

$$AB = mAC + nBC.$$

Какой угол в нём наименьший?» «А что такое m и n?» — спросил Коля. «Это координаты точки M на плоскости», — и Петя указал в первой четверти эту точку. «У меня недостаточно данных, чтобы решить задачу», — подумав, сказал Коля.

«Тогда реши другую задачу. В треугольнике $A'B'C'$ выполняется равенство: $A'B' = pA'C' + qB'C'$; p и q — координаты точки N», — и Петя указал другую точку в первой четверти. «Тогда наименьший угол — это...» — сказал Коля.

[1] *Ефремович В. А.*, *Толпыго А. К.* Геометрия близости. М.: ФИМА, 2007.

Что можно сказать о расположении на плоскости точек M и N, исходя из предположения, что Коля в обоих случаях решил задачу верно? Какой угол назвал Коля?

27*. Диагонали выпуклого четырёхугольника имеют длины $AC = a$ и $BD = b$, $a > b$. Каким может быть максимальный периметр четырёхугольника $ABCD$? А минимальный?

28.** В выпуклом семиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ диагонали A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_1 и A_7A_2 равны между собой. Диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_4A_7, A_5A_1, A_6A_2 и A_7A_3 тоже равны между собой. Обязательно ли этот семиугольник равносторонний?

(*XXV ТГ, осень* 2003)

29. $A_1A_2A_3\ldots A_n$, $n > 4$, — невыпуклый многоугольник, ограниченный несамопересекающейся ломаной.

а)** Доказать, что либо из вершины A_1, либо из вершины A_2 можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

б)* Придумать пример, когда из вершины A_1 нельзя провести ни одной такой диагонали.

в)* Пусть кусок некоторой диагонали находится внутри многоугольника. Придумать пример, когда он не пересекается ни одной диагональю многоугольника (лежащей в нём целиком или частично — всё равно).

30*. На плоскости даны две точки A, B и прямая, параллельная отрезку AB. Найдите на прямой точку C такую, что произведение $AC \cdot BC$ минимально.

(*XXIX ТГ, осень* 2007)

31.** Стороны четырёхугольника $ABCD$ имеют длины $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 6$ и $DA = 5$. Докажите, что площадь такого четырёхугольника меньше 19.

32.** Квадрат со стороной 1 разрезан на три выпуклых многоугольника. Может ли случиться, что диаметр каждого из них не превосходит: а) единицы, б) 1,01; в) 1,1?

(*XXIX ТГ, осень* 2007)

33*. Из бумаги вырезан треугольник, один из углов которого равен α. Его разрезали на несколько треугольников, и выписали в ряд числа — величины всех углов всех полученных треугольников. Может ли случиться, что все эти числа меньше α:

а) в случае, если $\alpha = 70°$; б) в случае, если $\alpha = 80°$.

(*XXIX ТГ, весна* 2008)

34.** а) В сферу вписаны куб и правильный октаэдр. Найдите отношение их объёмов.

б) В сферу вписаны правильный икосаэдр и правильный додекаэдр. Найдите отношение их объёмов.

35.** На столе лежит листок бумаги в клеточку. Поверх него положен ещё один лист бумаги в клеточку; клетки на обоих листах квадратные и одного размера, но второй лист положен наискось, так что его линии не параллельны линиям первого. Верхний листок прозрачный, и видно, как его линии делят один из квадратов нижнего листка.

На какое максимальное число частей может быть разделён нижний квадрат?

А на какое минимальное?

(*Летняя конференция ТГ*, *Теберда*, 2010)

36.** На столе лежит листок бумаги в клеточку размером $10\,000 \times 10\,000$. Поверх него положен ещё один лист бумаги в клеточку размером 1000×2000; клетки на обоих листах квадратные и одного размера. Верхний листок прозрачный, и видно, как линии нижнего листка делят квадраты верхнего листка на части; таким образом, мы видим, что число частей верхнего листка больше двух миллионов.

Докажите, что это число меньше десяти миллионов.

(*Летняя конференция ТГ*, *Теберда*, 2010)

37*. На ватмане нарисован правильный 17-угольник $B_1B_2\ldots B_{17}$. Для каждой тройки его вершин B_i, B_j, B_k изготовлен бумажный треугольник, равный $B_iB_jB_k$. Его кладут поверх исходного многоугольника, совместив с соответствующим треугольником; таким образом, 17-угольник оказывается покрыт бумажными треугольниками в несколько слоёв, причём разные точки покрыты различное число раз. Назовём кратностью точки число треугольников, покрывающих её. (При этом точки, лежащие на контуре 17-угольника или на его диагоналях, не рассматриваются.)

Укажите какую-нибудь точку, имеющую

а) наименьшую кратность; б) наибольшую кратность.

38.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны равны соответственно: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$, $AD = 5$. Найдите угол между его диагоналями.

(*XXXIII ТГ*, *осень* 2011)

39*.** Требуется построить замкнутую 2009-звенную ломаную, а затем провести 2009 прямых, на которых лежат её звенья. Некоторые из этих прямых могут, вообще говоря, совпадать. Какое наименьшее число прямых может получиться?

(*XXXI ТГ, весна* 2010,
в немного изменённой формулировке)

40*. В треугольнике ABC известны две стороны: $AB = 1$, $AC = 4$. Что можно сказать:

а) о длине h высоты, опущенной из вершины A;

б) о длине m медианы, опущенной из вершины A;

в) о длине b биссектрисы, опущенной из вершины A?

Во всех трёх случаях требуется указать числовые интервалы, в которых может (не может) лежать соответствующее число.

41. Неплотные упаковки.** а) На плоскости расположено 12 кругов радиуса 1. Известно, что расстояние между центрами любых двух кругов не меньше 10. Докажите, что можно провести прямую, отделяющую один круг от других. Это означает, что прямая не пересекает ни один из кругов, причём по одну сторону от неё лежит 1 круг, а по другую — все остальные.

б) На плоскости расположено 120 кругов радиуса 1. Известно, что расстояние между центрами любых двух кругов не меньше 10. Можно ли утверждать, что существует прямая, отделяющая ровно один из этих кругов от остальных?

42. «Ванька-встанька». Многогранник поставлен на ровную поверхность на одну из своих граней. Вообще говоря, может случиться, что он не устоит и перекатится на другую грань.

Каково наименьшее число граней, на которых многогранник устоит:

а)*** в предположении, что многогранник сделан из однородного материала;

б)* если многогранник не обязательно однородный;

в)* если многогранник не обязательно выпуклый.

43. а) Нетрудно покрыть единичный квадрат кругом площади $\frac{\pi}{2}$. А как покрыть квадрат несколькими кругами, суммарная площадь которых меньше $\frac{\pi}{2}$? Круги могут пересекаться и выходить за пределы квадрата.

б) Дайте точную оценку в задаче а).

Иначе говоря: требуется найти число α такое, что (1) квадрат нельзя покрыть кругами суммарной площади меньше α и (2) для любого $\beta > \alpha$ квадрат можно покрыть кругами площади β. (Постарайтесь также выяснить, можно ли его покрыть кругами площади ровно α.)

Эта задача подразделяется на три, а именно:

б1) Найдите α в предположении, что радиусы всех кругов обязаны быть одинаковыми.

б2) Найдите α, если разрешается брать круги двух произвольных радиусов.

б3) Найдите α, если разрешается брать круги произвольных радиусов без всяких ограничений.

(*Летняя конференция Турнира городов*, *Теберда*, 2010)

44. На плоскости даны 2014 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Требуется построить 2014-угольник с этим набором вершин (требуется использовать все точки) или, что то же, — замкнутую несамопересекающуюся ломаную.

Пусть Л(Ф) — количество таких ломаных для данной конфигурации точек Ф.

Может ли Л(Ф)

а) равняться нулю; б) равняться 1; в) равняться 2?

45. Выпуклый 100-угольник разделён тремя диагоналями на 4 равновеликие части. Докажите, что одна из диагоналей делит его на две части равных площадей.

46. Можно ли тремя хордами, ни одна из которых не является диаметром, разрезать круг на несколько равновеликих (не обязательно равных) частей?

(*ТПЯ*, 2014)

47. Найти угол φ между гранями правильного n-мерного тетраэдра.

48. Прямоугольник $p \times q$, где p, q — целые взаимно простые числа, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла A в правый верхний угол C проведена диагональ прямоугольника. От некоторых квадратиков она отсекает треугольники.

Найти сумму P периметров всех этих треугольников.

Теория чисел

49.** Существуют ли два таких последовательных натуральных числа, что сумма цифр каждого из них делится на 49? Если да, то найдите наименьшую пару таких чисел.

(*XXX ММО*, 1967)

50*. Делится ли число $A=1010101\ldots01$ (n единиц) на число $B=$ $=11\ldots1$ (n единиц)?

51*. Даны числа 4, 14, 24, …, 104. Доказать, что из них нельзя вычеркнуть сначала одно, потом два, потом три, наконец, четыре числа так, чтобы после каждого вычёркивания сумма оставшихся чисел делилась на 11.

(*XXXI ММО*, 1968)

52*. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

(*XXX ММО*, 1967)

53. Пусть p — простое число, $p>5$. Запишем число $\frac{1}{p}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

а)* Докажите, что сумма всех цифр периода дроби делится на 9.

б)** Пусть длина периода равна km; разобьём его на k кусков («граней») по m цифр в каждом. Докажите, что сумма этих граней делится на $99\ldots9$ (m девяток).

(Например, $\frac{1}{7}=0{,}(142857)$; $14+28+57=99$; $142+857=999$. Или: $\frac{1}{13}=0{,}(076923)$; $76+923=999$.)

(*XVIII УРО*, 1978)

54*. Известно, что $\{32x\}=\{200x\}$; $\{2x\}=\{100x\}$[1]. Доказать, что $\{x\}=\{155x\}$.

(*XXXV УРО*, 1995)

55**. а) Доказать, что существует такое число q, что в десятичной записи числа $q\cdot 2^{1000}$ нет ни одного нуля.

(*XXX ММО*, 1967)

б) Число N не оканчивается нулём. Доказать, что существует такое число q, что в десятичной записи qN нет ни одного нуля.

56**. Выписаны числа: $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots, 2^{1000}$. Затем выписаны все первые цифры этих чисел. Сколько единиц среди выписанной 1001-й цифры?

(*СО*, 1995)

57**. Набор чисел $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ называется редким, если все разности x_i-x_j различны.

[1] Фигурные скобки означают дробную часть числа x, т. е. разность между x и наибольшим целым, не превосходящим x.

а) Дан редкий набор из 17 целых чисел:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{16}.$$

Доказать, что $x_{16} > 145$.

б) Набор из семи чисел $0 = x_0 < \ldots < x_6$ — редкий. Какое наименьшее значение может принимать x_6?

в) Для каждого n дан редкий набор $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Известно, кроме того, что существует $\lim \frac{x_n}{n^2} = A$. Доказать, что $A \geqslant 1$.

г) Доказать, что существует такое число B, что для любого n найдётся такой редкий набор $x_1 < \ldots < x_n$, что $x_n < Bn^3$.

58*.** По произвольной тройке чисел $a_0 \geqslant b_0 \geqslant c_0$ образуется новая тройка, состоящая из чисел $a_0 - b_0$, $a_0 - c_0$, $b_0 - c_0$. Упорядочив её по убыванию, мы получаем новую тройку a_1, b_1, c_1, с которой делается то же самое, и т. д. Известно, что $a_0 = 1$, $c_0 = 0$. Доказать, что $a_{10} > \frac{1}{100}$. При каком b_0 оно будет наименьшим?

(*XXIII УРО*, 1983)

59*. Существует ли такое число C, что сумма всех делителей числа n меньше nC при любом n?

60*. Известно, что каждое из r различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_r$ равно произведению двух других, не равных ему чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать r, если в качестве $a_1, a_2, \ldots, a_r$ берутся:

а) положительные числа? б) действительные числа?

в) комплексные числа? г) кватернионы?

61*. а) Рассматриваются все 10-значные числа, которые записываются семью двойками и тремя единицами. Найти их среднее арифметическое.

б) То же самое для 10-значных чисел, которые записываются семью нулями и тремя единицами.

62.** Пусть a — произвольное четырёхзначное число, и пусть x, y, z — последние три цифры числа a^7. Тогда трёхзначное число $\overline{xyz}$ (оно может начинаться с одного или нескольких нулей) называется хорошим. Доказать, что от 000 до 999 существует ровно 505 хороших трёхзначных чисел.

63.** 1991-й и 2002-й годы одинаково читаются слева направо и справа налево. Интервал между ними составляет 11 лет. Каким может быть максимальный и минимальный интервал между двумя соседними годами с аналогичным свойством:

а) в ближайшую тысячу лет; б) в ближайшие 10 000 лет?

64. а*) Дано число z. Известно, что числа z^{13} и z^{17} — целые. Докажите, что z — тоже целое.

б**) Докажите, что существует такое число $x>0$, что его дробная часть $\{x\}$, а также дробные части его квадрата и куба удовлетворяют неравенствам $0{,}1<\{x\}<0{,}9$; $\{x^2\}<0{,}000001$; $\{x^3\}<0{,}000001$.

в***) Докажите, что если все условия из п. б) выполнены, то $x>5$.

г**) Даны числа α, β, γ, все три — между нулём и единицей ($0<\alpha, \beta, \gamma<1$).

Докажите, что существует число z такое, что одновременно приближённо выполняются три равенства: $\{z\}=\alpha$, $\{z^2\}=\beta$, $\{z^3\}=\gamma$, причём все три выполняются с точностью до 0,000001.

65*. Пусть a^b обозначает число a^b. В выражении 7^7^7^7^7^7^7 надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет пять пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?

(*XXX ТГ, весна* 2009)

66.** Число n может быть двумя разными способами представлено в виде суммы двух кубов натуральных чисел:

$$n=a^3+b^3=c^3+d^3.$$

Может ли быть, что n является произведением:

а) трёх простых чисел;

б) двух простых чисел?

67*.** Пусть A — сумма восьмых степеней всех чисел от 1 до 999 999 999, и пусть B — сумма восьмых степеней всех тех чисел от 1 до 999 999 999, у которых сумма цифр чётна.

Докажите, что $A=2B$.

68. Записано действительное число 0, …, n-я цифра которого есть r-я цифра числа 2^n. Подразумевается, что натуральное число r задано раз навсегда, тогда как n пробегает весь натуральный ряд: $n=1, 2, 3, \ldots$

а*) Докажите, что если r-я цифра отсчитывается с конца числа, то полученное число рационально.

б**) Докажите, что если r-я цифра отсчитывается с начала числа, то полученное число иррационально.

(**Пример**. Если $r=2$, то получится число 0,0001362512…, если отсчитывать с конца, и число 0,0006242510…, если отсчитывать с начала).

69. а*) Докажите, что для любого n в последовательности Фибоначчи[1] 0, 1, 1, 2, 3, 5, … найдётся член, делящийся на n.

б*) Существует ли последовательность Фибоначчи, ни один член которой не делится на 5; на 7; на 11?

в***) Для каких p существует последовательность Фибоначчи, ни один член которой не делится на p?

70. На экране игрового автомата высвечено натуральное число. За одну операцию можно изменить его одним из трёх способов:

1) прибавить 3,

2) умножить на 3 и 3) разделить на 3, если оно делится нацело.

а) Верно ли, что несколькими операциями можно из любого натурального числа получить любое другое?

б) За какое наименьшее число операций можно из числа 81 получить 82?

в) За какое наименьшее число операций можно из числа 82 получить 81?

г) Провести исследование: даны числа a и b, сколько требуется операций?

(*ТПЯ*, 2013)

71. Число $a > 0$ может быть представлено, как разность обратных квадратов, т. е. $a = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}$. (Например, $\frac{16}{225} = \frac{1}{9} - \frac{1}{25}$).

Может ли быть так, что число $2a$ тоже есть разность обратных квадратов?

72. Хозяйка ждёт гостей и приготовила большую кастрюлю глинтвейна. Но она не знает, сколько будет гостей: знает только, что их будет то ли 3, то ли 7, то ли 11.

Требуется изготовить красивый и элегантный черпак, которым можно будет по возможности поровну разделить напиток. Проще всего было бы взять черпак объёмом $\frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{1}{231}$, но тогда разливать придётся очень долго.

Какого максимального объёма может быть черпак, чтобы напиток можно было разделить примерно поровну? «Примерно» означает, что разрешаются отклонения до 5 %, т. е. если гостей будет трое, то каждому должно достаться от $\frac{1}{3} + \frac{1}{60}$ до $\frac{1}{3} - \frac{1}{60}$, если семь — от $\frac{1}{7} + \frac{1}{140}$ до $\frac{1}{7} - \frac{1}{140}$, и аналогично для 11.

(*ТПЯ*, 2014)

[1] Последовательность Фибоначчи задаётся условием $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. В п. а) $F_1 = 0$, $F_2 = 1$.

73. Хорошо известно, что если число m взаимно просто с 10, то существуют числа, состоящие только из единиц (т. е. числа вида $111\ldots11$), которые делятся на m.

Пусть A — наименьшее из таких чисел.

а) Докажите, что если $m=3^k$, то A состоит из m единиц.

б) Докажите, что если A состоит из m единиц, то $m=3^k$.

74. а) Требуется расставить числа $1, 2, \ldots, N$ в каком-то порядке так, чтобы для всех $k=1, 2, \ldots, N$ сумма первых k чисел делилась на k. При каких N это возможно?

б) Требуется расставить числа $1, 2, \ldots, N$ в каком-то порядке так, чтобы для всех $k=1, 2, \ldots, N-1$ сумма первых k чисел делилась на $(k+1)$-е. При каких N это возможно?

в) Можно ли расставить все натуральные числа в таком порядке, чтобы при любом $k=1, 2, 3, \ldots, N, \ldots$ сумма первых k чисел делилась на $(k+1)$-е?

75. Множество натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ требуется разбить на k подмножеств таким образом, что если a, b входят в одно из них, то их разность $a-b$ уже не может входить в это множество. (Например, если в подмножество B входят числа 14, 15, то в нём уже не могут содержаться числа 29, 1, 7).

Докажите, что это возможно, если:

а) $N=2^k-1$; б) $N=(3^k-1)/2$.

76. а*) Требуется разбить числа от 1 до $2n$ на пары так, чтобы суммы чисел в парах образовывали отрезок натурального ряда без пропусков (т. е. были равны p, $p+1$, $p+2$, $\ldots$, l для подходящих натуральных p и l).

При каких n это возможно?

б***) Требуется разбить числа от 1 до $2n$ на пары так, чтобы разности чисел в паре были равны $1, 2, 3, \ldots, n$ (по одному разу).

При каких n это возможно?

77. Пифагорова тройка $(x, y, z)=(3, 4, 5)$ обладает тем свойством, что x, y — два последовательных числа. Существуют ли ещё такие тройки? Правда ли, что их бесконечно много?

78. Пусть a, b — положительные числа. При каком условии при любых натуральных m, n выполняется неравенство $[ma]\neq[nb]$?

79. Требуется записать в ряд какие-нибудь N чисел так, чтобы сумма любых пяти подряд взятых чисел была положительна, а сумма любых восьми чисел подряд — отрицательна.

При каком наибольшем N это можно сделать?

80. Существует ли натуральное число, которое может быть не менее чем 10 разными способами представлено в виде суммы двух простых чисел?

81. Сумма цифр чётного числа A равна 43. Какова может быть а) наименьшая, б) наибольшая сумма цифр числа $\frac{A}{2}$?

82. Назовём 10-значное число полным, если в него каждая цифра входит ровно 1 раз.

Существует ли:

а) такое полное число A, что $2A$ — тоже полное?

б) такое полное число A, что $3A$ — тоже полное?

в) такое полное число A, что и $2A$, и $3A$ — тоже полные?

Алгебра

83*. Разложить на множители выражение

$$Q = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 28b^3.$$

(*XXIII УРО*, 1983)

84.** На доске выписали в ряд 105 единиц. У каждой третьей из них изменили знак, затем у каждого пятого из полученных чисел также изменили знак, после этого знак сменили у каждого седьмого числа. Найти сумму всех полученных чисел.

(*XXIII УРО*, 1983)

85.** Пусть a_r — число полных квадратов, содержащихся в r-й тысяче, т. е. в промежутке $[1000(r-1); 1000r)$. Доказать, что последовательность $\{a_r\}$ не является периодичной, даже если отбросить у неё любое число начальных членов.

86.** а) Дано шестизначное число, его первая цифра — 5. Верно ли, что к нему можно приписать справа ещё 6 цифр так, чтобы в результате получился полный квадрат?

б) Тот же вопрос, если первая цифра числа равна 1.

в) Тот же вопрос, если первая цифра числа равна 2.

г) Найти наименьшее шестизначное число, для которого нельзя приписать справа ещё 6 цифр так, чтобы получить полный квадрат.

д) Дано шестизначное число, его первая цифра равна 3. Какое наименьшее число цифр требуется, чтобы можно было аналогичным способом получить из него куб (вне зависимости от того, каково исходное число)?

87.** Натуральный ряд представлен в виде объединения некоторого числа попарно непересекающихся бесконечных целочисленных арифметических прогрессий с положительными разностями $d_1, d_2, \ldots$ Может ли случиться, что при этом сумма $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots$ не превышает 0,9? Рассмотреть два случая:

а) общее число прогрессий конечно,

б) прогрессий бесконечное число.

(*XI ТГ, осень* 1989)

88*. Не пользуясь таблицами или калькулятором, доказать неравенство: $1{,}5 < \log_2 3 < 1{,}6$.

(*XXII УРО*, 1982)

89.** Не пользуясь калькулятором, найти число $\lg 7$ с ошибкой не более 0,01.

90.** Известно, что

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{50}\} = \{1, 2, \ldots, 50\}.$$

Найти максимальное возможное значение суммы

$$\sqrt{|a_1 - 1|} + \sqrt{|a_2 - 2|} + \ldots + \sqrt{|a_{50} - 50|}.$$

(*Отбор на международную олимпиаду*, 1993)

91*. Каким соотношениям должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, чтобы после некоторых тождественных преобразований и последующей замены переменной $y = x + \frac{k}{x}$ оно сводилось к квадратному уравнению?

(*XXIII УРО*, 1983)

92*. Всякий ли многочлен 4-й степени

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

можно представить в виде $P(x) = Q(R(x))$, где $Q(x)$ и $R(x)$ — квадратные трёхчлены?

(*XXVI УРО*, 1986)

93.** Провести прямую, касающуюся графика функции

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

сразу в двух точках. При каких a, b, c, d это возможно?

(*СО*, 1994)

94*.** Дана система:

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3+\ldots+\frac{1}{n}x_n=\frac{0!}{n!};\\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3+\ldots+\frac{1}{n+1}x_n=\frac{1!}{(n+1)!};\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_3+\ldots+\frac{1}{n+2}x_n=\frac{2!}{(n+2)!};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n+1}x_2+\ldots+\frac{1}{2n-1}x_n=\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}. \end{cases}$$

а) Решить систему.

б) Пусть $n=10$. Доказать, что $x_1=-x_{10}$, $x_2=-x_9$ и т. д.

в) Пусть $n=9$. Доказать, что $x_1=x_9$, $x_2=x_8$ и т. д.

95*.** Матрица составлена из величин

$$a_{ij}=\frac{1}{b_i-c_j},\quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

а) Найти матрицу, обратную к такой матрице.

б) Вычислить определитель матрицы.

96.** Матрица составлена из величин $a_{ij}=(i+j-1)^k$, где $i,j=$ $=1,\ldots,n$, а k принимает одно из значений $0,1,\ldots,n-1$. Вычислите определитель этой матрицы.

97*. Пусть a_n — наибольшее значение функции $\sin x - x^n$ на промежутке $(0;\infty)$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

98.** Пусть z пробегает множество всех комплексных корней n-й степени из 1. Доказать, что

$$\sum\frac{z}{x-z}=\frac{n}{x^n-1}$$

99*. а) У меня на счете лежит 500 долларов. Банк разрешает либо снять со счёта 300 долларов, либо положить на счёт 198 долларов (и никаких других операций). Какую наибольшую сумму я могу снять со счёта в результате нескольких таких операций, если вначале у меня в кармане ни гроша, а процентов банк не платит?

б) Имеется доска размером 1×147. На одном из полей стоит шашка. За один ход разрешается либо сдвинуть шашку влево на 100 полей, либо вправо на 47 полей. Доказать, что если будет сделано 147 ходов, то шашка неизбежно вернётся 147-м ходом на исходное поле.

(*XX ТГ, весна* 1999)

100*. Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, в которой все числа равны $+1$ или -1. Доказать, что существует такое k, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, что

$$a_1 + \ldots + a_k - a_{k+1} - \ldots - a_{2n} = 0.$$

101**. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Затем для каждого участника подсчитали число A, равное сумме очков всех участников, у которых он выиграл, минус сумма очков участников, которым он проиграл. Может ли случиться так, что для всех участников число A окажется: а) положительным? б) отрицательным?

(*XXII ТГ, весна* 2001)

102****. Доказать формулы:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 3\sum_1^\infty \frac{1}{n^2 C_{2n}^n}; \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3 C_{2n}^n}.$$

(*Летняя школа ТГ*, 1998)

103*. Найдите все арифметические прогрессии, обладающие следующими свойствами: а) разность $d > 0$; б) сумма прогрессии равна 1; в) каждый член прогрессии имеет вид $\frac{1}{k}$, где k — натуральное.

(*XXVIII ТГ, осень* 2007)

104**. Имеется клетчатая бумага; площадь клетки равна 1. Если на ней отметить два узла, то вертикали и горизонтали, на которых они лежат, образуют прямоугольник. (Если они лежат на одной горизонтали или вертикали, то получается вырожденный прямоугольник площади 0.)

Внутри квадрата 30×30 (не на границе) отмечено 29 узлов.

а) Докажите, что можно выбрать два их них так, что площадь соответствующего прямоугольника меньше 13.

б) Верно ли, что независимо от того, как отмечены узлы, можно выбрать два узла так, что площадь прямоугольника меньше 10?

105**. Последовательность функций определена следующим образом:

$$f_0(x) = \sqrt{x},$$
$$f_1(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1},$$
$$f_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - f_n(x+2^n).$$

Докажите, что $f_{2010}(x)$ всюду возрастает.

106**. Найдите при произвольном данном n все решения системы

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0,$$
$$x_1^2 + x_2 = x_2^2 + x_3 = x_3^2 + x_4 = \ldots = x_{n-1}^2 + x_n = x_n^2 + x_1 = 0{,}9.$$

107*. По окружности расставлено 999 единиц. Затем к некоторым из них разрешается поставить минусы. Места минусов произвольны; их число тоже произвольно, но после их расстановки должно получиться не менее 100 минусов и не менее 100 плюсов.

Затем вычислены произведения всех чисел по 10 подряд (т. е. произведения вида $x_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_{k+9}$), а затем взята сумма S всех 999 получившихся чисел.

а) Какое наибольшее значение может принимать S?

б) А какое наименьшее?

(*XXXI ТГ*, *весна* 2010)

108**. В Стране Дураков проживает 13 олигархов. Несколько лет назад в ней начали проводить кампании по борьбе с коррупцией. Суть кампании в следующем: у самого богатого из олигархов (предполагается, что равных состояний нет, т. е. что любые два состояния различаются хоть на 1 монету) конфискуется всё золото, какое у него есть, а каждому из остальных выдаётся из государственной казны по миллиону золотых монет.

На следующий год кампания повторяется: у самого богатого всё отбирают, а остальным (в том числе и тому, кого экспроприировали в прошлом году) выдают по миллиону. Так повторяется несколько раз.

Предполагается, что в промежутке между кампаниями олигархи не богатеют и не беднеют.

Известно, что в начальный момент у всех олигархов в сумме был 31 миллион золотых монет.

Какое наибольшее количество денег могло при этих условиях оказаться у олигархов после какой-нибудь очередной кампании? Ответ требуется найти с точностью до 1000 монет.

109***. Сто положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 > 10\,000, \qquad (*)$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} < 300. \qquad (**)$$

Докажите, что среди них найдутся три числа, сумма которых больше 100.

(*XVII ММО*)

110*.** Обозначим через $S(n,m)$ сумму m-х степеней всех целых чисел от 1 до n:

$$S(n,m) = \sum_{k=1}^{n} k^m.$$

а) Докажите, что $S(n,m)$ можно записать в виде многочлена от n степени $m+1$, т. е. $S(n,m) = an^{m+1} + bn^m + cn^{m-1} + \ldots + f$, где коэффициенты $a, b, c, \ldots, f$ зависят от m, но не от n. (Например, как известно, при любом n для суммы первых степеней имеем

$$S(n,1) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

для суммы третьих степеней —

$$S(n,3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2).$$

б) Докажите, что $a = \dfrac{1}{m+1}$ для всех $m \geqslant 0$.

в) Докажите, что $b = \dfrac{1}{2}$ для всех $m \geqslant 1$.

г) Попытайтесь найти дальнейшие коэффициенты.

Взвешивания

111.** Туристы взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (т. е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему

а) достаточно четырёх взвешиваний;

б) недостаточно трёх.

(*XVI ТГ*, *весна* 1995)

112.** Даны 13 монет, из них одна фальшивая, она отличается по весу от остальных (неизвестно, фальшивая монета легче или тяжелее). Определите фальшивую монету тремя взвешиваниями на чашечных весах и установите, легче она или тяжелее, если разрешено, чтобы весы были неравноплечими. Каким должно быть соотношение плечей, чтобы задача решалась?

Замечание. При равноплечих весах эта задача, как известно, решения не имеет.

113*.** а) Имеется пять гирь разных весов. За одно взвешивание на весах с двумя чашками можно сравнить любые две гири и узнать, какая тяжелее. Сколько нужно взвешиваний, чтобы расположить их в порядке весов?

б) Та же задача для n гирь.

114*. У барона Мюнхгаузена имеется 50 гирь. Известно, что веса этих гирь — целые числа $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{50} \leqslant 100$, и что суммарный вес гирь — чётное число.

При этом барон утверждает, что ему удалось подобрать веса так, что эти гири невозможно разложить на две чашки весов так, чтобы весы были в равновесии. Не врёт ли барон?

(**Пояснение:** гири на чашки можно класть и не поровну: скажем, можно на одну чашку положить 27 гирь, а на другую 23; однако положить требуется непременно все 50 гирь.)

(*XXXII Турнир городов, весна* 2011)

115. В наборе 12 гирь разных весов, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что если раскладывать гири на две чашки, то всегда перевешивает та чашка, на которой гирь больше.

Доказать, что хотя бы одна из гирь весит более 42 г.

(*XXXIV ТГ, весна* 2013)

116. Дано некоторое число $\alpha > 1$. Имеется набор из ста гирь весов $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{99}$.

Требуется разбить этот набор на m частей (в разных частях может быть разное количество гирь) так, чтобы веса любых двух из этих частей отличались не более чем на 1.

При каких α это возможно,

а) если $m = 2$, б) если $m = 3$, в) при других m?

Игры

117*. Кошка и мышка бегают с постоянными скоростями $V_{\text{кошки}} = 10$ и $v_{\text{мышки}} = 1$ по лабиринту в форме прямоугольника с проведёнными диагоналями (см. рис. 5). Стороны прямоугольника равны 3 и 4. Диагональные ходы слишком узки для кошки. И кошке, и мышке запрещено останавливаться, менять свои скорости, а также поворачивать посреди хода, не добежав до одной из вершин или цен-

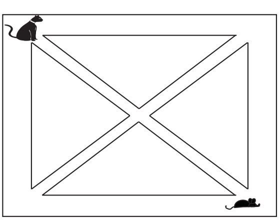


Рис. 5

тра прямоугольника. (Поворачивать на 180° в вершине разрешается.) В начальный момент кошка находится в одной вершине прямоугольника, мышка в другой. Может ли кошка поймать мышку?

118**. Двое играют в следующую игру. Имеется две кучки конфет, играющие делают ход по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает одну из кучек, а другую делит на две (равные или неравные) части. Если он не может разделить кучку, так как в ней всего одна конфета, то он её съедает и выигрывает. В начале игры в кучках было 33 и 35 конфет. Кто выигрывает, начинающий или его партнёр, и как для этого надо играть?

(*XXXI ММО*, 1968)

119**. Два мудреца играют в следующую игру. Выписаны числа 0, 1, 2, …, 1024. Первый мудрец вычёркивает 512 чисел по своему выбору; затем второй вычёркивает 256 чисел из оставшихся, потом первый 128 чисел из оставшихся и т. д. На десятом шаге второй мудрец вычёркивает одно число; остаются два числа. После этого первый мудрец платит второму сумму, равную разности этих чисел. Как выгодней играть первому мудрецу? Как второму? Сколько уплатит первый мудрец второму, если оба будут действовать наилучшим образом?

(*XXXII ММО*, 1969)

120*. Имеется 4 яблока. Они весят 600 г, 400 г, 300 г, 250 г. Двое — Петя и Вася — собираются их съесть. Право выбора за Петей; он берёт любое из яблок и начинает его есть. Сразу же за ним Вася берёт любое из оставшихся и тоже начинает есть. Скорость поедания у обоих одинаковая. Тот, кто съел своё яблоко, имеет право взять следующее (любое из оставшихся). Какова оптимальная стратегия обоих мальчиков, если каждый хочет съесть побольше?

121*. На бесконечной плоскости в точке A лежит мяч. Двое — F и S — по очереди бьют по мячу. Длина броска первого не более 2004, длина броска второго не более 2003. Кроме того, запрещается менять направление мяча более чем на 90 градусов: иными словами, если один из игроков делает ход из B в C, а следующий ход делается из C в D, то угол BCD должен быть тупым или прямым. F хочет загнать мяч в первый квадрант (на плоскости — обычная прямоугольная система координат). Сможет ли он этого добиться при условии, что бьёт первым?

122**. Играют двое. У первого игрока есть тысяча чётных карточек (2, 4, …, 2000), у второго — 1001 нечётных (1, 3, …, 2001). Ходят по очереди, начинает первый. Ход состоит в следующем: игрок, чья очередь ходить, выкладывает одну из своих карточек, а другой, посмотрев на неё, выкладывает одну из своих карточек; тот, у кого число на карточке больше, записывает себе одно очко, а обе выложенные карточки выбрасываются. Всего получается 1000 ходов (и одна карточка второго не используется). Какое наибольшее число очков может гарантировать себе каждый из игроков (как бы ни играл его соперник)?

(*XXV ТГ*, 2003)

123**. Играют двое: X и Y. По кругу расставлены единицы и минус единицы, всего их 60. Вначале единицы и минус единицы чередуются.

Игрок X выбирает любой участок ряда любой длины и меняет знаки у всех чисел участка. После этого Y меняет знак у одного (любого) числа. Затем ходит X, и так далее. После того, как каждый сделал по 100 ходов, игра заканчивается, и подсчитывается сумма всех чисел. Это — выигрыш X (если сумма отрицательна — то его проигрыш).

Каким будет выигрыш X в предположении, что оба играют наилучшим образом?

124. По кругу расположены n луночек, одна из которых отмечена. Петя и Вася играют в следующую игру. В начале игры Вася кладёт шарик в одну из луночек.

Далее за каждый ход Петя называет натуральные число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а Вася перемещает шарик из луночки, в которой он находится, на k луночек по часовой либо против часовой стрелки (по своему усмотрению).

При каких n Петя может играть так, чтобы через несколько ходов шарик

а) гарантированно попал в отмеченную луночку;

б) гарантированно попал либо в отмеченную луночку, либо в одну из соседних с отмеченной луночек?

(*Журнал «Квант»*, № 2, 2014)

Таблицы

125. а*) В турнире в один круг (каждый играет с каждым по разу) участвовало r команд. Известно, что для каждых двух команд есть третья, которая выиграла у обеих. Докажите, что r не меньше 7.

б**) А если для каждых трёх команд есть четвёртая, которая выиграла у всех трёх? При каких r это возможно (укажите, по возможности, меньшее число)?

в****) Дано натуральное число s. Требуется, чтобы для любых s команд была команда, выигравшая у всех s. Можно ли в этом случае составить таблицу турнира (для достаточно большого r)?

126**. «Вот странно, — сказал Петя, рассматривая таблицу командного турнира по шахматам, — все три участника команды A заняли первые места на своих досках, но турнир выиграла команда B».

«Такого быть не может», — авторитетно заявил Вася.

Кто из них прав?

Правила турнира. В каждой команде два основных игрока и один запасной. Соревнование проходило на двух досках, а запасной (третья доска) время от времени подменял то одного, то другого основного игрока на его доске. Место на доске (первой, второй, запасной, она же третья) определялось по проценту набранных очков: среди первых досок, среди вторых досок, среди запасных. Система зачёта обычная: в каждой партии выигравший получал 1 очко, проигравший 0, за ничью оба игрока получают пол-очка.

127. В шахматном турнире претендентов участвовало n шахматистов, которые до этого неоднократно встречались между собой в других турнирах. Турнир проводился в 4 круга, т. е. каждый встретился с каждым 4 раза.

Перед началом турнира для каждого из участников был вычислен его рейтинг, который равен проценту очков, набранных до турнира в играх с другими $(n-1)$ претендентами (выигрыш — 1 очко, ничья — пол-очка, проигрыш — 0). После турнира был вычислен аналогичный рейтинг, уже с учётом его результатов. Могло ли случиться, что по результатам турнира у всех, без исключения, участников рейтинг понизился?

128. Составлена таблица из вещественных (вообще говоря, нецелых) чисел. На последнем месте в каждой строке стоит сумма всех предыдущих чисел строки, и на последнем месте каждого столбца — сумма каждого столбца. Соответственно, в правом нижнем углу стоит сумма всех чисел последней строки, и она же — сумма чисел последнего столбца. Таким образом, таблица имеет примерно такой вид:

1,32	4, 17	5,87	4,11	15,47
12,03	17,91	14,32	5,07	49,33
3,5	21	7,14	3,12	34, 76
16,85	43,08	27,33	12,3	99,56

Докажите, что можно все числа в таблице (включая суммы) округлить до целых так, чтобы по-прежнему на последних местах стояли суммы соответствующих чисел. Округлять разрешается в любую сторону: например, число 12,03 можно округлить либо до 12, либо до 13.

129. В шахматном турнире участвовало 3 шахматиста: A, B, C. Турнир проходил в несколько кругов (каждый сыграл с каждым одно и то же количество раз). За победу в одной партии давалось 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$, за поражение — 0.

Известно, что все участники набрали разное число очков, и по количеству очков расположились в порядке ABC а по количеству одержанных побед — в обратном порядке: CBA, т. е. участник B одержал побед строго меньше, чем C, но строго больше, чем A.

Докажите, что не менее 9 партий закончились вничью.

Комбинаторика; разное

130**. Номера телефонов в городе N состоят из шести цифр. Можно ли установить в этом городе 100 000 телефонов так, чтобы при вычёркивании из всех этих номеров k-й цифры ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) получалось 100 000 разных номеров?

(*XXXI ММО*, 1968)

131**. Семь школьников решили за день обойти семь кинотеатров. При этом они поступают так: на каждый сеанс шестеро идут в один кинотеатр, а кто-то седьмой (не обязательно один и тот же) — в другой. Во всех кинотеатрах за день проводится 11 сеансов, которые начинаются в 9:00, 10:00, …, 19:00. К вечеру каждый школьник побывал во всех семи кинотеатрах. Доказать, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не был ни один из школьников.

(*XXX ММО*, 1967)

132*. Дробь $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{3-1}{3!} = \frac{2}{6}$ сократима на 2;

дробь $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{12-4+1}{4!} = \frac{9}{24}$ сократима на 3;

дробь $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{60-20+5-1}{120} = \frac{44}{120}$ сократима на 4.

Доказать, что аналогичная дробь $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{1996!}$ сократима на 1995.

133*. Пусть N — число перестановок из n элементов, в которых ни один элемент не стоит на своём месте, а M — число перестановок, в которых ровно один элемент стоит на своём месте. Докажите, что $|N-M|=1$.

134**. В автобусной ленте миллион билетов с номерами от 000 000 до 999 999. Фиолетовым цветом закрашены билеты, у которых сумма чётных цифр (2-й, 4-й и 6-й) равна сумме нечётных. Каково наибольшее расстояние между двумя соседними фиолетовыми билетами?

(*XXXI ММО*, 1968)

135***. Квадратную таблицу $n \times n$ требуется так заполнить числами, равными $1, -1$ или 0, чтобы все суммы чисел по строкам и по столбцам таблицы были различны. Для каких n это возможно?

(*XXI УРО*, 1981)

136**. По кругу лежат 10 монет. Разрешается одновременно перевернуть или четыре рядом лежащие, или по две слева и справа от какой-то монеты. Можно ли этими операциями перевернуть все 10 монет?

(*XV ТГ, весна* 1994)

137*. Трое играют в пинг-понг на вылет. Известно, что в первой партии A выиграл у B, а в последней C выиграл у A. Известно, кроме того, что A сыграл 24 партии, B — 28 партий и C — 38. Сколько партий выиграл игрок B?

138*. Решить уравнение: $\operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x$.

139****. Оценить сверху сумму

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 100x.$$

Какую наилучшую оценку вы можете получить? Может ли, например, эта сумма быть больше 65? 70?

(*Матбой* 145 *школа — ФМШ—КГУ, Киев,* 1985)

140**. Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящих 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

(*Из листка «Материалы для членов методической комиссии по математике», задачи для Всесоюзной олимпиады,* 1979)

141**. Дана четвёрка целых чисел a, b, c, d. По ней строится новая четвёрка

$$a_1 = a - b, \quad b_1 = b - c, \quad c_1 = c - d, \quad d_1 = d - a.$$

По четвёрке $a_1, \ldots, d_1$ тем же способом строится четвёрка $a_2, \ldots, d_2$, и т. д. Известно, что любое из чисел $a_{100}, \ldots, d_{100}$ не превосходит миллиарда. Докажите, что $a = b = c = d$.

142.** Пусть a, b, c, d, e — натуральные числа. Известно, что $a > b$. Рассматривается новая пятёрка чисел:

$$a_1 = a - b + c - d + e,\ b_1 = b - c + d - e + a,\ c_1 = c - d + e - a + b,$$
$$d_1 = d - e + a - b + c \text{ и } e_1 = e - a + b - c + d.$$

По ней строится таким же способом следующая пятёрка:

$$a_2 = a_1 - b_1 + c_1 - d_1 + e_1 \text{ и т. д.;}$$

по пятёрке $a_2, \ldots, e_2$ — следующая пятёрка $a_3, \ldots, e_3$, и т. д. до чисел $a_{100}, \ldots, e_{100}$.

Докажите, что одно из чисел $a_{100}, \ldots, e_{100}$ больше 10^9.

143.** Уравнение $n(n+1) = 2m(m+1)$ имеет в целых числах решения $(3, 2)$ и $(20, 14)$. Имеет ли оно другие решения?

144. Обозначим через $s(x)$ сумму цифр натурального числа x. Пусть дано фиксированное число k. Обозначим через $Y(k)$ наибольшее решение неравенства $s^k(x) > x$.

а*) Найдите $Y(2)$ и $Y(3)$.

б***) Верно ли, что число $Y(k)$ при любом k имеет вид $a99\ldots9$, где цифра a и число девяток зависят от k?

145.** Докажите, что среднее число делителей натурального числа n, $1 < n < 1\,000\,000$, больше 10.

146*. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами? Иными словами, имеет ли решение в целых числах неравенство: $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

(*XXVII ТГ*, 2005)

147.** Докажите, что многочлен $f(x) = x^2 - 8x + 15$ обладает следующим свойством: для любого n многочлен $f(f\ldots(f(x))\ldots)$ (n раз) имеет ровно 2^n различных вещественных корней.

148. Положительные числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + \ldots + x_k}{2},$$
$$x_1 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

а**) Докажите, что $k > 50$.

б**) Постройте пример таких чисел для какого-нибудь k.

в***) Найдите минимальное k, для которого такой пример возможен.

(*XXVIII ТГ*, 2006)

149*. Сколько существует разных способов разбить число 2004 на целые положительные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

(*XXVI ТГ, осень* 2004)

150. а)* В двух кучах суммарно лежит $N = 1001$ камень. Из бóльшей кучи в меньшую перекладывают столько камней, сколько в ней уже содержится. После этого опять из той кучи, которая теперь является бóльшей, перекладывают в меньшую столько камней, сколько в ней содержится, и так делают много раз. Верно ли, что в какой-то момент в меньшей из куч будет не более 200 камней? А не более 120 камней?

б)** Пусть α, β ($\alpha < \beta$) — два иррациональных числа, сумма которых равна 1. Заменим их числами 2α и $2\beta - 1$ (их сумма по-прежнему равна 1) и упорядочим эти числа по возрастанию, т. е. обозначим через α_1 меньшее из них, а через β_1 — большее. С числами α_1, β_1 проведём аналогичную операцию, получим числа α_2, β_2 и т. д. Какое наименьшее число при этом можно получить? Точнее: каким должно быть число γ, чтобы можно было утверждать, что при некотором n окажется, что $\alpha_n \leqslant \gamma$, и для каких γ это неверно?

151. Двое показывают фокус.

На столе лежит 5 карт. Они известны и зрителям, и фокусникам (например, четыре дамы и валет пик).

Один из зрителей берёт карты, выбирает из них три, а две остальные прячет (например кладёт рубашкой вверх). Затем он выходит в соседнюю комнату и показывает свои три карты помощнику фокусника, который берёт у него одну из этих трёх карт (по своему выбору).

Затем зритель возвращается в первую комнату и показывает фокуснику (и другим зрителям) две карты, которые у него остались. Фокусник должен угадать, какую карту взял его помощник.

Всегда ли фокус удаётся? Иными словами, могут ли фокусник и его помощник договориться о такой тактике, чтобы фокусник сумел по двум картам всегда угадать третью?

(*XXIX ТГ, осень* 2007, *тренировочный вариант*)

152. Пропагандист получил задание: показать, что в его стране ситуация в течение последних n лет монотонно улучшалась, т. е. каждый следующий год был лучше предыдущего.

Он располагает таблицей $3 \times n$, в которую внесены численные показатели — значения трёх параметров за каждый из этих годов. Эти величины (например, показатель инфляции, показатель роста населения и изменение ВВП) известны: соответствующие показатели получены независимыми организациями.

Для доказательства пропагандисту предоставлено право, во-первых, уточнить любое из чисел в таблице (или даже все сразу). «Уточнение» означает следующее: каждое число указано с несколькими десятичными знаками — он имеет право написать вслед за последним знаком ещё один на своё усмотрение (например, официальный показатель равен 3,251 — пропагандисту разрешено писать, что он равен 3,2518). Во-вторых, он имеет право составить по своему усмотрению «интегральный показатель благополучия» как сумму показателей таблицы за определённый год с произвольными (т. е. по его выбору, но одинаковыми за все годы) коэффициентами (например, $3 \times a_1 - 200 \times a_2 + 12 \times a_3$). Задача пропагандиста — составить его так, чтобы «интегральный показатель» монотонно возрастал.

Верно ли, что пропагандист имеет возможность (независимо от того, каковы данные таблицы) справиться со своим заданием:

а) если $n=4$; б) если $n=5$?

153. Из чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$ составлены всевозможные суммы. Затем сосчитали, сколько раз получилась та или иная сумма. Докажите, что чаще всего получается сумма 2525.

154. Сколько повторений одних и тех же чисел есть в треугольнике Паскаля?

Общеизвестны три: (1) единица встречается бесконечное число раз, (2) на втором и предпоследнем местах встречаются все числа по разу (следовательно, все числа, встречающиеся внутри, имеют «дубли») и (3) имеет место симметрия треугольника Паскаля относительно вертикали.

Исключим эти тривиальные повторы, т. е. будем рассматривать только такие числа C_n^k, что (*) $k>1$ и (**) $n \geqslant 2k$.

Какие числа (с указанными ограничениями) встречаются в треугольнике больше одного раза?

Много ли случаев, когда числа C_n^2 и C_m^3 равны?

Верно ли хотя бы такое утверждение: ни одно число, кроме 1, не встречается в треугольнике Паскаля более 100 000 раз?

155. Имеется m белых и n чёрных фишек. Требуется разложить все эти фишки на несколько куч (больше одной). Количество куч и распределение фишек по кучкам произвольно, но нужно это сделать таким образом, чтобы доля белых фишек во всех кучах была приблизительно одинакова. «Приблизительно» означает следующее: если r — наибольшая доля белых фишек в одной из этих куч, а s — наименьшая, то разность $r-s$ должна быть минимальна.

Как это сделать, если

а) $m=20$, $n=47$; б) $m=50$, $n=117$?

156. а) Имеется N корзинок, вначале в каждой из них лежит по одному ореху. Выбираются две корзинки, и из одной из них орехи (пока что — один орех) перекладываются в другую, а пустая корзинка выбрасывается. Затем опять выбирается произвольная пара корзинок (причем предполагается, что выбор любой пары одинаково вероятен и от числа орехов не зависит), и опять-таки орех или орехи из одной высыпаются в другую, а пустая выбрасывается. Так действуют $N-2$ раза, после чего остаются только две корзинки, и в них соответственно m и n орехов, причем $n+m=N$.

Какова вероятность данного распределения (n, m)?

б) А если остановиться на $(N-3)$-м шаге? Какое распределение по трём корзинам более (менее) вероятно?

157. Предлагаются три способа выписать последовательность букв AABAABABAAB... Оказывается, все три способа дают один и тот же результат (более точные утверждения будут сформулированы ниже).

Пусть τ — «золотое сечение», т. е. положительный корень уравнения $x^2+x=1$. Таким образом, $\tau=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}618\ldots$

Перечислим все три способа.

i) На клетчатой бумаге отмечена точка O. Из нее под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\tau$ к горизонтальным линиям сетки проведен луч OL. На каж-

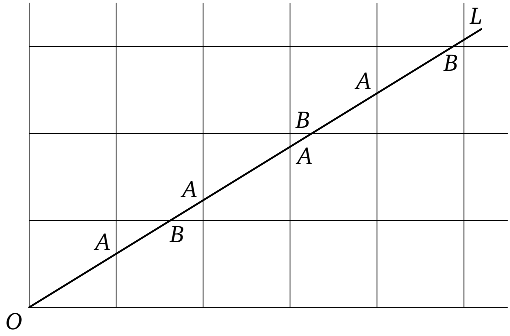


Рис. 6

дом пересечении OL с линиями сетки мы ставим одну из двух букв: букву A на пересечении с вертикальной линией, букву B — с горизонтальной (см. рис. 6).

После этого буквы выписываются в порядке, в котором они идут на луче.

ii) Сначала пишется буква A, а затем делается несколько шагов. На каждом шаге буква A заменяется на AB, а буква B — на A. Таким образом, на первых шагах мы получаем такие последовательности:

A,

AB,

ABA,

ABAAB,

ABAABABA,

ABAABABAABAAB и т. д.

Докажите, что каждая из получившихся конечных последовательностей является началом последовательности из п. i).

iii) На отрезке $[0, 1]$ отмечаются точки

$$\{\tau\},\ \{2\tau\},\ \{3\tau\},\ \ldots,\ \{(n-1)\tau\}.$$

Они разбивают отрезок на n частей.

Докажите, что имеется бесконечно много значений n таких, что

• среди полученных n частей есть только две различные по длине: несколько частей длины a, и несколько — длины b (пусть для определенности $a > b$),

• и притом, если выписать длины отрезков по порядку, то получится кусок последовательности из п. i).

Решения

Задачи на шахматной доске

1. Ответ. Нет, не может.

Решение. Более того, конь не может обойти достаточно большой квадрат размером $r \times r$. В самом деле, в таком квадрате свободных белых полей больше, чем чёрных, примерно на $\frac{r^2}{16}$ (эта формула является точной, если r делится на 4, и приближённой в противном случае). Поэтому он может обойти данный квадрат только так: побродив некоторое время по нему, выйти из него (обязательно через белое поле), затем поблуждать вне его и вернуться в него опять через белое, и так не менее, чем $\frac{r^2}{16}$ раз. Но для того чтобы выйти из квадрата, необходимо сначала оказаться на его «бордюре» шириной в 2 клетки. Площадь этого бордюра примерно равна $8r$, и при больших r она меньше, чем $\frac{r^2}{16}$. Что и требовалось доказать.

2. Ответ. а) требуется 12 ладей; б) не менее 16 ладей.

Решение. Расставить 16 ладей согласно условию очень легко: можно, например, занять ладьями всю первую и всю последнюю

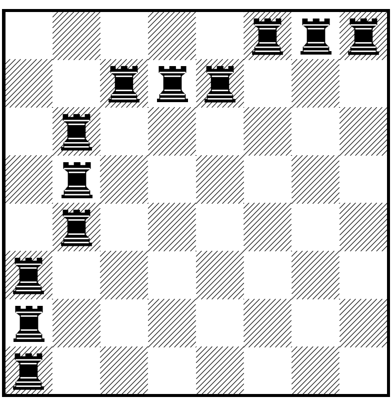


Рис. 7

горизонтали, или же обе диагонали; есть также много других решений. Расставить 12 ладей труднее; одно из возможных решений показано на рис. 7.

Теперь нужно доказать, что в варианте а) нельзя обойтись 11 ладьями, а в варианте б) — пятнадцатью. Начнём с соображений, общих для обоих вариантов.

1. Если на одной из горизонталей нет ни одной ладьи, то каждое поле этой горизонтали должно быть бито дважды по вертикали. Таким образом, на каждой вертикали стоит минимум 2 ладьи и их число не меньше 16. Поэтому случай 1 мы можем исключить и не рассматривать в дальнейшем. (Для краткости вместо последней фразы мы будем дальше ставить значок #.)

2. Если на каждой горизонтали не менее 2 ладей, то их число не меньше 16. #

3. Аналогичные соображения применимы и к вертикалям. Поэтому в дальнейшем мы можем рассматривать только случай, когда на каждой горизонтали и вертикали стоит не менее одной ладьи, а на некоторых — только одна. Но если ладья стоит в одиночестве на какой-то, скажем, горизонтали, то для того чтобы она была бита дважды, на её вертикали должно стоять ещё минимум 2 ладьи. Поэтому непременно есть вертикали, на которых более 2 ладей. То же справедливо и для горизонталей.

Перейдём теперь к решению пункта а.

4а. Если хотя бы на двух горизонталях стоит более двух ладей, то общее число ладей не меньше, чем $2 \times 3 + 6 \times 1 = 12$. #

5а. Допустим теперь, что только на одной горизонтали стоит более 2 ладей, а число ладей меньше 12. Тогда как минимум на 6 горизонталях стоит по одной ладье; все они должны стоять на вертикалях, где более 2 ладей. Но тогда либо таких вертикалей не менее двух — и мы оказываемся в ситуации, рассмотренной в 4а, — либо все 6 стоят на одной вертикали. Поскольку на остальных 7 вертикалях также стоит хотя бы по одной ладье, их число не менее 13 (#), и все случаи рассмотрены.

Разберём теперь пункт б.

4б. Сосчитаем все стоящие на доске ладьи, исходя из числа 16. А именно, будем исходить из того, что на каждой горизонтали стоит по 2 ладьи, а если это не так, внесём поправки. Именно, вычтем из 16 число горизонталей, на которых стоит только одна ладья (пусть L_1 — их множество, а l_1 — их число), и добавим число ладей с горизонталей, где их больше; а чтобы не путаться, рассмотрим множество M_1 тех ладей, которые стоят на горизонтали *между* двумя ладьями. Пусть их число равно m_1. Тогда число ладей на доске равно $16 - l_1 + m_1$. Рассуждая аналогично и рассматривая вертикали вместо горизонталей, мы получим, что число ладей равно $16 - l_2 + m_2$.

5б. Теперь задача была бы решена, если бы мы доказали, что $l_1 \leqslant m_1$ или что $l_2 \leqslant m_2$. Но сделать это трудно; к счастью, оказывается, что гораздо легче доказать те же неравенства «накрест».

В самом деле, если ладья стоит одна на горизонтали, то она непременно стоит между двумя ладьями на вертикали, т. е. принадлежит множеству M_2. Это значит, что $L_1 \subset M_2$, откуда $l_1 \leqslant m_2$. Аналогично доказывается неравенство $l_2 \leqslant m_1$. Из этих неравенств легко следует, что число ладей не меньше 16.

3. Решение. а) Из условия следует, что любая фигура имеет не более каких-то определённых 20 ходов (скажем, один — на 1 поле влево и 2 поля вверх, как шахматный конь, второй — на 13 полей влево и 18 вниз, и т. д.) Отсюда следует, что она бьёт данное поле только с полей, соответствующих «обратному ходу»: на 13 полей вправо и 18 вверх и т. д. То есть также не более чем с 20 полей.

Поставим теперь на доску первую фигуру A произвольно и попытаемся поставить вторую фигуру B так, чтобы они не били друг друга. Очевидно, для фигуры B «запретны» поле, где стоит A, поля, находящиеся под боем A и поля, с которых B бьёт A — всего не более чем 41 поле. Затем ставим третью фигуру и т. д. Очевидно, для 20-й фигуры Z запретны 19 полей, уже занятых предыдущими фигурами, и $400 + 400$ полей, битых этими фигурами или тех, с которых Z их бьёт. Таким образом, фигуру Z всё ещё есть куда поставить.

б) Предыдущее рассуждение здесь не годится: если «битые поля» не сдвигаются вместе с фигурой, то вполне возможно, например, что то поле, на которое уже поставлена фигура A, фигура B бьёт с любого поля доски. Рассудим иначе: рассмотрим множество всех расстановок фигур на доске (их $N(N-1)(N-2)\ldots(N-19)$, где $N = 10^4$) и найдём долю позиций, в которых фигура A бьёт фигуру B. Так как при любой постановке A для B запрещено 20 полей, эта доля равна $\dfrac{20}{9999}$. Но теперь легко сообразить, что доля позиций, где одна из 20 фигур бьёт другую, во всяком случае не больше, чем $20 \cdot 19 \cdot \dfrac{20}{9999} < 1$, а стало быть, существуют и другие позиции.

4. Решение. а) Можно. Поставим первого ферзя произвольно, затем расставим 8 следующих ферзей так, чтобы они били 2 соседние с этим ферзём горизонтали, 2 вертикали и по 2 диагонали каждого типа, и при этом не били друг друга. Это заведомо будет выполнено, если ставить их на соответствующую линию достаточно далеко от первого ферзя: например, первого — на расстоянии 10, второго — на расстоянии 100, третьего на расстоянии 1000, и т. д.

Следующую группу ферзей мы расставим так, чтобы они били 8 следующих линий (если одна из этих линий уже бита одним из расставленных ранее ферзей, значит, в очередной группе будет не 8 ферзей, а меньше). Продолжая этот процесс, мы получим требуемую расстановку на бесконечной доске.

б) Раскрасим доску обычным образом в белый и чёрный цвет. Теперь ясно, что все поля «вторых» диагоналей одного цвета — например, чёрного, и поэтому «белые» диагонали другого направления заполнить не удастся.

в) Это возможно. Решение примерно такое же, как в а): следует расставлять ферзей на очередных горизонталях и вертикалях, следя за тем, чтобы они всё время попадали на «пятые» диагонали.

5. Ответ. Нет.

Доказательство. В самом деле, пусть ферзи расставлены каким-то образом. Ясно, что достаточно рассматривать случай, когда на каждой вертикали стоит по одному ферзю. Занумеруем горизонтали и вертикали доски от 0 до 14, и пусть ферзь с нулевой вертикали стоит на горизонтали номер i_0, с первой вертикали — на горизонтали номер i_1 и т. д. Нетрудно проверить, что для того, чтобы ферзи не били друг друга, должны выполняться три условия:

а) $\{i_0, i_1, \ldots, i_{14}\} = \{0, 1, \ldots, 14\}$ (ферзи не бьют друг друга по горизонталям);

б) $\{i_0+0, i_1+1, \ldots, i_{14}+14\} = \{0, 1, \ldots, 14\} \bmod 15$ (ферзи не бьют друг друга по диагоналям одного направления);

в) $\{i_0-0, i_1-1, \ldots, i_{14}-14\} = \{0, 1, \ldots, 14\} \bmod 15$ (то же по диагоналям второго направления).

Сложим эти три равенства. Мы получим:

$$\{i_0, i_0-0, i_0+0, i_1, i_1-1, i_1+1, \ldots, i_{14}, i_{14}-14, i_{14}+14\} = \\ = 3\{0, 1, \ldots, 14\} \bmod 15. \quad \text{(i)}$$

Теперь (решающий шаг в доказательстве) перейдём в равенстве (i) от модуля 15 к модулю 3. Поскольку ясно, что $\{0, 1, \ldots, 14\} =$

$= 5\,\{0, 1, 2\} \bmod 3$, имеем:

$$\{i_0, i_0 - 0, i_0 + 0, i_1, i_1 - 1, i_1 + 1, \ldots, i_{14}, i_{14} - 14, i_{14} + 14\} = \\ = 15\,\{0, 1, 2\} \bmod 3. \quad \text{(ii)}$$

С другой стороны, ясно, что

$$\{i_1, i_1 - 1, i_1 + 1\} = \{0, 1, 2\} \bmod 3 \qquad \text{(iii)}$$

независимо от выбора i_1. Аналогичное равенство справедливо для i_2 и других чисел — исключая, однако, i_0 и другие i, у которых индекс делится на 3. Не делящихся на 3 индексов 10; вычтя десять равенств типа (iii) из равенства (ii), мы получим:

$$\{i_0, i_0 - 0, i_0 + 0, i_3, i_3 - 3, i_3 + 3, \ldots, i_{12}, i_{12} - 12, i_{12} + 12\} = \\ = 5\,\{0, 1, 2\} \bmod 3.$$

Но это последнее равенство явно невозможно, так как правая часть «делится на 5», а левая «делится на 3»; говоря яснее, левая часть по модулю 3 совпадает с $3\,\{i_0, i_3, \ldots, i_{12}\}$, а правая часть содержит число 0 пять раз. Это завершает доказательство.

Замечание. В наших рассуждениях мы пользовались идеологией «теории именованных множеств». Не вдаваясь в подробности, скажем, что в именованное множество элемент может входить не один, а несколько раз; таким образом, если в обычной теории множеств $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3)$ то в теории именованных множеств $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 1, 2, 3)$. При таком подходе ясно, например, что если $\#(M)$ — число элементов множества M, то

$$\#(M \cup N) = \#(M) + \#(N)$$

(что, разумеется, неверно в обычной теории множеств). Именно в силу этого и ему подобных равенств в теории именованных множеств можно так спокойно складывать и вычитать равенства с множествами, как мы это делали выше.

Впрочем, читатель легко убедится, что все выше приведённые рассуждения могут быть проведены и в рамках обычной теории множеств; для этого следует только рассуждать не с множествами чисел, а, скажем, с множествами листков бумаги, на каждом из которых написано какое-то число; тогда, скажем, равенство (i) означает, что когда мы сложим вместе листки, на которых написаны элементы первых трёх множеств, то среди этих 45 листков будут 3, на которых написана цифра 0, три — с цифрой 1, и т. д.

6. Ответ. 31.

Решение. Будем считать наш многоугольник 64-угольником, т. е. будем считать, что часть углов равна 180° (остальные, очевидно — 90° или 270°).

Очевидно, если угол в данной клетке равен 90°, то от клетки берётся её четверть; если 180° — то половина, и если 270° — то три четверти. Таким образом, площадь пропорциональна сумме углов с коэффициентом $\frac{1}{360}$.

Но сумма углов n-угольника известна и равна $180^\circ \cdot (n-2)$, причём легко видеть, что если рассматривать, как это делаем мы, также и несколько развёрнутых углов, то формула остаётся справедливой. Отсюда сразу получаем ответ.

7. Ответ. а) $g8$; б) $g1$.

Решения обоих пунктов основаны на одном и том же соображении: *маршрут имеет ориентацию*. В задаче а) ладья могла попасть на a2 только по маршруту

b1—a1—a2—b2

(иначе осталась бы не пройденной клетка a1). Это означает, что она обходила доску по часовой стрелке, откуда и следует ответ.

В задаче б), поскольку маршрут не замкнут, ладья в принципе может менять его ориентацию. Однако поскольку углы a1 и h8 ладья обходит против часовой стрелки, то и угол h1 она обязана обходить против неё, тогда как перед тем, как пройти угол a8, она изменила ориентацию пути.

8. Ответ. Выигрывают чёрные.

Решение. Если бы белая ладья вначале стояла на a1, а чёрная — на h8, то у чёрных была бы очевидная стратегия (симметрия относительно центра), позволяющая им всегда сделать ход — следовательно, у белых когда-нибудь ходы кончились бы.

Наша задача сводится к этой перенумерацией рядов доски. Дадим второй горизонтали номер 1, четвёртой — номер 8, остальные занумеруем произвольно. Аналогичным образом поступим относительно вертикалей. Теперь ладьи стоят на полях a1 и h8, следовательно, проходит ранее указанное решение.

9. Ответ. 29.

Пример строится без больших трудностей. Один из возможных маршрутов показан на рис. 8.

Для доказательства того, что больше не получится, разделим доску на 4 кольца и заштрихуем часть клеток, как показано на рис. 9.

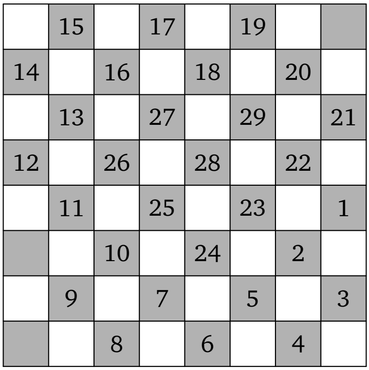


Рис. 8

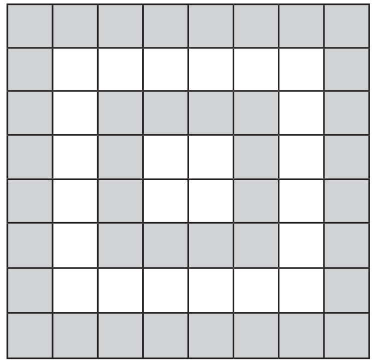


Рис. 9

При этом заштриховано 40 клеток, в том числе 20 чёрных, а не заштриховано только 24 (12 чёрных), и поскольку при каждом ходе мы переходим из одного кольца в другое, получается, что обойти можно не более 24 чёрных клеток. Что и требовалось доказать.

Позвольте! Требовалось доказать, что обойти можно не более 29 — а мы что сделали? Мы доказали слишком много, и значит, где-то ошибка. Или даже две ошибки.

Одна, достаточно стандартная ошибка состоит в том, что мы забыли: можно начать со штрихованного поля и кончить тоже на штрихованном. Это даст нам плюс единицу: 25 вместо 24. А где ещё 4 единицы?

Дело в том, что есть 4 места (но только 4!), где можно перейти со штрихованной клетки опять на штрихованную: это переходы h2-g1, a7-b8, f4-e3 и c5-d6. (Есть также 3 места, где можно перейти с нештрихованной клетки на нештрихованную, но они нам ни к чему).

Эти 4 перехода (все они реализованы в приведённом маршруте) и позволяют получить 29 обойдённых клеток вместо 25. Больше уж никак не выходит.

10. Ответ. а) Нет, б) да.

Решение. Ясно, что коней надо ставить на чёрные поля.

а) Каждый конь бьёт 8 полей, если только он не стоит вблизи края доски. Таким образом, 400 миллионов коней могло бы хватить только в том случае, если бы каждый конь бил ровно 8 полей, и все эти поля были различны. Между тем конь, который бьёт угловое поле, уже не может бить 8 разных полей.

б) С другой стороны, представим себе на минуту, что наша доска тороидальна (первая горизонталь граничит с последней, и то же для вертикалей). Тогда любой конь на доске бьёт 8 полей. Расставим коней на каждой 4-й диагонали через 1. Если нумеровать поля, как на шахматной доске (буквой и цифрой), то надо поставить коней на поля a1, c3, e5, g7, i9, …, затем на 4-ю диагональ, т. е. на поля a9, c11, e13, … и т. д. При этом на чёрных полях окажется 400 миллионов коней, никакие два из которых не бьют одно поле, так что каждое белое поле будет бито не более одного раза. Отсюда следует, что каждое поле действительно бито один раз.

Для обычной (не тороидальной) доски нужно применить точно ту же расстановку, но при этом окажется, что биты не все поля края доски (на тороидальной они биты благодаря тому, что конь с последней горизонтали бьёт поля на первой и второй, и т. п.) Следовательно, придётся расставить ещё некоторое число коней, но поскольку речь идёт только о полях двух крайних рядов (со всех четырёх сторон), да ещё только белых, то очевидно, что вполне достаточно будет $400\,000\,000 + 8 \times 40\,000$, а это значительно меньше, чем требует условие.

Геометрия

11. Решение. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$ — точки касания. Тогда

$$\angle B_1OB_2 = 180^\circ - \angle B_1A_2B_2.$$

Таким образом, нам известны все центральные углы B_iOB_{i+1}. Построим произвольную окружность, разделим её на эти углы и проведём в точках B_i касательные к окружности. Полученный 10-угольник будет подобен искомому. Остаётся построить подобный 10-угольник со стороной нужной длины.

12. *Указание.* Концы искомых векторов находятся на окружности S, равной данной, с центром O' таким, что $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{v}$. Если вектор $\boldsymbol{v}$ слишком короткий, то можно добиться того, что искомый угол будет равен 180°, если же он достаточно длинный, то максимальным будет угол между двумя касательными из точки O к окружности S.

13. Ответ. Нельзя.

В самом деле, выберем первую точку O произвольно и соединим её с вершинами квадрата A, B, C, D. Легко видеть, что если сторона квадрата равна 1, то $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}$, тогда как для выполнения условия эта сумма должна была бы равняться $\frac{4}{9}$ или $\frac{5}{9}$.

14. Решение 1. Рассмотрим плоскость P, параллельную координатной и отстоящую от неё на целое число, поэтому в ней лежат изюминки. Потребуем дополнительно, чтобы P не совпадала ни с одной из плоскостей разреза и (если они параллельны) не лежала от них на расстоянии меньше 0,1. Очевидно, такая P существует, поскольку плоскостей, параллельных координатным, бесконечно много. Тогда легко сообразить, что разрезанными в плоскости P окажутся только изюминки, лежащие в нескольких более или менее широких полосах, соответствующих пересечению нашей плоскости с плоскостями разреза. После этого остаётся решить задачу, аналогичную исходной, но уже в плоскости. Разберите её сами.

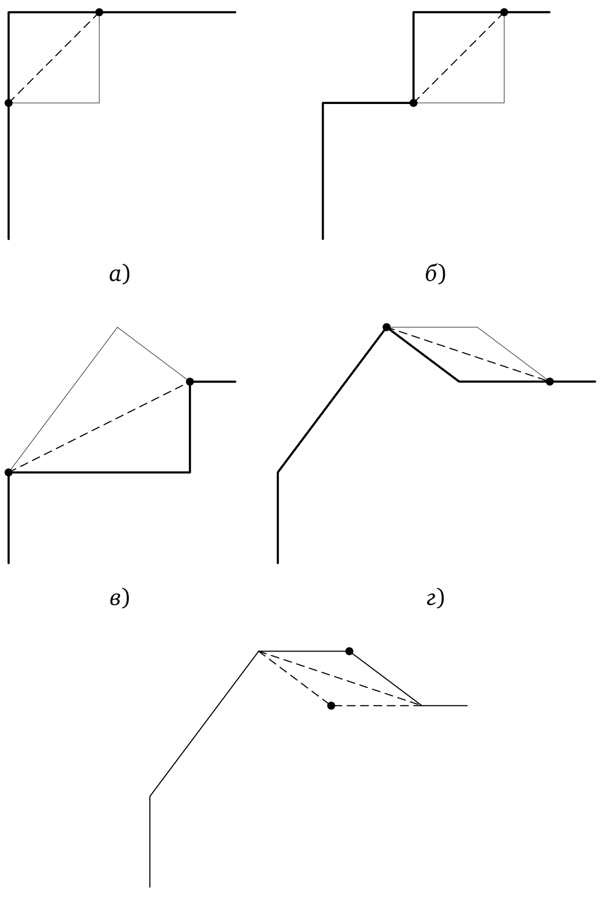
Решение 2. Рассмотрим достаточно большой куб со стороной A. Разрезанными в этом кубе окажутся изюминки, находящиеся на расстоянии меньше чем 0,1 от одной из плоскостей, т. е. внутри нескольких «листов» толщины 0,2. Объём всех этих листов не превосходит $0{,}2 \cdot N \cdot S$, где N — число плоскостей, а S — максимальная площадь пересечения плоскости с кубом. Нетрудно сообразить, что S не превосходит суммы проекций секущей плоскости на координатные, и уж не больше $3A^2$. Таким образом, при больших A суммарный объём разрезанных изюминок может расти только как A^2. Между тем суммарный объём всех изюминок в кубе растёт как A^3.

15. Ответ. Да, сможет.

На рис. 10 *а*—д показана одна из возможностей. Очевидно, фигура, возникшая после третьего отражения, по площади равна исходному квадрату, но не выпукла. Поэтому после 4-го отражения площадь исходного квадрата увеличится, что и требуется.

16. Решение. Рёбрами этих тетраэдров служат диагонали граней куба. Поэтому пересечение тетраэдров имеет на каждой грани только одну точку — её центр. Отсюда легко следует, что само пересечение является выпуклой оболочкой этих шести точек $F_1F_2\ldots F_6$, т. е. октаэдром. Его объём равен сумме объёмов двух четырёхугольных пирамид $F_1\ldots F_5$ и $F_2\ldots F_6$ (точки F_1 и F_6 лежат на противоположных гранях); основание такой пирамиды имеет площадь $\frac{1}{2}$, высота тоже равна $\frac{1}{2}$. Поэтому объём пересечения равен $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

17. Решение. а) Разрежем куб на 8 равных кубиков с ребром $\frac{1}{2}$ тремя плоскостями, параллельными граням. Тогда от каждого из этих кубиков отрезает некую часть лишь одна пирамида; стало быть, она должна делить кубик пополам, а для этого она должна



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 10

пройти через его центр. Если, например, грани исходного куба задаются уравнениями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$, то центр одного из кубиков имеет координаты $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Отсюда уже легко установить, что уравнение соответствующей плоскости имеет вид $x+y+z=\frac{3}{4}$; следовательно $a=\frac{3}{4}$.

б) Решение аналогично. Заметим, что если $n>4$, то откладывать отрезок придётся уже не на ребре, а на его продолжении.

Ответ. $a=\frac{n}{4}$.

18. Решение. Пусть a — площадь большого круга, а b — площадь сегмента, отсекаемого от него касательной из условия задачи (заметьте, что эта площадь одинакова для всех трёх сегментов). Тогда нетрудно видеть, что $S_1+S_2+S_3-S=3b-a$.

19. Решение. Пусть у начального восьмиугольника $AB=a$, $CD=b\neq a$. Пусть, например, $a>b$.

Пусть a_1, b_1 — стороны восьмиугольника $A_1B_1\ldots H_1$. Тогда числа a, b, a_1, b_1 удовлетворяют соотношениям: $a_1+\sqrt{2}b_1=a$, $b_1+\sqrt{2}a_1=b$.

Вычитая эти равенства одно из другого, мы видим, что $(\sqrt{2}-1)\times(b_1-a_1)=a-b$. Но это означает, что b_1-a_1 в два с лишним раза больше, чем $a-b$. С другой стороны, ясно, что сами числа a_1, b_1 меньше, чем числа a и b. Поэтому после нескольких операций разность b_1-a_1 станет больше, чем сами числа, что абсурдно.

Но что же это означает геометрически? На первый взгляд кажется, что нет ничего, что могло бы помешать проводить всё новые диагонали и продолжать процесс неограниченно. Ключ к разгадке — в последней фразе определения полуправильного восьмиугольника: «ни один из квадратов не лежит целиком внутри другого».

Восьмиугольник $A_1B_1\ldots H_1$, как и исходный, является пересечением двух квадратов; стороны одного из них — прямые AF, BE, DG и CH, а второго — AD, EH, CF, BG. Из наших рассуждений следует, что либо один из этих квадратов уже лежит внутри другого, либо это произойдёт с очередными квадратами после нескольких операций. В этот момент процесс и должен оборваться.

20. Решение. Чтобы задать грань, зададим плоскость, в которой эта грань лежит. Рассмотрим плоскость $x=1$. На ней лежат некоторые вершины, но легко сообразить, что, например, вершины $(2,3,1)$ и $(-1,2,3)$ лежат по разные стороны от неё: для одной $x>1$, а для другой $x<1$. Зато плоскость $x=3$ — грань. На ней лежат все вершины $(3,y,z)$, где y и z принимают значения 1, 2 с любыми знаками. Её легко нарисовать в плоскости (y,z); она представляет собой полуправильный восьмиугольник. Ещё 5 подобных граней дают 5 уравнений $x=-3$, $y=\pm3$, $z=\pm3$.

Рассуждая аналогично, мы видим, что плоскость $x+y+z=4$ — не грань, так как для некоторых точек сумма координат больше 4, а для некоторых меньше. Зато плоскость $x+y+z=6$ задаёт грань, на которой лежат точки $(1,2,3)$, причём координаты могут стоять в произвольном порядке. Отсюда ясно, что соответствующая грань — шестиугольник, притом правильный, со стороной $\sqrt{2}$. Его стороны задаются парой вершин, у которых одна координата совпадает, например, $(3, 1, 2)$ и $(2, 1, 3)$. Всего граней, ей подобных, имеется 8 (включая её саму) — например, это грань $-x-y+z=6$.

Наконец, имеется последний тип грани, примером которой служит грань $x+y=5$. Это прямоугольник; рассмотрите его самостоятельно. Всего получается $6+8+12=26$ граней.

Для того чтобы убедиться в том, что других граней нет, достаточно проверить: а) что каждая вершина лежит на трёх из числа перечисленных граней; б) что любые две грани, имеющие общую вершину, имеют и вторую общую вершину, т. е. общее ребро. Сделайте это сами.

21. Ответ. 2 000 000.

Решение. 1) Поскольку площадь шестиугольника равна 1, в квадрат попало около миллиона шестиугольников. Рассмотрим любую прямую, продолжающую одну из сторон какого-нибудь шестиугольника; легко заметить, что на такой прямой лежит 2 вершины шестиугольников, затем центр очередного шестиугольника, опять 2 вершины, центр и т. д. Отсюда следует, что вершин вдвое больше, чем центров.

2) Для того чтобы этот набросок решения превратить в корректное решение (т. е. принять во внимание, что некоторые шестиугольники лежат в квадрате лишь частично и т. п., и доказать, что возникающие из-за этого ошибки находятся в пределах разрешённых пяти процентов), следует только проследить, что именно происходит на границе квадрата.

Заметим, что сторона шестиугольника, а также расстояние от его вершины до центра (они равны между собой) меньше 1. Рассмотрим теперь наряду с данным квадратом X концентричный ему квадрат Y со стороной 994; разность двух квадратов образует «рамочку» ширины 3. Число шестиугольников, которые пересекаются (полностью или частично) с квадратом Y, не меньше, чем 994^2, их центров — столько же, и центр любого из них содержится в квадрате со стороной 996. Зафиксируем теперь направление одного из рёбер; мы видим, что и 2 вершины, следующие по этому направлению за центром шестиугольника, также лежат внутри квадрата X; следовательно, вершин в квадрате X во всяком случае не меньше, чем $2\cdot 994^2$. Эта оценка укладывается в допустимые 5 %. Чтобы получить оценку сверху, надо окружить квадрат X такой же рамочкой ширины 3 и убедиться, что число вершин в данном квадрате меньше, чем $2\cdot 1006^2$.

Вопрос к читателю. Действительно ли ошибку нельзя оценить точнее, чем пятью процентами? Попытайтесь получить оценку получше.

22. Ответ. Такого S не существует (например, если одна фигура круглая, а другая длинная).

23. *Указание.* Если отразить A относительно любой из этих прямых, то отражённая точка попадёт на прямую BC.

24. Решение. Предположим для начала, что вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ обладает следующим свойством: не менее семи других векторов $\overrightarrow{A_iB_i}$ таковы, что $A_1B_i < 0{,}3$. Но тогда легко убедиться, что именно эти 7 (или более) векторов удовлетворяют условию задачи, так как

$$A_iB_j \geqslant A_iB_i - B_iA_1 - B_jA_1 \geqslant 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Аналогично разбирается случай, когда существует семь или более таких векторов $\overrightarrow{A_iB_i}$, что $A_iB_1 < 0{,}3$.

Теперь предположим, что и то и другое неверно, и начнём подбирать нужную семёрку. В качестве первого вектора возьмём $\overrightarrow{A_1B_1}$. Из оставшихся 79 придётся выбросить, как не соответствующие условиям, не более 12 векторов (шесть и шесть, как выше). В качестве второго возьмём любой из оставшихся; в отношении двух выбранных векторов условие задачи выполняется, а выбросить, как и на первом шаге, придётся не более 12 векторов. После 6 шагов будет взято 6 векторов и выброшено не более 72, поэтому останется ещё по крайней мере два вектора, любой из которых можно взять в качестве седьмого искомого.

25. Решение. Пусть A — ближайшая к плоскости вершина куба. Допустим сначала, что она лежит на плоскости. Пусть e, f, g — это расстояния от плоскости до трёх вершин, находящихся с A на одном ребре (или, иными словами, это проекции рёбер куба на нормаль к плоскости). Тогда легко видеть, что остальные расстояния равны $e+f$, $e+g$, $f+g$ и $e+f+g$, причём последнее расстояние наибольшее; примем его за h. Тогда

$$0 + (e+f) + (e+g) + (f+g) = e + f + g + (e+f+g),$$

т. е. справедлива формула а). Далее, элементарная выкладка показывает, что

$$e^2 + f^2 + g^2 + (e+f+g)^2 = (e+f)^2 + (e+g)^2 + (f+g)^2,$$
$$e^3 + f^3 + g^3 + (e+f+g)^3 = (e+f)^3 + (e+g)^3 + (f+g)^3 + 6efg.$$

Обозначим через Q_1, Q_2 левую и правую части первых двух равенств (суммы первых и вторых степеней). Заметим ещё, что сумма нулевых степеней расстояний для обеих частей равна 4; положим поэтому $Q_0=4$. Пусть теперь вершина A лежит от плоскости на расстоянии x, и пусть e, f, g — как выше, проекции рёбер куба на нормаль к плоскости; тогда расстояния от вершин до плоскости равны $x+e$, $x+f$, $x+e+f$ и т. д.

Теперь нетрудно видеть, что суммы первых, вторых и третьих степеней как в правой, так и в левой части представляют собой многочлены от x степени 1, 2, 3 соответственно, а именно:

$$P_1(x) = Q_0x + Q_1;$$
$$P_2(x) = Q_0x^2 + 2Q_1x + Q_2;$$
$$P_3(x) = Q_0x^3 + 3Q_1x^2 + 3Q_2x + R;$$

где R — сумма кубов (одна или другая). Отсюда видно, что суммы первых и вторых степеней равны, а разность сумм кубов не зависит от x и равна $6efg$.

26. Ответ. Коля назвал угол C (ни при каких m, n нельзя доказать, что наименьший — угол A или угол B). Точка N на плоскости (m, n) лежит внутри невыпуклого четырёхугольника $PQRS$ с вершинами $P(0, 0)$, $Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $R\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $S\left(0, \frac{1}{2}\right)$ или на его границе. Точка M, соответственно, лежит вне $PQRS$.

Пример. Пусть $N=R$, т. е. стороны треугольника удовлетворяют равенству $3AB=AC+BC$. Тогда без труда доказывается, что сторона AB — наименьшая.

Решение. Примем, что сторона AB имеет длину 1, и пусть x, y — длины сторон AC и BC. Тогда точка $W(x, y)$ задаёт нам треугольник. Однако годится не любая точка W; в силу неравенств треугольника её координаты должны удовлетворять неравенствам $x+y>1$, $x+1>y$, $x-1<y$. Геометрически это означает, что точка W лежит внутри бесконечного треугольника T, показанного на рис. 11. Области I, II, III, на которые разбит T, — это части, в которых наименьшей из сторон является соответственно AB, AC, BC.

Согласно условию стороны x, y удовлетворяют линейному уравнению $mx+ny=1$. Для того чтобы из этого уравнения можно было установить, какая сторона (или, соответственно, какой угол) является наименьшей, требуется, чтобы вся та часть прямой, которая

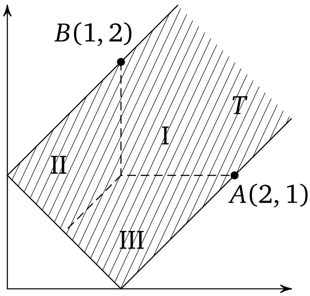


Рис. 11

лежит внутри T, лежала внутри одной из областей I, II, III. Из чертежа сразу видно, что если прямая пересекает первый квадрант (т. е. $m > 0$, $n > 0$), то это возможно лишь для области I и задача, заданная Коле, разрешима в том случае, если точки $A(2, 1)$ и $B(1, 2)$ лежат под прямой. Это означает, что числа m, n удовлетворяют неравенствам $2m + n < 1$, $m + 2n < 1$, которые в совокупности с неравенствами $m > 0$, $n > 0$ задают четырёхугольник $PQRS$.

27. Решение. Задача в предложенной формулировке, строго говоря, решения не имеет, так как ни максимум, ни минимум не достигаются.

В самом деле, легко сообразить, что периметр больше $2a$ (ломаные ABC и ADC длиннее отрезка AC), но меньше $2(a+b)$. Рисунок 12 показывает, как можно неограниченно приблизиться к тому и другому пределу, но достичь их, очевидно, невозможно.

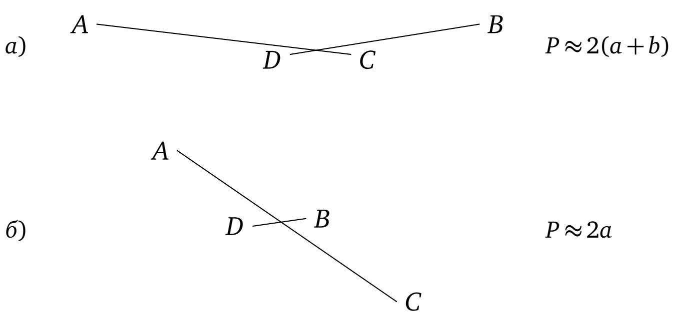


Рис. 12

Замечание. На XXV Турнире городов (2004) задача была дана в следующей формулировке.

Периметр выпуклого четырёхугольника равен 2004, одна из диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна 1? Равна 2? Равна 1001?

С учётом сказанного выше ясно, что ответы на эту задачу: нет; да; да.

28. Ответ. Обязательно.

Решение. Мы предполагаем, что семиугольник выпуклый. Достаточно доказать, что $A_1A_2 = A_2A_3$. Тогда из симметрии условия получим, что все стороны семиугольника равны.

Заметим, что по признаку равенства треугольников (по трём сторонам) треугольники $A_6A_1A_3$, $A_7A_2A_4$, $A_1A_3A_5$, …, $A_5A_6A_2$ равны, кроме того, все эти треугольники равнобедренные. Пусть углы при основаниях этих равнобедренных треугольников равны α, а углы при вершинах, противолежащих основаниям, равны β.

Заметим, что

$$\angle A_2A_4A_1 = \angle A_2A_4A_6 - \angle A_1A_4A_6 = \beta - \alpha = \\ = \angle A_3A_5A_7 - \angle A_2A_5A_7 = \angle A_3A_5A_2,$$

откуда треугольники $A_2A_4A_1$ и $A_3A_5A_2$ равны (по двум сторонам и углу между ними). Это значит, что

$$A_1A_2 = A_2A_3.$$

29. Решение. Чтобы построить пример, требуемый в задаче б), можно обойтись пятиугольником (см. рис. 13 *а*).

Пример для задачи в) — семиугольник (см. рис. 13 *б*).

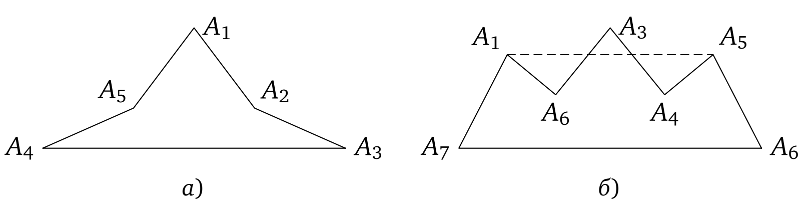


Рис. 13

Докажем теперь, что из одной из соседних вершин A_1, A_2 можно провести диагональ. Для этого рассмотрим два случая: $\angle A_1 > 180°$ и $\angle A_2 < 180°$.

В первом случае продолжение стороны A_2A_1 лежит (поначалу) внутри многоугольника; продолжим её за точку A_1 до пересечения с контуром многоугольника. Если точкой пересечения является вершина, то нужная диагональ уже построена, в противном случае точка пересечения F лежит на некоторой стороне A_mA_{m+1}. Будем сдвигать точку F вдоль стороны A_mA_{m+1} в сторону A_{m+1}. Тогда либо она сдвинется до точки A_{m+1} (и в этом случае A_1A_{m+1} — искомая диагональ), либо этому помешает некоторая вершина многоугольника A_k, которая встанет на пути. В этом случае искомая диагональ — A_1A_k.

Если же $\angle A_1 < 180^\circ$, то рассмотрим соседние с A_1 вершины A_2 и A_n. Либо A_2A_n — искомая диагональ, либо внутри треугольника $A_1A_2A_n$ лежит часть контура, и в том числе некоторые вершины. Выберем из них вершину A_i, ближайшую к A_1, тогда диагональ A_1A_i — искомая.

30. Решение. Так как площадь треугольника ABC не зависит от выбора точки C, а с другой стороны, равна $\frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C$, следовательно, точку C надо выбрать так, чтобы $\sin\angle C$ был максимален.

Построим на AB как на диаметре окружность (рис. 14). Если эта окружность пересекается с прямой, то искомых точек две, и это — точки пересечения (угол C прямой). Если окружность касается прямой, то искомая точка — точка касания.

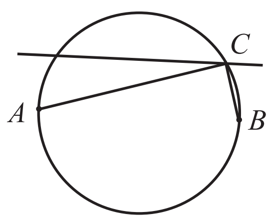


Рис. 14

Если же она не пересекается с прямой, то синус будет максимальным для максимального угла ACB (синус растёт вместе с углом). Этот угол максимален для равнобедренного треугольника: $AC = BC$. В самом деле, через A и B можно провести окружность, касающуюся прямой в точке C. Для любого другого треугольника ABE точка E лежит вне этой окружности, соответственно, $\angle AEB < \angle ACB$.

31. Решение. Построим произвольный такой четырёхугольник, а затем отразим точку D относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC. Мы получим четырёхугольник $ABCD'$, у которого длины сторон те же, но теперь стороны идут в другом порядке:

$$AB = 3, \quad BC = 4, \quad CD' = 5 \quad \text{и} \quad D'A = 6.$$

Очевидно, площадь от такой операции не изменилась.

Теперь разрежем четырёхугольник $ABCD'$ по диагонали BD' на два треугольника. Тогда очевидно, что их площади не превосходят $\frac{BC \cdot CD'}{2} = 10$ и $\frac{BA \cdot AD'}{2} = 9$. Таким образом, площадь четырёхугольника не превышает 19, причём равенство было бы возможно только в случае, если бы оба угла C и A были прямые. Но это, как легко видеть, невозможно (диагональ BD не может одновременно служить гипотенузой треугольников ABD' и CBD'). Поэтому неравенство $S_{ABCD} = S_{ABCD'} < 10 + 9 = 19$ является строгим.

Замечание 1. Поскольку разница между суммами квадратов $BC^2 + CD^2$ и $DA^2 + AB^2$ невелика, максимальное значение меньше 19, но весьма близко к нему. На самом деле достигается значение 18,973…, т. е. ошибка меньше 0,03, или 0,15%.

Замечание 2. Площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c, d максимальна, если он вписанный (т. е. если $\angle A + \angle C = \pi$).

32. Ответ. а) Нет; б), в) да.

В случае в) достаточно разрезать квадрат на три равных прямоугольника размером $1 \times \frac{1}{3}$.

В случае б) резать нужно аккуратнее. Отрежем от квадрата полосу ширины $\frac{1}{8}$, а оставшийся прямоугольник $1 \times \frac{7}{8}$ разделим на два прямоугольника $\frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ (рис. 15). Квадрат диаметра каждого из трёх равен $\frac{65}{64}$, и диаметр $d = 1{,}0078 < 1{,}01$.

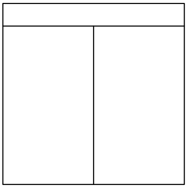


Рис. 15

Замечание. Оценка $d = d_0 = \sqrt{\frac{65}{64}}$ является точной. Докажите это сами.

33. Ответ. а) Не может; б) может.

а) Для того, чтобы все углы были меньше 70°, требуется непременно разрезать угол α. После этого появится угол, который не больше 35°. Ясно, что в дальнейшем он никуда не исчезнет (если его разрезать, он станет только меньше). Но если в треугольнике

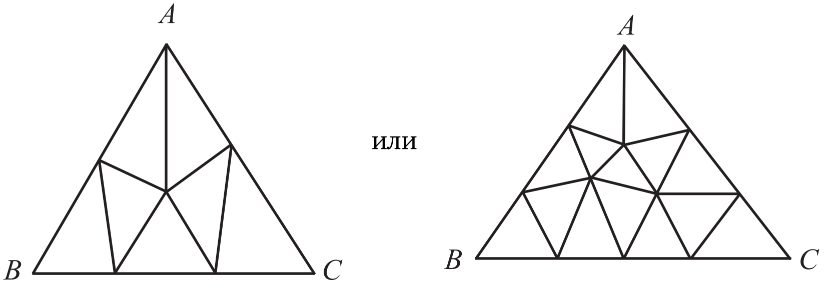


Рис. 16

один угол не превышает 35°, то один из двух других не меньше, чем $\frac{180^\circ - 35^\circ}{2} > 70^\circ$.

б) Предположим, что треугольник равнобедренный, т. е. в нём один угол (пусть это угол A) равен 80°, и два угла B, C — по 50°. Проведя биссектрису угла A, мы получаем два угла по 40°. Далее можно нарисовать картинку, в которой все углы не превосходят 75° (рис. 16).

34. Решение. а) Объёмы куба и октаэдра, вписанных в шар радиуса R, нетрудно найти непосредственно. Мы, однако, пойдём другим путём, который имеет то важное преимущество, что он годится также и для задачи б).

Во всех указанных случаях вписанное тело можно разбить на пирамиды с общим центром в центре сферы. Для этого нужно соединить центр шара со всеми вершинами данного тела, и получится разбиение: куба — на шесть четырёхугольных пирамид, октаэдра — на восемь треугольных, додекаэдра — на 12 пятиугольных и икосаэдра — на 20 треугольных.

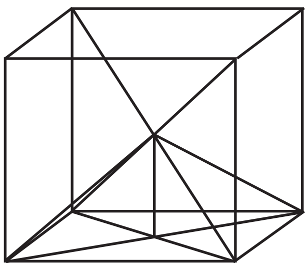


Рис. 17

Итак, разобьём куб на эти 6 пирамид, а затем каждую из пирамид дополнительно разобьём на 4 неправильные треугольные пирамиды. Для этого нужно ещё из центра шара опустить перпендикуляр на соответствующую грань куба, и соединить полученную точку с вершинами грани (рис. 17).

Таким образом, мы получили 24 одинаковых треугольных пирамиды. У такой пирамиды есть 3 попарно перпендикулярных рёбра, откуда легко следует, что объём пирамиды равен $\frac{1}{6}$ произведения этих рёбер, т. е. $V = \frac{H(R^2 - H^2)}{6}$. Соответственно, объём куба в 24 раза больше.

Точно так же мы можем разбить октаэдр на 24 неправильных треугольных пирамиды (8 граней, и на каждой 3 пирамиды), для которых верно почти всё сказанное, за одним важным исключением. Из трёх рёбер этой пирамиды одно (высота) по-прежнему перпендикулярно двум другим, но два ребра основания образуют уже не прямой угол, а угол 120°; соответственно, объём равен произведению трёх рёбер на синус этого угла, или

$$V = \frac{H(R^2 - H^2)}{6} \cdot \sin 120^\circ.$$

По условию задачи, радиус R, входящий в эти две формулы, для куба и октаэдра один и тот же. Но теперь заметим (это — важнейший момент рассуждения!), что и высота H в этих двух формулах одна и та же.

В самом деле, как известно, центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра, тогда как центры граней этого октаэдра вновь являются вершинами куба, который получается из исходного гомотетией. Отсюда видно, что угол φ между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OG}$ (O — центр шара, G — центр одной из граней тела, A — одна из вершин этой грани) для куба и октаэдра один и тот же: фактически, векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OG}$ для куба и октаэдра одни и те же, только они меняются ролями и, соответственно, имеют разные длины. Но это и означает, что высоты $H = R \cdot \sin\varphi$ для куба и октаэдра равны.

Соответственно, отношение объёмов куба и октаэдра равно

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155.$$

Конечно, этот ответ нетрудно получить и прямым вычислением объёмов обоих тел (сделайте это!).

б) Теперь для решения задачи б) остаётся заметить, что все проведённые рассуждения проходят также для додекаэдра и икосаэдра. В частности, оба они разбиваются на одинаковое число треугольных пирамид (только на этот раз их не 24, а $60 = 12 \cdot 5 = 20 \cdot 3$), и опущенные на грани перпендикуляры также равны по длине.

Что же касается угла при основании, то он равен $\frac{2 \cdot 180^\circ}{k}$, где k — число сторон одной грани пирамиды. Таким образом, для икосаэдра, как и для октаэдра, он равен 120° (впрочем, это отнюдь не значит, что их объёмы равны: число пирамид различно, да и высоты у них разные), а для додекаэдра 72°.

Отсюда следует, что отношение объёмов додекаэдра и икосаэдра равно $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 120^\circ} \approx \frac{0{,}951}{0{,}866} \approx 1{,}1$.

35. Лемма 1. *Число частей равно* $1 + a + b + c$, *где* a, b, c — *соответственно число горизонтальных линий, пересекающих данный квадрат, вертикальных линий и узлов сетки.*

Доказательство проще всего провести, сначала стерев все линии на верхнем листке (тогда остаётся одна часть), а затем восстанавливая их одну за другой. Каждый раз, когда мы проводим новую линию или когда линия пересекает одну из уже восстановленных (т. е. появляется узел) — возникает ещё одна часть.

Лемма 2. *В квадрате со стороной* 1 *нельзя поместить треугольник, у которого и основание и высота, на него опущенная, не меньше* 1 *и не параллельны сторонам квадрата.*

Доказательство легко следует из того, вполне элементарного, факта, что в квадрат со стороной 1 не может поместиться треугольник площади больше $\frac{1}{2}$, причём равенство возможно только если основание треугольника совпадает со стороной квадрата.

Ответ. Число частей не меньше 4 и не больше 6.

Примеры для 4, 5 и 6 частей легко нарисовать (рис. 18).

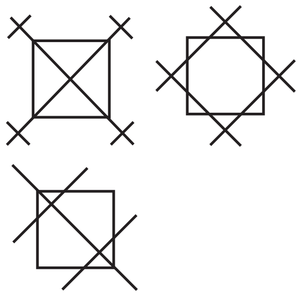


Рис. 18

Для того, чтобы доказать, что частей не может быть меньше или больше, выясним, чему могут быть равны числа a, b, c. Поскольку «ширина» наклонно лежащего квадрата в горизонтальном или вертикальном направлении больше 1, но заведомо меньше 2, ясно, что первые два числа не могут быть меньше 1 или больше 2. Легко также убедиться в том, что c не может быть больше 2, тогда как значения 0, 1 или 2 допустимы — это видно из приведённых рисунков.

Допустим, что частей всего 3; из сказанного следует, что это возможно только в случае $a = b = 1$, $c = 0$. Но тогда наш квадрат целиком помещается в трёх квадратах, именно так, как показано на рис. 19, и мы видим, что эта картинка противоречит лемме 2.

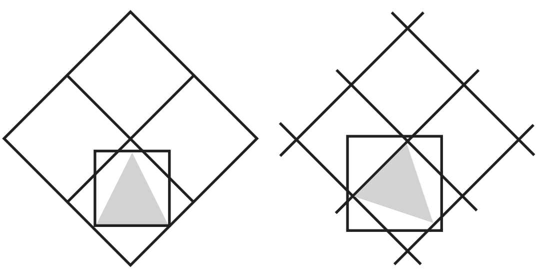


Рис. 19

Случай семи частей, как ни странно, аналогичен в том смысле, что сводится к той же лемме (рис. 19).

36. Попытаемся приближённо вычислить число частей. Для этого будем считать, что верхний прямоугольник не положен на нижний, а нарисован на нём. Сотрём теперь все его линии и будем их восстанавливать одну за другой. Мы будем считать, что верхний прямоугольник — тот, число частей в котором надо оценить — расположен параллельно осям (его линии вертикальны и горизонтальны), а линии нижнего, по всей вероятности, наклонны.

Итак, вначале мы рисуем только верхний прямоугольник размером 1000×2000 без внутренних линий. В данный момент части, на которые он разделён, — это квадратики нижнего листка, а на границе — части квадратиков. Поскольку почти все части имеют площадь 1, ясно, что число частей немного больше, чем 2 миллиона.

Теперь будем проводить одну за другой линии верхнего прямоугольника, сначала горизонтальные, потом вертикальные. Каждая линия даёт столько новых частей, на сколько частей она разбивается точками пересечения. Имеется около двух миллионов точек пересечения горизонталей с вертикалями, и кроме того, надо сосчитать, сколько есть точек пересечения новых линий, которые мы рисуем, с линиями нижней сетки.

Пусть наименьший угол между линиями верхней и линиями нижней решёток равен α. Каждая верхняя линия имеет длину 1000 или 2000. Рассмотрим, например, линии длины 1000. Число пересечений такой линии с линиями нижней приближённо равно $1000 \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)$. Эта величина максимальна, если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и в этом случае она составляет $1000 \cdot \sqrt{2}$. Случай линий длины 2000 полностью аналогичен, и легко убедиться, что число частей приближённо равно $2 \cdot 10^6 \cdot (2 + 2\sqrt{2}) \approx 2 \cdot 4{,}83 \cdot 10^6$.

Остаётся проверить, что эффекты, связанные с границей прямоугольника, незначительны, так что коэффициент при миллионе остаётся меньше 10.

37. Решение. Проведём все диагонали 17-угольника; они разбивают его на несколько многоугольников. Очевидно, что в каждом из этих многоугольников кратность постоянна, или, иными словами, если двигать точку внутри такого многоугольника (т. е. не пересекая ни одной диагонали), то кратность точки не меняется.

Нам будет удобно также учесть ещё всю бесконечную область вне 17-угольника, как ещё одну часть; эта часть не покрыта, и потому кратность её точек, разумеется, надо считать нулевой.

Теперь выберем для начала точку C вне 17-угольника, и начнём её двигать к центру. Двигать мы будем не обязательно по прямой, но так, чтобы, во-первых, не проходить через вершины 17-угольника или точки пересечения диагоналей, а во-вторых, так, чтобы всё время продвигаться ближе к центру (иначе говоря — угол между направлением к центру и направлением движения всё время остаётся острым). Ясно, что можно, например, построить соответствующий маршрут в виде ломаной из двух звеньев.

Мы утверждаем, что при таком движении кратность точки всё время возрастает. В самом деле, при пересечении одной из сторон многоугольника она из нулевой становится ненулевой, а при пересечении одной из диагоналей — мы «теряем» или «приобретаем» все треугольники, для которых эта диагональ является одной из сторон. Очевидно, таких треугольников имеется 15, причём мы теряем те, у которых третья вершина лежит по одну сторону, и приобретаем те, у которых третья вершина лежит по другую. Очевидно и то, что когда мы приближаемся к центру, то вторых больше, чем первых.

Отсюда следует, что наименьшую кратность (она, очевидно, равна 15) имеют точки, близко прилегающие к одной из сторон, а наивысшую — центр. Найдите эту кратность сами.

38. Ответ. Это прямой угол.

Доказательство. Пусть O является точкой пересечения диагоналей, $\angle AOB = \alpha$. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\alpha + OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos\alpha$$

и аналогичная формула для $BC^2 + AD^2$, но произведения идут с противоположным знаком.

Поэтому, зная соотношение между $AB^2 + CD^2$ и $BC^2 + AD^2$, можно сказать, будет ли угол острым (это будет тогда и только тогда, когда первая сумма меньше второй), тупым или прямым. В данном случае

$$AB^2 + CD^2 = 100 + 121 = 221 = BC^2 + AD^2,$$

поэтому угол обязан быть прямым.

Стоит заметить, что отсюда следует более общий факт: допустим, что даны 4 стороны 4-угольника. Этого, разумеется, недостаточно, чтобы определить его форму: 4-угольник с данными сторонами «нежесткий», например, если это квадрат, то его можно деформировать в ромб. Однако при такой деформации сохраняется одно свойство угла между диагоналями: если он был острым, то он и останется острым (хотя может изменить своё значение), если был тупым — останется тупым, и что самое главное — если был прямым, то таким он и останется.

Условие же того, что угол между диагоналями прямой, таково: **суммы квадратов противоположных сторон равны.**

39. Ответ. 65 прямых.

Доказательство. При переходе с одного звена на другое мы должны перейти с одной прямой на другую. Отсюда следует, что все вершины ломаной, кроме, может быть, первой и последней — точки пересечения данных прямых (мы будем называть их *узлами*), и, соответственно, все звенья, кроме первого и последнего — отрезки, начинающиеся и кончающиеся в этих узлах.

Допустим, что прямых не более n. Тогда на каждой прямой не более $(n-1)$ узлов, и потому не более $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ звеньев (не считая первого и последнего). Таким образом, всего звеньев не более чем $2+n\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Для $n=64$ это даёт только 1986 звеньев, т. е. меньше, чем требуется.

Пусть теперь даны 65 прямых общего положения, т. е. никакие две не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. На каждой из них имеется 64 узла. Проведём звенья ломаной, соединив на каждой прямой первый по порядку узел со вторым, третий с четвёртым, и т. д.; на каждой прямой получилось 32 звена, а всего их $65\cdot 32=2080$. При этом каждый узел является концом двух звеньев, а это значит, что получилась замкнутая ломаная.

Однако остаётся ещё одна проблема. Хотя мы получили вроде бы нужную ломаную (лишние звенья, разумеется, не помеха, их можно отбросить), но нет никакой гарантии, и даже никаких оснований думать, что она *связна*. По всей вероятности, она состоит из нескольких кусков.

Тем не менее теперь уже легко завершить решение. Выберем конкретные 65 прямых следующим образом: возьмём правильный 65-угольник и проведём в нём 65 самых длинных диагоналей (через 32 вершины на 33-ю); пусть это будут данные прямые. Очевидно, все точки пересечения лежат на диагоналях, т. е. внутри многоугольника.

Проведём изложенную выше конструкцию. Легко сообразить, что мы получили 16 замкнутых ломаных, каждая из которых представляет собой 130-угольную невыпуклую звезду или, если угодно, «зубчатое колесо», и эти колёса концентрически лежат одно внутри другого.

Осталось сообразить, как перестроить эту конструкцию, чтобы «связать» эти 16 ломаных, не выходя за пределы наших 65-ти прямых.

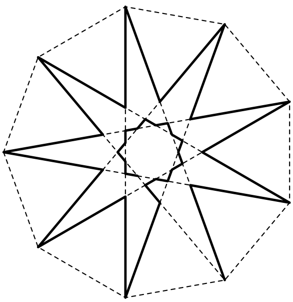


Рис. 20

Сделать это нетрудно: на рис. 20 показано, как это делается в случае 9-угольника. В результате число звеньев немного уменьшится (так, ломаная на рисунке имеет 35, а не 36 звеньев), но так как у нас имеется 71 «лишнее» звено, то никаких трудностей здесь возникнуть не может.

Но теперь поставим дополнительную задачу, решение которой неизвестно.

Пусть дано $2n+1$ прямых «общего положения». На каждой из этих прямых есть $2n$ точек пересечения с другими (тройных точек пересечения, по предположению, нет), которые высекают на ней два луча $2n-1$ отрезков.

Отметим на каждой прямой все нечётные отрезки, как выше. Получится замкнутая ломаная из $n(2n+1)$ звеньев, которая, однако, совсем не обязана быть связной.

Вопрос: из скольких кусков она состоит или может состоять?

Число кусков может зависеть (и, вероятней всего, действительно зависит) от расположения прямых — т. е. ответ, по всей вероятности, не единственный. Интересно было бы хотя бы получить оценки сверху и снизу: «число кусков не больше того-то, но не меньше того-то».

40. Ответ. а) $0<h\leqslant 1$; б) $\frac{3}{2}<m<\frac{5}{2}$; в) $0<b<\frac{8}{5}$.

Решение. В задаче а) достаточно заметить, что высота, во всяком случае, не больше боковой стороны, но может ей равняться, если треугольник прямоугольный.

б) Построим сторону AC. Точка B лежит на окружности ω радиуса 1 с центром в A. Основание медианы должно лежать на пересечении двух окружностей: окружности неизвестного нам радиуса m с центром в A и окружности, гомотетичной ω с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$ и с центром гомотетии в C. Соответственно, число m должно быть таким, чтобы эти окружности пересекались, и тогда треугольник можно построить.

Легко убедиться, что если $m>\frac{5}{2}$, то первая окружность целиком содержит вторую, а если $m<\frac{3}{2}$, то напротив, она лежит целиком внутри. Случаи равенства означают, что окружности касаются друг друга, но тогда треугольник, который мы пытаемся построить, будет вырожденным (все три точки A, B, C — на одной прямой).

Решение задачи в) совершенно аналогично, с той разницей, что если основание медианы делит основание BC пополам, то основание биссектрисы делит его в отношении $1:4$.

41. Анализ задачи. Сформулируем вопрос по-другому. Пусть имеется n кругов одного и того же радиуса r, и расстояние между центрами любых двух кругов не меньше d. При этом предполагается, что n задано, а мы будем искать соотношение между r и d.

Вопрос: *какому неравенству должны удовлетворять числа r и d, чтобы можно было утверждать, что при любом расположении кругов можно один из них отделить от других*?

Решение этой задачи. Предположим сначала, что центры кругов расположены в вершинах правильного n-угольника со стороной d. Пусть A, B, C — три последовательные вершины (рис. 21); из соображений симметрии можно, не ограничивая общности, считать, что круг, которую нужно отделить — это круг с центром B. Прямая, отделяющая этот круг, конечно, обязана пересекать стороны AB и BC.

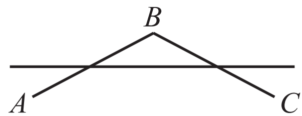


Рис. 21

Пусть X и Y — середины этих сторон AB и BC. Очевидно, если радиус круга не превосходит длины высоты треугольника BXY, т. е.

$$r \leqslant \frac{d}{2} \sin \frac{\pi}{n},$$

то прямая XY не пересекает круг и, следовательно, отделяет его от всех прочих (круги с вершинами в A и C она не пересекает по соображениям симметрии, а остальные круги — тем более не пересекает).

С другой стороны, пусть $r > \frac{d}{2} \sin \frac{\pi}{n}$. Тогда легко видеть, что любая касательная к кругу с центром в B лежит ближе либо к точке A, либо к точке C, т. е. непременно пересекает хотя бы один круг. Это и значит, что мы нашли соотношение между r и d для случая правильного многоугольника.

Пусть теперь центры кругов расположены произвольным образом; рассмотрим их выпуклую оболочку. Это многоугольник, число вершин которого не больше n, и потому хотя бы один из его углов не меньше $\pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Пусть B — вершина этого угла, A, C — соседние с ней. Тогда все остальные вершины лежат вне криволинейного треугольника, образованного лучами BA, BC и дугой радиуса 10 (см. рис. 22), откуда следует, что если $r \leqslant \frac{d}{2} \sin \frac{\pi}{n}$, то круг с центром B отделить можно.

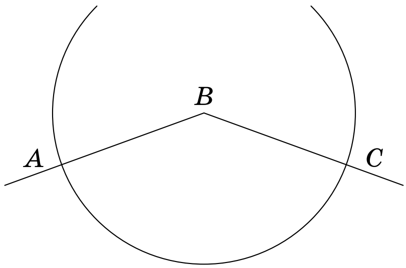


Рис. 22

Теперь решим нашу задачу 40. По условию, $d=10$, $r=1$. Соответственно, требуется, чтобы выполнялось неравенство $\sin\frac{\pi}{n}\geqslant\frac{1}{5}$.

Калькулятор (или таблицы) показывают, что $\sin 12^\circ = 0{,}2079\ldots > > \frac{1}{5}$. Это означает, что при 15 кругах всё ещё всегда можно отделить один круг, тогда как 16 кругов уже можно расположить так, чтобы они были «неотделимы» — например, если центры кругов расположены в вершинах правильного 16-угольника.

Соответственно, при 12 кругах прямая, отделяющая один из них, всегда существует, а при 120 кругах она может не существовать.

42. Ответ на задачу (в): ни одной. Существуют многогранники, которые могут стоять только на вершинах. Пример: тренога фотографа. Другой пример: возьмём, например, икосаэдр и на каждой из его граней построим треугольную пирамиду; получится «колючая звезда», которую тоже невозможно просто-напросто поставить на какую-то грань (вопрос о том, устоит ли она, уже не существует). Несложно также привести пример многогранника, который можно поставить на некоторые грани — но при этом устоять ни на одной из них он не сможет.

Ответ на задачу б): одна грань. Пример такого рода как раз и даёт «ванька-встанька». Для этого достаточно, чтобы центр тяжести располагался вблизи одной из граней.

Меньше единицы ответ быть не может как из физических соображений, так и из математических.

С точки зрения физики: допустим, что многогранник не может стоять ни на одной из своих граней, т. е. на какую его ни поставь — он будет перекатываться на другую. Тогда можно утилизировать энергию, выделяющуюся при перекатывании, т. е. создать вечный двигатель.

Математическое доказательство таково. Опустим перпендикуляры из центра тяжести O на все грани. Если перпендикуляр OA попадает не на грань (а только в её плоскость, за гранью), то он пересекает другую грань в некоторой точке B, откуда немедленно следует, что $OA > OB > OC$, где C — основание перпендикуляра к этой грани, следовательно, перпендикуляр OA — не самый короткий.

Отсюда следует, что самый короткий перпендикуляр неизбежно падает на грань.

Случай а) намного сложнее. Нетрудно привести пример, когда таких грани две (простейший такой пример — усечённая пирамида), а вот может ли быть одна?

Этот вопрос гораздо сложнее. Оказывается, ответ положительный: **можно построить выпуклый однородный многогранник, способный стоять только на одной грани**. Удалось даже придумать пример всего лишь с 14-ю гранями. Подробнее об этом см. `https://www.youtube.com/watch?v=9_EK4ki2_Yk`, а также `https://en.wikipedia.org/wiki/Monostatic_polytope`

43. Решения. а) Один из способов состоит в том, чтобы покрыть квадрат одним кругом радиуса $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, затем немного уменьшить этот радиус. Останется 4 не покрытых уголка, которые можно покрыть четырьмя маленькими кругами.

Другой способ приведён ниже.

б) Начнём с задачи б3), как наиболее простой из трёх. Ответ в этой задаче: $\alpha = 1$. Иными словами, квадрат можно покрыть несколькими кругами, если разрешается, чтобы их суммарная площадь равнялась $1 + \varepsilon$, как бы мало ни было ε.

Очевидно, достаточно доказать следующую лемму:

Лемма. *Если можно покрыть квадрат площади* 1 *кругами суммарной площади* $1 + \varepsilon$, *то существует также способ по крыть его кругами суммарной площади* $1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

Для этого сначала заметим, что если единичный квадрат можно покрыть кругами суммарной площади меньше $1 + \varepsilon$, то любую фигуру площади S можно покрыть кругами суммарной площади меньше $S \cdot (1 + \varepsilon)$.

Для **доказательства** этого вспомогательного утверждения достаточно заметить, что любую фигуру можно «почти точно» покрыть сеткой из мелких квадратиков. Покрыв каждый квадрат нужным образом, мы получим покрытие произвольной фигуры.

Теперь докажем лемму. Для этого мы впишем в единичный квадрат круг, а затем оставшуюся фигуру (её площадь равна $S = 1 - \frac{\pi}{4}$) покроем мелкими квадратиками, с тем, чтобы покрыть её кругами суммарной площади меньше $S \cdot (1 + \varepsilon)$.

Этого достаточно для доказательства леммы, а с тем доказано и утверждение задачи.

Перейдём к задаче б1).

Очевидно, единичный квадрат можно покрыть сеткой из правильных шестиугольников, и затем каждый шестиугольник покрыть кругом. Отношение площади круга к площади шестиугольника равно $\gamma = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Поскольку площадь сетки немного больше площади квадрата, то суммарная площадь кругов (обозначим её β) будет больше γ, но разность $\beta - \gamma$ можно сделать сколь угодно малой, взяв достаточно малые шестиугольники.

Докажем теперь, что приведённая конструкция оптимальна, т. е. $\alpha = \gamma$.

Лемма. *Пусть даны N кругов одинакового радиуса (можно считать, что радиус равен 1), и в каждый вписан многоугольник, содержащий центр круга, причём количество углов всех многоугольников не превышает $6N$. Тогда суммарная площадь многоугольников не превышает суммарной площади вписанных в те же круги правильных 6-угольников.*

Для **доказательства леммы** соединим каждую вершину многоугольника с центром O соответствующего круга; тем самым многоугольник разбит на треугольники. Удвоенная площадь треугольника не больше $\sin\alpha$, где α — угол при вершине O; при этом сумма всех таких углов равна $2\pi N$, а их количество равно $n \leqslant 6N$. Таким образом, требуется оценить сверху выражение $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n$ при условии $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2\pi N$. Можно считать, что $n = 6N$ (если это не так, добавим несколько нулевых углов). Теперь можно, например, воспользоваться тем, что график функции $\sin x$ — выпуклый, и потому максимум достигается, если все слагаемые равны между собой; в этом случае все углы будут по $\frac{\pi}{3}$, поэтому у нас и получится сумма площадей правильных шестиугольников.

Вернёмся к нашей задаче, причём будем решать её для произвольного многоугольника T площади 1 с углами, не превосходящими $\frac{2\pi}{3}$. Пусть T покрыт несколькими кругами одного радиуса ε. Тогда T можно разбить на многоугольники по следующему принципу: берём точки, для которых данный центр круга — ближайший (рис. 23). Поскольку круги одного радиуса, то сторонами получающихся многоугольников являются общие хорды двух пересекающихся кругов (или части этих хорд), и каждый многоугольник R_i целиком лежит внутри соответствующего круга (иначе некоторые точки не были бы покрыты). Более того, центр круга, естественно, лежит в R_i.

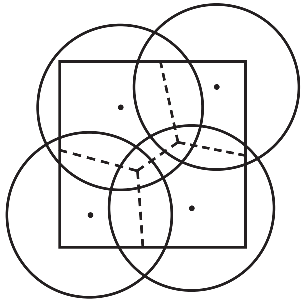


Рис. 23

Среднее значение внутреннего угла при каждой вершине разбиения не превосходит $\frac{2\pi}{3}$ (это проверяется отдельно для вершин внутри T, точек на границе и углов — в последнем случае как раз и важно, что углы T не превышают $\frac{2\pi}{3}$), откуда легко следует, что число углов не превосходит $6N$. Значит, по лемме суммарная площадь многоугольников (которая равна 1) не больше, чем $N \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\varepsilon^2$, т. е. суммарная площадь кругов не меньше

$$N \cdot \pi\varepsilon^2 \geqslant \frac{2}{3\sqrt{3}\varepsilon^2} \cdot \pi\varepsilon^2 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

что и требовалось.

Замечание. Отсюда, в частности, следует, что если T — правильный 6-угольник, то наилучший способ его покрытия — покрыть его одним кругом; при любом другом способе суммарная площадь будет строго больше.

Заметим ещё, что приведённое доказательство с минимальными изменениями проходит для любого многоугольника с числом сторон, не большим 6.

б2) Здесь оптимальная конструкция такова.

Во-первых, ясно, что часть квадрата надо заполнить кругами большего радиуса (как именно — будет сказано ниже), а оставшуюся часть — по методу, описанному в решении б1), т. е. мелкой 6-угольной сеткой.

Во-вторых, из соображений, высказанных выше, ясно, что меньший радиус должен быть как можно меньше. Но и больший радиус тоже должен быть малым; иначе говоря, требуется, чтобы $1 \gg r_1 \gg r_2$ (чем сильнее уменьшаются радиусы, тем лучше; оптимальное соотношение не достигается, но говоря условно, требуется, чтобы отношения $\frac{r_1}{1}$ и $\frac{r_2}{r_1}$ оба были близки к нулю).

Заполним квадрат мелкой (относительно мелкой; применительно к радиусу r_2 она будет, напротив, очень крупной) 6-угольной сеткой. Затем каждому 6-угольнику сопоставим круг радиуса r с тем же центром.

Таким образом, суммарная площадь всех покрывающих кругов (если пренебречь эффектами, связанными с границей квадрата — а, как мы знаем, это вполне корректно) равна площади кругов радиуса r_1 (их столько же, сколько 6-угольников), плюс площадь оставшихся «уголков», умноженная на γ. Будем называть второе слагаемое полной площадью уголков; она в γ раз больше их «настоящей» площади.

Теперь понятно, что нам достаточно рассматривать покрытие одного 6-угольника, которому соответствует 1 «большой» круг (радиуса r_1) и 6 «уголков».

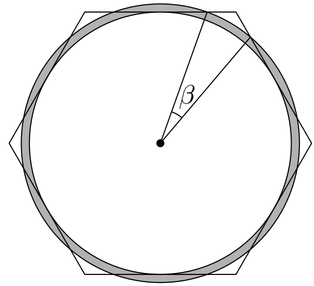


Рис. 24

Пусть боковая сторона каждого 6-угольника равна a (число a можно выбрать произвольно, лишь бы оно было достаточно малым). Должны выполняться неравенства $a > r_1 > \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Это значит, что круг не полностью покрывает соответствующий ему 6-угольник, но притом вылезает за его границу.

Остаётся найти соотношение между a и r_1, при котором достигается экстремум. Примем вначале $r_1 = a$, и будем медленно увеличивать этот радиус. Если он увеличивается на δ, то площадь большого круга увеличилась на площадь кольца радиуса r_1 и ширины δ, т. е. приблизительно на $2\pi r_1\delta$. С другой стороны, площадь «уголков» уменьшилась на $6\beta r_1\delta$ (рис. 24), соответственно, их полная площадь уменьшилась на $6\gamma\beta r_1\delta$.

Очевидно, суммарная площадь уменьшается, пока первое выражение меньше второго, и начинает расти после того, как они сравняются. Минимум, стало быть, достигается, если они равны, т. е. требуется, чтобы выполнялось равенство $2\pi r_1\delta = 6\gamma\beta r_1\delta$. Сокращая, получаем

$$\beta = \frac{2\pi}{6\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При этом

$$r_1 = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Коэффициент, с которым покрыт весь 6-угольник (и, тем самым, также и весь квадрат), нетрудно вычислить, но он имеет несколько «зубодробительный» вид.

Стоит заметить, что тем же способом можно найти оптимальное покрытие, если разрешается брать круги трёх разных радиусов, и вообще, любого фиксированного числа k разных радиусов.

Таким образом, мы решили задачу почти полностью. Однако приведённое доказательство имеет «лакуну»: не доказано, что центры «больших» кругов следует размещать именно в форме 6-угольной решётки. Возможно, читатели сумеют восполнить этот пробел.

44. Ответ. Да в случае б) и нет в случаях а), в).

Решение. Для доказательства приведённого выше ответа воспользуемся сначала простенькой леммой:

Лемма. *Если $KLMN$ — выпуклый 4-угольник, то сумма его диагоналей всегда больше, чем сумма противоположных сторон:*

$$KM+LN > KL+MN \quad \textit{и} \quad KM+LN > KN+LM.$$

В самом деле, если O — точка пересечения диагоналей, то

$$KO+OL > KL, \quad MO+ON > MN,$$

что и даёт первое неравенство. Второе аналогично. (*Замечание*: однако, вообще говоря, неверно, что сумма диагоналей больше суммы двух *соседних* сторон).

Теперь рассмотрим произвольную ломаную, и пусть какие-то два её звена, например, AB и FG, пересекаются. Тогда $AFBG$ — выпуклый четырёхугольник, AB и FG — его диагонали, и поэтому

$$AB+FG > AF+BG, \quad \text{а также} \quad AB+FG > AG+BF.$$

Посмотрим, в каком именно порядке идут в нашей ломаной эти 4 вершины. Поскольку она замкнута, несущественно, с какой начать. Пусть, например, мы начинаем в порядке AB, и далее идут $C\ldots EFGH\ldots ZA$. Тогда заменим отрезки AB и FG на AF и BG — получится более короткая замкнутая ломаная $AFE\ldots CBGH\ldots ZA$.

Таким образом, если ломаная самопересекающаяся, то имеется другая, более короткая. Следовательно, **кратчайшая ломаная не может иметь самопересечений**, а это означает, что в вопросе а) ответ отрицательный.

(Мы считали, что отрезок FG проходится именно в порядке от F к G; если его проходят в обратном направлении, то, разумеется, всё точно так же, только тогда надо AB и FG заменять на AG и BF).

Чтобы разобрать п. б), в), рассмотрим по отдельности два случая.

i) Допустим, что наши точки являются вершинами выпуклого многоугольника. Тогда его контур есть несамопересекающаяся ломаная, и других нет. В самом деле, любая другая ломаная содержит одну из диагоналей многоугольника, и следовательно, разделяет оставшиеся точки. Поэтому неизбежно, как минимум, одно самопересечение. Соответственно, Л(Ф) = 1 (и не может равняться 2).

ii) Пусть теперь предположение (i) неверно. Построим выпуклую оболочку данных точек; это некий выпуклый многоугольник $ABC\ldots K$, причём одна или несколько точек лежат внутри этого многоугольника. Пусть это точки M, ..., N, S.

Рассмотрим сначала несамопересекающуюся ломаную $ABC\ldots K$, а затем выбросим из неё одно звено (например, звено AB), и построим кратчайшую ломаную $AMN\ldots SB$, начинающуюся в точке A, проходящую через все внутренние точки и заканчивающуюся в B.

Тогда ломаная $AMN\ldots SBC\ldots KA$ — замкнутая и несамопересекающаяся. Действительно, звенья первой части не пересекаются, потому что она — кратчайшая, звенья второй — потому что это контур выпуклого многоугольника. Наконец, звенья второй части не пересекаются со звеньями первой, поскольку они лежат целиком внутри многоугольника.

Выбросим теперь какое-нибудь другое звено. Получится ещё одна несамопересекающаяся ломаная, не совпадающая с первой, поскольку в первой нет звена AB, а во второй оно есть. Таким образом, общее число несамопересекающихся ломаных не меньше, чем сторон у многоугольника, т. е. не меньше трёх.

Замечание. Равенство Л(Ф) = 3 возможно. Оно выполняется для невыпуклого 4-угольника.

45. Набросок решения. Отметим на сторонах треугольника ABC три точки: A_1 на BC, B_1 — на AC, C_1 — на AB. Разделим треугольник на четыре части отрезками A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1. Если все эти отрезки — средние линии треугольника, то все четыре части равны, а при любом другом делении центральная часть больше, чем одна из угловых.

Вернёмся к исходной задаче. Предположим обратное: каждая из диагоналей AB, KC и RS отсекает от 100-угольника четверть площади, так что есть три «крайние» части и одна «центральная».

Предположим сначала, что центральная часть — треугольник (это возможно в том случае, если K совпадает с B, а R и S — с C и A соответственно).

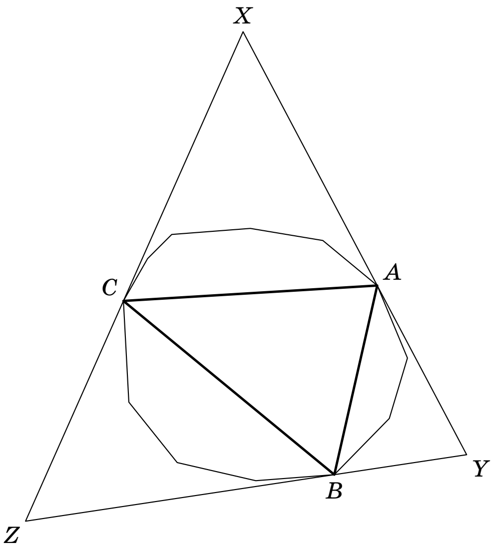


Рис. 25

Проведём через точки A, B, C опорные прямые, чтобы образовался треугольник XYZ (рис. 25).

Как указывалось выше, площадь треугольника ABC не меньше, чем площадь хотя бы одного из треугольников AYB, BZC, CXA, а следовательно, заведомо больше, чем площадь лежащего внутри этого треугольника многоугольника, — противоречие.

Остаётся «заделать дыры» в доказательстве, а именно: доказать начальное утверждение о делении треугольника на 4 части, а также разобрать случаи, когда центральная часть — не треугольник, или когда она вообще лежит вне 100-угольника, а не содержит его — такую картинку тоже можно нарисовать. Эти технические моменты мы опускаем.

46. Ответ. Можно разделить на 5 частей (и только так).

Решение. Нетрудно разделить круг на 4 или 6 равновеликих частей, но нетрудно также видеть, что при этом одна из хорд непременно должна быть диаметром. Остаются варианты 7 или 5 частей.

i) Разделить на 7 равных частей нельзя.

В самом деле, очевидно, что каждая из прямых должна отделить от круга часть, составляющую $\frac{3}{7}$ его площади, а поэтому каждая прямая отстоит от центра круга заведомо меньше, чем на $\frac{r}{7}$.

Поскольку куски, образованные двумя прямыми и дугой круга, должны быть равны, углы между прямыми тоже должны быть равны. Прямых три, поэтому углы между ними равны 60°. В центре образуется равносторонний треугольник, а весь круг разделён на три равных криволинейных треугольника (две стороны прямые, одна — дуга окружности), три равных криволинейных четырёхугольника и один правильный треугольник в центре.

Теперь из того, что любая прямая отстоит от центра круга меньше чем на $\frac{r}{7}$, следует, что центральный треугольник намного меньше, чем требуется.

ii) Деление на 5 частей.

Будем считать, что радиус круга равен 1, а площадь, соответственно, равна π.

Чтобы круг был разделён именно на 5 частей, одна хорда (обозначим её AB) не должна пересекаться с двумя другими. Согласно условию, тогда она отсекает от круга сегмент площадью $\frac{\pi}{5}$. Центральный угол α, стягиваемый хордой AB, удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\alpha - \sin\alpha = \frac{2\pi}{5} \tag{1}$$

Теперь проведём ещё две хорды, отсекающие от круга сегменты площадью $\frac{2\pi}{5}$ так, чтобы одна начиналась в точке A, а другая в точке B, как показано на рисунке.

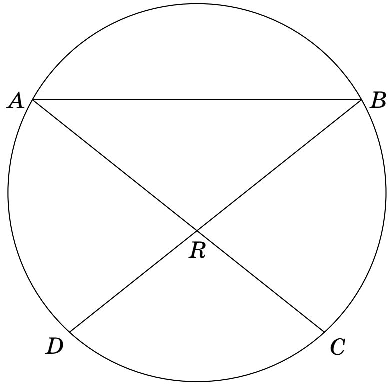


Рис. 26

Каждая из этих хорд стягивает угол β, удовлетворяющий уравнению

$$\beta - \sin\beta = \frac{4\pi}{5}, \tag{2}$$

Теперь круг разделён на 5 частей: сегмент AB, имеющий нужную площадь, три криволинейных треугольника BCR, CDR и DAR, и «обычный» треугольник ABR. Площадь этого последнего, как нетрудно убедиться, равна

$$S = \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right). \qquad (3)$$

Решая уравнения (1), (2) приближённо, мы находим, что $\alpha \approx 2{,}113$ и $\beta \approx 2{,}824$. Подставляя эти значения в формулу (3), мы получаем, что площадь треугольника приближённо равна 0,604, т. е. меньше, чем $\frac{\pi}{5}$. Площадь криволинейного треугольника RDC равна тому же числу.

Остаётся немного повернуть хорду BD по часовой стрелке. Если она станет близка к AC, то площадь криволинейного треугольника RDC будет близка к $\frac{2\pi}{5}$ и заведомо больше чем $\frac{\pi}{5}$, откуда следует, что при некотором промежуточном положении эта площадь будет равна $\frac{\pi}{5}$. После этого и все остальные площади автоматически станут равны этому числу.

47. Ответ. $\cos\varphi = \frac{1}{n}$.

Решение. Восставим из центра тетраэдра перпендикуляры к двум граням. Проведя через них двумерную плоскость, мы получим в сечении 4-угольник, один из углов которого — искомый угол между гранями, другой — угол α между перпендикулярами, а два остальных — прямые. Следовательно, $\alpha + \varphi = \pi$, и достаточно найти угол α.

Чтобы найти α, восставим перпендикуляры из центра ко всем граням, рассмотрим соответствующие векторы с общим началом в центре тетраэдра и с концами в центрах граней. Из соображений симметрии ясно, что сумма всех $n+1$ векторов равна 0. Квадрат этой суммы равен сумме квадратов всех векторов плюс сумма удвоенных произведений; в первую сумму входит $(n+1)$ слагаемое, во вторую — $\frac{n(n+1)}{2}$.

Для удобства считаем, что длина каждого вектора равна 1. Таким образом, первая сумма равна $n+1$, вторая же равна $\frac{2\cos\alpha\cdot n(n+1)}{2}$. Отсюда $\cos\alpha = -\frac{1}{n}$, $\cos\varphi = \frac{1}{n}$.

Как частные случаи, получаем:

в двумерном тетраэдре (т. е. в правильном треугольнике) косинус угла между сторонами равен $\frac{1}{2}$, $\varphi = 60^\circ$;

в трёхмерном тетраэдре, который, собственно говоря, только и является тетраэдром в точном смысле слова, угол между гранями равен $\arccos\frac{1}{3}$.

48. Решение. Пусть для определённости $p > q$. Будем также считать, что большая сторона прямоугольника AB (и параллельная ей CD) расположена горизонтально, меньшая сторона BC — вертикально, угол A — левый нижний, а угол C, соответственно — правый верхний.

Очевидно, все получающиеся треугольники подобны друг другу, и гипотенузой в каждом из них является кусок диагонали AC.

Поскольку диагональ делит каждый квадратик либо на два четырёхугольника, либо на четырёхугольник и треугольник (но не на два треугольника), каждый кусок диагонали либо является гипотенузой только в одном треугольнике, либо вообще не служит гипотенузой.

Обозначим через d длину той части диагонали, на которой лежат гипотенузы, тогда, очевидно, сумма всех периметров равна

$$\frac{p+q+\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}}\cdot d.$$

Величину d проще всего найти, вычтя из длины всей диагонали суммарную длину кусков, не являющихся гипотенузами. Легко видеть, что каждый такой кусок имеет длину $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p}$, а их количество равно $(p-q-1)$. Отсюда получаем ответ:

$$d = \sqrt{p^2+q^2}\cdot\frac{q+1}{p}, \quad P = (p+q+\sqrt{p^2+q^2})\cdot\frac{q+1}{p}.$$

Теория чисел

49. Решение. Обозначим сумму цифр произвольного числа x через $S(x)$. Пусть a и $a+1$ — искомые числа. Ясно, что a должно оканчиваться несколькими девятками. Предположим, что $a = \ldots 99\ldots 99$ (r девяток в конце), тогда $S(a+1) = S(a) - 9r + 1$, откуда $9r-1$ должно делиться на 49; $9r = 50, 99, \ldots$ Поскольку 50 не делится на 9, ясно, что минимальное подходящее $r = 11$. Итак, a оканчивается на 11 девяток, и так как $S(a)$ делится на 49, то $S(a) \geqslant 147$. Отсюда

$$a = 4999989\ldots 9, \quad a+1 = 4999990\ldots 0$$

(11 нулей в конце).

50. Ответ. Делится при нечётном n и не делится при чётном.

Доказательство. $11A = 11\ldots1$ ($2n$ единиц) $= 1000\ldots01B$. Поэтому дело сводится к выяснению того, делится ли число $10^n + 1$ на 11. Но $10 \equiv (-1) \pmod{11}$, поэтому $10^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{11}$ делится на 11 при нечётных n. Частное, как нетрудно заметить, равно $9090\ldots9091$.

51. Доказательство. Так как после четвёртого вычёркивания остаётся только одно число, это должно быть число 44. Но сумма исходных одиннадцати чисел делится на 11, следовательно, на первом шаге необходимо вычеркнуть число, делящееся на 11, т. е. число 44. Противоречие.

52. Ответ. $2 \cdot 28 \cdot 37 = 2072$. В этом случае необходимо раздавать членам профсоюза по 37 слонов, а не членам — по 28, при раздаче членам профсоюза другого числа слонов число оставшихся слонов не будет делиться на 37.

Решение. Допустим, что число слонов было больше, чем $2 \cdot 28 \cdot 37$. Тогда либо членам, либо не членам профсоюза было роздано больше, чем $28 \cdot 37$ слонов; пусть, например, справедливо первое. Тогда каждому члену профсоюза досталось $k > 37$ слонов, и можно вместо этого раздать каждому из них по $k - 37$ слонов, а лишних $28 \cdot 37$ слонов поровну разделить между 37 не членами. Второй случай аналогичен.

53. Доказательство. Для доказательства пункта а) достаточно воспользоваться тем известным фактом, что если сама дробь получается делением единицы на p, то её период есть результат деления на p числа $99\ldots9$ (число девяток равно длине периода). Так как число $99\ldots9$ делится на 9, а p взаимно просто с 9, то сам период (как число) делится на 9. Поэтому (по признаку делимости на 9) делится и сумма его цифр.

Для решения пункта б) обозначим через A число $99\ldots9$ (km девяток), а через B — число $99\ldots9$ с m девятками. Далее нужно воспользоваться двумя фактами: 1) p не делит B (в противном случае длина периода равнялась бы m, а не km), а следовательно, взаимно просто с ним; 2) имеется признак делимости на B, аналогичный признаку делимости на 9: если M — любое число, а N — сумма его m-цифровых граней, то M и N делятся на B одновременно. Теперь ясно, что доказательство б) полностью аналогично доказательству а).

54. Решение. Если $\{32x\} = \{200x\}$, то $\{168x\} = 0$, т. е. $168x$ — целое число. Аналогично и $98x$ — целое. Отсюда мы легко выводим, что $70x$ — целое; $28x$ — целое; $14x$ — целое. (Если известно, что kx — целое, lx — целое, и наибольший общий делитель чисел k и l равен r, то rx тоже целое.) Но тогда и $154x$ — целое, т. е. $\{154x\}=0$, откуда $\{x\}=\{155x\}$.

55. Решение (И. Н. Бернштейн). а) Процедуру решения удобно иллюстрировать на более низкой степени двойки, например на числе $1024=2^{10}$.

Если мы возьмём показатель степени меньше 10, например $2^8 = 256$, то доказывать нечего, так как само это число делится на себя и не имеет нулей. Однако в числе $2^{10}=1024$ есть ноль; «убьём» его. Для этого добавим к нему то же число, умноженное на 100:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 1024 \\ 102400 \end{array} \\ \hline 103424 \end{array}$$

Ноль на третьем справа месте исчез, зато возник новый ноль на пятом месте. «Убьём» его тем же способом:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 103424 \\ 10240000 \end{array} \\ \hline 10343424 \end{array}$$

Аналогичную процедуру можно применить и к числу 2^{1000}; хотя мы не знаем, на каких местах в нём находятся (и находятся ли) нули, ясно, что мы можем последовательно «убивать» каждый ноль, начиная справа, и тем самым получить число (оно имеет вид $2^{1000} \times 101100\ldots01000101$ при какой-то комбинации нулей и единиц), не имеющее нулей на последних n местах справа.

Может показаться, что это ничего особенного не даёт: один ноль мы «убиваем», но одновременно получаем другой левее его. Рассмотрение примера с числом 2^{10} показывает, что этот процесс будет продолжаться бесконечно... Однако суть дела в том, что вполне достаточно получить описанным способом число, в последней тысяче цифр которого отсутствуют нули. После этого все остальные цифры можно *просто отбросить*, так как делимость на 2^{1000} от них не зависит.

Замечание. Аналогично решается задача и в случае, когда вместо числа 2^{1000} мы возьмём число 5^{1000}. Ясно также, что число 1000 можно заменить на любое r.

б) Любое число, не оканчивающееся нулём, имеет вид либо $n\cdot 2^r$, либо $n\cdot 5^r$, где n взаимно просто с 10. Оба случая аналогичны, рассмотрим, например, первый.

Мы уже видели, что существует число Q, не имеющее нулей и делящееся на 2^r. Запишем теперь ряд чисел Q, QQ, QQQ, …, $QQQ\ldots Q$, …, каждое из которых — число Q, выписанное несколько раз подряд. По принципу Дирихле два из них имеют одинаковый остаток при делении на n, поэтому их разность делится на n. Но их разность неизбежно имеет вид $QQ\ldots Q00\ldots0$. Теперь уже очевидно, что, отбросив в последнем числе нули в конце, мы получим искомое число.

56. Решение. Если $N<10^k$, $2N\geqslant 10^k$, то, очевидно, число $2N$ начинается с единицы (а $4N$ — уже нет). Поэтому число единиц в последовательности равно числу переходов из класса k-значных чисел в класс $(k+1)$-значных. (Например, при переходе от двузначных к трёхзначным появляется начинающееся с единицы число 128.)

Это означает, что число единиц равно числу цифр в последнем числе, т. е. в числе 2^{1000}. Так как $\lg 2=0{,}30103\ldots$, то $\lg 2^{1000}=301{,}03\ldots$, т. е. в этом числе 302 цифры.

Ответ. 302.

57. *Указания.* а) Нужно использовать то, что

$$\sum(x_i-x_{i-1})+\sum(x_i-x_{i-2})\geqslant 1+2+\ldots+29=435.$$

б) Существует набор 0, 2, 3, 10, 16, 21, 25, в котором, таким образом, $x_6=25$. По-видимому, для $x_6<25$ редких наборов не существует.

в) Следует использовать те же соображения, что в п. а), для сумм чисел вида (x_i-x_{i-1}), (x_i-x_{i-2}), (x_i-x_{i-3}) и т. д.

г) Один из возможных ответов: $x_i-x_{i-1}=(n^2-i+1)$.

58. Решение. Легко заметить, что при всех k, начиная с $k=1$, $a_k=b_k+c_k$. Поэтому имеем, начиная с $k=2$:

$$\{a_k, b_k, c_k\}=\{b_{k-1}, c_{k-1}, b_{k-1}-c_{k-1}\}.$$

Следовательно, зная множество

$$M=\{a_k, b_k, c_k\},$$

мы знаем числа b_{k-1} и c_{k-1} (они принадлежат множеству M), и знаем, что a_{k-1} — сумма каких-то двух из них.

Пусть $a_{10}=x$, $b_{10}=y$, тогда $c_{10}=x-y$ $(x\leqslant 2y)$. Ясно, что максимальные значения a_9, b_9 и c_9 равны $x+y$, x, y. Рассуждая таким же образом, мы видим, что числа a_8, b_8, c_8 не превосходят

$$(x+y)+x=2x+y,\ \ x+y,\ \ x;$$

числа a_7, b_7, c_7 — не превосходят

$$(2x+y)+(x+y)=3x+2y,\ 2x+y,\ x+y$$

и т. д. На десятом шаге мы увидим, что $a_0 \leqslant 55x+34y \leqslant 89x$.

Но $a_0=1$. Отсюда

$$x \geqslant \frac{1}{89} > \frac{1}{100}.$$

Равенство выполняется, если

$$b_0 = \frac{55}{89}.$$

Замечание. Очевидно, задача связана с числами Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\ldots$$

Объясните, в чём именно заключается эта связь?

59. Ответ. Нет.

Решение. Если $n=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$, то сумма делителей n не меньше, чем $n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_r}\right)$. Но сумма чисел, обратных к первым r простым, может быть сделана сколь угодно большой.

60. Решение. а) Пусть a_1 — наибольшее среди чисел $a_1, \ldots, a_r$. Так как оно равно произведению двух чисел, меньших его, то каждое из этих чисел должно быть больше 1. Тем самым и $a_1>1$, и в наборе есть не менее трёх чисел, больших 1. По аналогичным причинам должно быть хотя бы три числа, меньших 1. Пример для $r=6$ строится легко:

$$2, 3, 6, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}.$$

Ответ. $r=6$.

б) Если среди этих чисел нет числа -1, то, рассуждая как выше, мы увидим, что должно быть три числа с модулем больше 1 и три — с модулем меньше 1, так что $r>5$. Если же одно из чисел равно -1, мы можем подобрать пять чисел, например,

$$-1, -\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}, 2.$$

Четырёх чисел не хватает, так как необходимо, чтобы среди них были ещё по меньшей мере два отрицательных числа и два положительных.

Ответ. $r=5$.

в) Здесь можно обойтись четырьмя числами, а именно не равными единице комплексными корнями 5-й степени из 1. Легко убедиться, что каждый из них является произведением двух других. Трёх чисел не хватает, так как из равенств $ab=c$, $ac=b$ следует, что $a^2=1$.

Ответ. $r=4$.

г) Можно взять три стандартных корня из -1: числа i, j, k.

Ответ. $r=3$.

61. а) **Ответ.** $1\,888\,888\,888{,}7=1\,111\,111\,111\cdot\frac{17}{10}$.

Решение. Возьмём какое-нибудь число указанного типа и «циклически изменим» его 10 раз. Ясно, что в сумму на каждом месте войдёт 3 единицы и 7 двоек, так что среднее на каждом месте составит $\frac{17}{10}$. Остаётся заметить, что все числа указанного типа разбиваются в группы по 10.

б) *Указание.* Здесь первой цифрой каждого из чисел обязана быть единица, так что и первая цифра среднего арифметического — единица. На оставшихся местах стоит 2 единицы и 7 нулей, поэтому ответ:

$$1\,000\,000\,000+111\,111\,111\cdot\frac{2}{9}=1\,222\,222\,222{,}(2).$$

62. *Указание.* Хорошим является любое число, оканчивающееся на 1, 3, 7 или 9 (вот 400 чисел). Далее, если число оканчивается на чётную цифру (2, 4, 6 или 8), то оно должно делиться на 8, откуда легко сообразить, что таких чисел 100. Если число кончается на 5, то оно должно делиться на 125, и есть четыре таких числа: это 125, 375, 625 и 875. Наконец, число, кончающееся нулём, только одно: 000.

Замечание. Задача легко обобщается на случай k-значных чисел и произвольной степени l, но с оговоркой: l должно быть взаимно просто с 10 и больше или равно k. В таком случае ответ:

$$N=10^{k-1}\left(4+\frac{4}{2^{k-1}}\right)+2^{k-1}+1.$$

Если же эти условия не выполнены, то задача существенно усложняется.

63. **Ответ.** а) 110 лет и 11 лет, б) 110 лет и 2 года.

Соответствующие пары лет: в первом случае (2002, 2112) (или, скажем, (2332, 2442)) и (2992, 3003), во втором — та же пара (2002, 2112) и (9999, 10001).

64. а) Из условия задачи следует, что $z^4 = \frac{z^{17}}{z^{13}}$ рационально. Поэтому рационально также и z^{12}. Деля z^{13} на z^{12}, мы видим, что и z рационально. Но степень рационального числа может быть целым числом только в том случае, если оно само целое.

б) Мы будем искать подходящее число x в интервале $[a; b] = [N + 0{,}2; N + 0{,}8]$, где N достаточно велико (как будет видно из дальнейшего, можно, например, взять $N = 10^7$). Первое неравенство выполнено автоматически. Для того, чтобы выполнялось третье, рассмотрим все числа $R_1, R_2, \ldots$, лежащие в интервале $[a^3; b^3]$ и имеющие вид $M + 0{,}0000001$, M — целое число. Любое из них «на две трети годится» на роль куба искомого числа — в том смысле, что выполнены первое и третье неравенства. Остаётся удовлетворить второе.

Для этого будем перебирать все эти числа последовательно. При переходе от M_i к $M_{i+1} = M_i + 1$ число x^2 (оно равно указанному числу в степени две трети) увеличивается менее чем на $\frac{1}{1\,000\,000}$, при этом чисел достаточно много, так что в какой-то момент происходит «переход через целое». Именно в этот момент мы получаем нужное число.

Решение задачи г) полностью аналогично.

в) Пусть $N = [x^3]$, $M = [x^2]$. Тогда

$$N^2 - M^3 = (N^{\frac{4}{3}} + N^{\frac{2}{3}}M + M^2)(N^{\frac{2}{3}} - M) = \\ = (N^{\frac{4}{3}} + N^{\frac{2}{3}}M + M^2)(N^{\frac{1}{3}} + M^{\frac{1}{2}})(N^{\frac{1}{3}} - M^{\frac{1}{2}}).$$

Если $x < 5$, то первые два множителя заведомо меньше 100 и 12 соответственно (оценка грубая, но нам и такой хватит). Последний же множитель очень мал (порядка одной миллионной), так как числа $N^{\frac{1}{3}}$ и $M^{\frac{1}{2}}$ очень близки к x. Следовательно, произведение меньше 1. А так как числа целые, то получается, что $N^2 = M^3$.

Но тогда число $y = \frac{N}{M}$ — целое (см. задачу а)) и очень близко к x. Это противоречит условию, согласно которому x отстоит от целого не меньше чем на 0,1.

65. Ответ. Можно.

Решение. Достаточно воспользоваться очевидным тождеством $(a\hat{\ }b)\hat{\ }c = a\hat{\ }(bc) = (a\hat{\ }c)\hat{\ }b$, и взять $a = 7$, $b = 7$, $c = 7\hat{\ }7$.

66. Ответ. а) Это возможно, например; $n = 1729 = 1000 + 729 = 1728 + 1 = 7 \cdot 13 \cdot 19$.

б) Это невозможно. В самом деле, $n=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$, причём второй множитель не меньше, чем ab, и следовательно, больше первого. Точно так же $n=(c+d)\cdot(c^2-cd+d^2)$. Если эти представления различны, то выходит, что

$$a+b=c^2-cd+d^2>c+d=a^2-ab+b^2>a+b.$$

Противоречие.

(Строго говоря, мы упустили случаи, когда $a=1$ или $a=b=2$. Но они достаточно очевидны).

67. Есть довольно стандартное доказательство методом индукции (главная трудность здесь состоит в том, чтобы правильно сформулировать утверждение индукции).

Мы, однако, предложим другой, более красивый путь.

Представим каждое число от 0 до 999 999 999 в виде суммы «разрядных единиц» (например: $70\,264 = 70\,000 + 200 + 60 + 4$). При возведении такой суммы в 8-ю степень мы получаем выражения типа $70000^a\cdot 200^b\cdot 60^c\cdot 4^d$, где $a+b+c+d=8$.

Теперь разобьём числа A и B на слагаемые, соответственно разложению каждой из восьмых степеней, и приведём подобные члены. Ясно, что получатся выражения примерно такого вида:

$$N\cdot 70\,000^a\cdot 200^b\cdot 60^c\cdot 4^d,$$

где коэффициент N пропорционален количеству 9-значных чисел, в разложение которых на разрядные единицы входят слагаемые 70 000, 200, 60 и 4.

Но в разложение числа A входит 100 000 таких чисел (в числе $****7*260$ нам известны 4 цифры, а остальные пять произвольны), тогда как в разложение числа B — вдвое меньше.

Остаётся заметить, что рассуждение, которое мы провели для конкретного члена $N\cdot 70\,000^a\cdot 200^b\cdot 60^c\cdot 4^d$, годится и для любого другого члена: в разложение B входит ровно половина соответствующих членов.

Остаётся понять один важный момент: неужели такое рассуждение годится для любых степеней? — Нет, конечно. Для того, чтобы оно было верно, необходима важная оговорка: есть хотя бы один разряд, который вообще не участвует в данном разложении (в нашем примере таких разрядов было 5: 4-й, а также с 6-го по 9-й).

Но для степеней не выше 8 это справедливо! Действительно, поскольку слагаемых в любом девятизначном числе ровно 9 (некоторые из них, возможно, равны нулю, как в этом примере), а степень восьмая, то неизбежно в каждом из членов по отдельности хотя бы одно из девяти слагаемых участвует в нулевой степени, т. е. фактически вообще не участвует. Это соображение и завершает доказательство.

68. а) Проще всего заметить, что циклически повторяется не только r-я цифра, но весь набор из последних r цифр. В самом деле, поскольку таких наборов конечное число, рано или поздно один из наборов должен повториться. С этого момента дальше всё пойдёт по циклу, т. е. десятичная дробь окажется периодической.

б) Рассуждаем от противного. Предположим, что r-я цифра повторяется циклически, и длина периода равна m. Но тогда найдётся такое s, что через sm мест повторится как r-я, так и $(r-1)$-я цифра. Легко видеть, что начиная с этого момента, $(r-1)$-я цифра будет повторяться с периодом sm. Отсюда, аналогично, выводим, что циклически повторяется $(r-2)$-я цифра, и т. д., вплоть до первой цифры включительно.

Итак, достаточно рассмотреть случай, когда циклически повторяется первая цифра с некоторым периодом t.

Но тогда мы можем определить, на сколько больше знаков имеет число $2^{(n+t)}$ в сравнении с 2^n. Число $2^{(n+1)}$ имеет на один разряд больше, чем число 2^n, тогда и только тогда, когда его первая цифра равна 1. Таким образом, разность числа знаков равна числу единиц в цикле первых цифр.

Это утверждение верно и в том случае, если мы рассматриваем цикл длины tM (в нём в M раз больше единиц, чем в цикле длины t). Если в цикле длины t имеется q единиц, то в цикле длины $tM-qM$ единиц.

Значит, число $2^{(n+tM)}$ всегда имеет $k+qM$ знаков, каково бы ни было M. Но отсюда легко вывести, что $2^t=10^q$, что абсурдно.

69. Решение. а) Очевидно, что достаточно найти такие k, m, что по модулю n

$$a_k \equiv a_m, \quad a_{k+1} \equiv a_{m+1}, \quad \text{тогда } a_{k-m} \equiv a_0 \equiv 0.$$

б) Начинающуюся *не с нуля* последовательность Фибоначчи, в которой ни один член не делится на 5, легко указать: 1, 3, 4, 7, 11, 18, … В ней остатки отделения на 5 чередуются: 1, 3, 4, 2, 1, 3, …

Причина этого в том, что по модулю 5 можно извлечь корень из 5 (он равен 0), и поэтому «золотое сечение»

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} = 3 \pmod 5)$$

является рациональным числом. Соответственно, геометрическая прогрессия $1, 3, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots$ является в то же время последовательностью Фибоначчи — естественно, без нулей.

в) Из предыдущего немедленно следует, что такую последовательность можно построить для любого такого p, что по модулю p извлекается корень из 5. Согласно закону взаимности Гаусса, это возможно, если $p=5$ или $p=5k\pm 1$. Так, например, для $p=11$ корень из 5 равен ± 4, «золотое сечение» равно 4 или 8, и годятся геометрические прогрессии с этими знаменателями, например $1, 4, 5, 9, 3, \ldots$

Напротив, для других чисел вопрос не столь прост. Для $p=7$ нужной последовательности Фибоначчи не существует, что можно доказать перебором всех последовательностей, начинающихся с чисел $\{1, k\}$, где $1\leqslant k\leqslant 6$. В общем случае ответ неизвестен.

70. а) Да, верно. В самом деле, достаточно заметить, что:

i) к любому числу можно прибавить 1 (умножить на 3, прибавить 3 и разделить на 3);

ii) любое число, которое больше 1, можно уменьшить, поскольку для любого $x>1$ справедливо неравенство $\frac{x+2}{3}<x$.

б) Обозначим наши операции так: $(+)$ — прибавление 3, $(*)$ — умножение на 3, (&) — деление. Тогда самый быстрый способ — $*+\&$, т. е. 81—243—246—82 (три операции). Двух шагов недостаточно, так как число 82 можно за 1 ход получить только из чисел 246 или 79, а ни того, ни другого нельзя получить за 1 ход из 81.

в) Кратчайший способ получить 81 таков:

$$*++\&++\&++\&++\&+**,$$

или

$$82—246—249—252—84—87—90—30—33—36—$$
$$—12—15—18—6—9—27—81$$

(16 операций).

Чтобы доказать, что меньшим числом операций обойтись нельзя, обратимся сразу к п. г). Итак, пусть даны произвольные натуральные числа a, b.

Запишем их в троичной системе. (Например, числа 11 и 2011 примут вид соответственно 102 и 2 202 111).

В троичной системе наши операции означают следующее: $(*)$ — приписывание нуля в конце числа, (&) — вычёркивание последнего нуля (если он есть) и (+) — прибавление единицы в предпоследнем разряде. Преобразование 82 в 81 в троичной записи выглядят так:

$$10001—100010—100020—100100—10010—10020—10100—1010—\\1020—1100—110—120—200—20—100—1000—10000.$$

Доказательство того, что меньшим числом операций обойтись нельзя, состоит из следующих шагов:

i) оценить число операций (+). Их должно быть не менее девяти: надо прибавить по 2 единицы в каждом из 4 разрядов, и ещё одну единицу в пятом.

ii) доказать, что операций (∗), (&) суммарно должно быть не менее 7. В самом деле, чтобы прибавить единицы в несколько разных разрядов, необходимо то вставлять, то вычёркивать нули.

г) Ответ нетрудно найти, используя приведённые выше соображения, однако аккуратное доказательство довольно длинное и скучное. Мы позволим себе его опустить.

71. Ответ. Да, может.

Решение. Сначала подберём числа A, 2A так, чтобы каждое из них равнялось разности двух квадратов (именно квадратов, а не обратных квадратов). Годятся, например, числа

$$A = 16 = 25 - 9, \quad 2A = 32 = 81 - 49.$$

Теперь остаётся разделить их на подходящий квадрат, и тогда квадраты превратятся в обратные квадраты. В данном случае надо делить на $25 \times 81 \times 49 = 99\,225$, и мы получим

$$a = \frac{16}{99225} = \frac{1}{3969} - \frac{1}{11025} = \frac{1}{63^2} - \frac{1}{105^2},$$
$$2a = \frac{32}{99225} = \frac{1}{1225} - \frac{1}{2025} = \frac{1}{35^2} - \frac{1}{45^2}.$$

72. Ответ. Объём равен $\frac{1}{77}$.

Доказательство. В самом деле, тогда можно разлить поровну на 7 и 11 гостей, тогда как в случае трёх гостей надо будет двоим налить по 26 черпаков, одному — 25.

Тогда $\frac{26}{77} - \frac{1}{3} = \frac{1}{231} < \frac{1}{60}$ и $\frac{1}{3} - \frac{25}{77} = \frac{2}{231} < \frac{1}{60}$, что и требуется.

Докажем теперь, что черпак большего объёма не годится.

В самом деле, пусть его объём равен $\frac{1}{z}$, и пусть z не делится нацело на 7, или вообще не является целым числом. Тогда разделить на семерых поровну не удастся, и следовательно, кому-то достанется, как минимум, на один черпак больше, чем другому.

Но по условию, оба они должны попасть в интервал от $\frac{1}{7}+\frac{1}{140}$ до $\frac{1}{7}-\frac{1}{140}$. Следовательно, объём черпака не может быть больше $\frac{1}{70}$, $z \geqslant 70$.

Если при этом z не делится на 11, то по аналогичным соображениям $z \geqslant 110$. Если же делится, то 77 как раз и есть наименьшее подходящее z.

73. Доказательство. а) Надо доказывать следующее более общее утверждение.

Пусть r — произвольное натуральное число, не делящееся на 3. Тогда существует число вида $rrr\ldots rr$, которое делится на 3^k, причём наименьшее такое число содержит 3^k групп r.

Остальное просто. В самом деле, если мы применим индукцию, то сразу увидим, что её основание очевидно (поскольку сумма цифр чисел r и rr не делится на 3, а сумма цифр числа rrr — делится), а индуктивный переход почти очевиден.

б) Пусть сначала число m не делится на 3. Тогда число из r единиц делится на m в том и только в том случае, когда на m делится число $99\ldots999$ (из стольких же девяток).

Рассмотрим числа 9, 99, 999, …, $99\ldots99$ (в последнем числе $(m-1)$ девяток). Ни одно из них не может давать при делении на m остаток $(m-1)$, поскольку это означало бы, что число $99\ldots99+1=$ $=100\ldots00$ делится на m, что неверно.

Следовательно, либо эти числа дают при делении на m все прочие возможные остатки (и остаток ноль в том числе — что и требуется), либо какие-то два дают при делении на m одинаковый остаток. В последнем случае мы заканчиваем рассуждение стандартным образом — вычитаем одно из другого, их разность имеет вид $99\ldots9900\ldots0$ и делится на m, откуда следует, что и число из девяток делится на m.

Итак, если m не делится на 3, то наше утверждение верно.

В общем случае, когда $m=3^k\times n$, $n>1$ и n не делится на 3, легко указать число, делящееся на m и состоящее менее чем из m единиц. Для этого надо только использовать приведённые выше соображения.

74. Решение. а) **Ответ.** Только при $N=1$ или $N=3$.

Расположить три числа не представляет труда: 1, 3, 2 или 3, 1, 2. Докажем, что другие N не годятся.

Прежде всего, последняя сумма равна $\frac{N(N+1)}{2}$, и если N чётно, то она не делится на N. Следовательно, остаётся только случай нечётного количества чисел: $N = 2n - 1$.

В этом случае последняя сумма всегда удовлетворяет условию. Рассмотрим предпоследнюю; она равна

$$\frac{N(N+1)}{2} - a_N = n(2n-1) - a_N$$

и должна делиться на $(2n-2)$.

Имеем: $n(2n-1) = (2n-2)n + n$. Отсюда следует, что разность делится только в том случае, если $a_N = n$, и предпоследняя сумма равна $n(2n-2)$.

Но теперь рассмотрим предыдущую сумму; она равна $n(2n-2) - a_{N-1}$ и должна делиться на $(2n-3)$. Между тем

$$n(2n-2) = n(2n-3) + n,$$

откуда ясно, что член a_{N-1} тоже должен равняться n.

(Если $N = 3$, то $2n - 3 = 1$, и последнее утверждение уже необоснованно.)

Мы получили, что $a_N = a_{N-1}$ — противоречие.

б) **Ответ.** Это возможно всегда.

Вот одна из подходящих конструкций. Она годится как при $N = 2k$, так и при $N = 2k + 1$:

$$k+1,\ 1,\ k+2,\ 2,\ k+3,\ 3,\ \ldots,\ 2k,\ k,\ (2k+1).$$

При $N = 2k$ последний член отсутствует.

Есть и другие конструкции, например:

$$2k,\ 2,\ (k+1),\ 3,\ (k+2),\ 4,\ (k+3),\ 5,\ \ldots,\ k,\ (2k-1),\ 1,\ (2k+1).$$

в) **Ответ.** Можно.

Однако эта задача, как ни странно, намного сложнее, чем задача б). Дело в том, что предложенная там конструкция для бесконечного числа не проходит.

Тем не менее, можно привести конструкцию такой последовательности для бесконечного числового ряда. Она состоит из бесконечного числа трёхходовых комбинаций; каждая комбинация позволяет включить в последовательность несколько чисел, *в том числе наименьшее из оставшихся* после предыдущего шага. Таким образом, «на бесконечности» мы получим все натуральные числа.

Начало конструкции. Выбираем несколько первых чисел так, чтобы условие выполнялось (например, так, как описано в решении задачи б). Пусть S — сумма всех выписанных чисел, и пусть r — первое число, которое пока ещё не выписано.

Первая комбинация. *Первый шаг.* Пишем числа S, $2S$, $4S$, …, $2^n \cdot S$. Теперь сумма равна $2^{n+1} \cdot S$.

Второй шаг. Представим эту сумму в виде произведения двух достаточно больших чисел ab. Например, удобно взять $a = 2^k$, $b = (2^l)S$, где $k + l = n + 1$, и числа k, l достаточно велики.

Третий шаг. Начинаем выписывать числа в следующем порядке: a, $b + 1$, $a + 1$, $b + 2$, $a + 2$, $b + 3$, … Легко видеть, что всякий раз очередная сумма равна произведению предыдущего числа на следующее, и следовательно, делится на очередное число. Например, $S = ab$, $S + a = a(b + 1)$ и т. д.

Делаем это до тех пор, пока очередная сумма не будет делиться на r. Такой момент непременно наступит, так как мы последовательно выписываем числа a, $a + 1$, $a + 2$, … — не позже чем через r шагов одно из них разделится на r, что и требовалось.

Четвёртый шаг. Выписываем число r, и возвращаемся к первому шагу комбинации. Далее идёт вторая комбинация, потом третья и т. д.

В целях лучшего понимания проиллюстрируем всё это на примере. Начало конструкции: 3, 1, 4, 2, 5. Сумма этих чисел равна 15. Первое отсутствующее — число 6. (Иными словами, в наших обозначениях $S = 15$, $r = 6$.)

Первый шаг: пишем числа 15, 30, 60, 120. Сумма равна 240.

Второй шаг: $240 = 30 \cdot 8$.

Третий шаг: пишем числа 8, 31, 9, 32, 10, 33, 11, 34, 12.

Число 12 делится на r, поэтому теперь можно выписать число $r = 6$.

Вся сумма равна $240 + 8 + 31 + \ldots + 12 + 6 = 594$. $S = 594$, $r = 7$.

Далее начинаем сначала, т. е. выписываем числа 594, 1188, 2376, … Согласно процедуре, в какой-то момент нам удастся выписать число 7, и т. д.

75. Решение. а) Существуют различные примеры. Приведём два простейших. Пусть для определённости $k = 7$, тогда $2^k - 1 = 127$.

i) В первое множество входят все нечётные числа, во второе — все числа вида $4m + 2$, в третье — все числа вида $8m + 4$ и т. д. В шестое входят числа вида $2^6 \cdot m + 2^5$, т. е. числа 32 и 96, а в последнее, седьмое — одно число 64.

ii) В первое множество входит только число 1, во второе — 2 и 3, в третье — 4, 5, 6, 7 и т. д., всякий раз от 2^i до $2^{i+1}-1$. В последнее входят все числа от 64 до 127.

Ясно, что оба этих способа годятся для любого k.

б) Докажем более общий факт: если числа от 1 до N можно разбить на k подмножеств, удовлетворяющих условию, то числа от 1 до $3N+1$ можно разбить на $(k+1)$ подмножеств.

В самом деле, числа 1 до N разобьём на k подмножеств, что по предположению возможно. Затем числа от $N+1$ до $2N+1$ включим в $(k+1)$-е подмножество (оно удовлетворяет условию, т. е. разность любых двух чисел из этой группы не превосходит N). В заключение числа от $2N+2$ до $3N+1$ включим в первые k подмножеств по очевидному принципу: число A, $A>2N+1$, входит в i-ое подмножество в том случае, если в него входит число $A-2N-1$. Выполнение условия очевидно.

Если начать с 1 ($N=1$, $k=1$), то мы видим, что числа от 1 до 4 разбиваются на 2 группы, числа от 1 до 13 — на 3, от 1 до 40 — на 4 и т. д. Это именно то, что требуется.

В частности, при $k=3$ получаются такие три подмножества:

$$\{1, 4, 10, 13\}, \quad \{2, 3, 11, 12\}, \quad \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Прямая проверка показывает, что для $k=1, 2, 3$ *полученная оценка точна*, т. е. числа от 1 до 5 нельзя разбить на два подмножества, а числа от 1 до 14 — на три. Вероятно, то же справедливо и дальше, но доказательства нет. Нет даже доказательства, что весь натуральный ряд нельзя разбить на конечное число подмножеств.

Зато нетрудно доказать, что весь натуральный ряд *можно* разбить на несколько подмножеств, если из него исключить какую-нибудь арифметическую прогрессию, начинающуюся с нуля (т. е. все числа, делящиеся на некое k, каково бы ни было k).

К примеру, если выбросить числа, делящиеся на 6, то весь натуральный ряд можно разбить на 3 подмножества, а если выбросить числа, делящиеся на 24 — то на 5. (Сделайте это.)

76. а) **Ответ.** Для нечётных n и только для них.

В самом деле, среднее арифметическое всех сумм «по два», очевидно, равно $2n+1$. Поэтому отрезок натурального ряда должен начинаться с некоторого числа $(2n+1)-k$ и заканчиваться, симметричным образом, числом $(2n+1)+k$, т. е. содержать $2k+1$ членов: $n=2k+1$.

Если $n=2k+1$, (соответственно $2n=4k+2$), то годится, например, такое разбиение:

$$\{4k+2, k+1\},\ \{4k+1, k\},\ \{4k-1, k-1\},\ \ldots,\ \{3k+2, 1\}$$

(получились все числа одной чётности), а далее

$$\{3k+1, 2k+1\},\ \{3k, 2k\},\ \ldots,\ \{2k+2, k+2\}.$$

б) Очевидно, что сумма всех этих разностей и сумма всех чисел $1+2+\ldots+2n$ имеют одинаковую чётность. Иначе говоря, суммы

$$1+2+\ldots+2n = n(2n+1) \quad \text{и} \quad 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— одной чётности. Отсюда сразу следует, что при $n=4k+2$, $n=4k+3$ задача решения не имеет.

Остаётся рассмотреть числа вида $4k$, $4k+1$. Для них подобрать подобное разбиение можно, но не просто.

Общая конструкция. Разобьём все числа от 1 до $2n$ на «большие», т. е. те, которые войдут в разность со знаком плюс, и «малые» (те, которые надо будет вычитать).

Поскольку $1+2+\ldots+2n=n(2n+1)$ и $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, то сумма всех «больших» чисел должна равняться $\dfrac{n(5n+3)}{4}$, а сумма малых — $\dfrac{n(3n+1)}{4}$.

Рассмотрим, например, случай $n=4k$, и попробуем включить в «малые» все числа от 1 до $2k$ и от $4k+1$ до $6k$. Но тогда их сумма будет равна

$$k(2k+1)+k(10k+1) = 2k(6k+) = \frac{n}{\frac{3n}{4}+1},$$

т. е. чуточку больше, чем требуется.

Для того чтобы арифметика сошлась, нужно, например, из «малых» выбросить число $5k$ и вместо него взять число $4k$.

Такая замена позволяет сделать ещё один «финт»: перейти с чётных разностей на нечётные. А именно, мы берём вначале все чётные разности по убыванию, т. е. пары $\{8k, 4k\}$, $\{8k-1, 4k+1\}$, …, $\{7k+1, 5k-1\}$ а затем (ведь число $5k$ пропущено, оно из «малых» перенесено в «большие») берём уже нечётные разности, т. е. пары $\{7k, 5k+1\}$, $\{7k-1, 5k+2\}$, …, $\{6k+1, 6k\}$.

Дальнейшее построение уже сравнительно нетрудно найти. Вот окончательная конструкция для $n=4k$.

Строим разбиение чисел от 1 до $8k$ следующим образом:

$\{5k, k+1\}$;

$\{2k+1, 1\}$; $\{8k, 4k\}$, $\{8k-1, 4k+1\}$, ..., $\{7k+1, 5k-1\}$

(получаются все чётные числа от $4k$ до $2k+2$ по убыванию);

$$\{7k, 5k+1\}, \{7k-1, 5k+2\}, \ldots, \{6k+1, 6k\}$$

(а здесь — все нечётные от $2k-1$ до 1);

$\{4k-1, 2\}$, $\{4k-2, 3\}$, ..., $\{3k+1, k\}$ (недостающие нечётные);

$\{3k, k+2\}$, $\{3k-1, k+3\}$, ..., $\{2k+2, 2k\}$ (недостающие чётные).

б) Конструкция для $n=4k+1$ аналогична. Действительно, числа от 1 до $8k+2$ можно разбить следующим образом:

$\{8k+2, 4k+2\}$, $\{8k+1, 4k+3\}$, ..., $\{7k+3, 5k+1\}$;

$\{5k+2, k+1\}$;

$\{7k+2, 5k+3\}$, $\{7k+1, 5k+4\}$, ..., $\{6k+3, 6k+2\}$;

$\{2k+2, 1\}$;

$\{4k+1, 2\}$, $\{4k, 3\}$, ..., $\{3k+3, k\}$;

$\{3k+2, k+2\}$, $\{3k+1, k+3\}$, ..., $\{2k+3, 2k+1\}$.

77. Решение. Как известно, пифагоровы тройки можно найти по формуле $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$. По предположению, $p^2-q^2=2pq\pm 1$, или $(p-q)^2=2q^2\pm 1$.

Последнее диофантово уравнение, как известно, имеет бесконечное множество решений; полагая $r=p-q$, можно указать последовательно такие пары: $(r, q)=(1, 0)$; $(1, 1)$; $(3, 2)$; $(7, 5)$; $(17, 12)$; ...

Соответственно получаем пары

$$(p, q) = (1, 0); (2, 1); (5, 2); (12, 5); (29, 12); \ldots$$

$$(x, y, z) = (1, 0, 1); (3, 4, 5); (21, 20, 29); (119, 120, 169); (697, 696, 985)\ldots$$

Таким образом, искомых пар существует бесконечно много.

78. Ответ. Это верно тогда и только тогда, когда числа a, b удовлетворяют равенству $\frac{k}{a}+\frac{l}{b}=1$ для некоторых подходящих k и l.

Доказательство.

Предварительная лемма. *Если a, b положительны, то для любых положительных m, n число $\frac{(m+n)ab}{a+b}$ лежит между ma и nb.*

Для доказательства леммы достаточно сначала вычесть из этого числа ma, а затем nb: разности равны соответственно $\frac{a(nb-ma)}{a+b}$ и $-\frac{b(nb-ma)}{a+b}$, они разных знаков.

Теперь предположим для начала, что выполнено равенство $\frac{1}{a}+$ $+\frac{1}{b}=1$. Тогда при любых натуральных m и n число $\frac{(m+n)ab}{a+b}=\frac{m+n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ целое. По лемме оно заключено между ma и nb, а это и означает, что целые части этих чисел разные.

Но если для чисел a и b выполняется требуемое неравенство, то тем более оно выполняется для кратных им чисел ka, lb. Это означает, что утверждение верно также и в том случае, если $\frac{k}{a}+\frac{l}{b}=1$, каковы бы ни были натуральные k, l. Итак, достаточность условия доказана. Перейдём к более сложному: докажем, что оно является и необходимым.

Забудем на время, что числа m, n должны быть целыми. Построим плоскость с координатами (m, n), и выясним, в каких точках плоскости выполняется равенство $[ma]=[nb]$.

Легко видеть, что это цепь прямоугольников размером $\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$, показанная на рис. 27. Их общей диагональю является прямая $am=bn$ (или, говоря точнее, их диагоналями являются отрезки этой прямой); мы будем называть её диагональю цепи, а прямоугольники — прямоугольниками цепи.

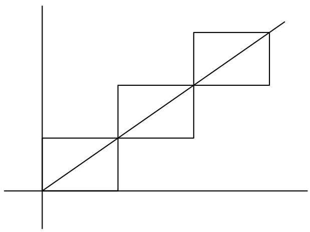


Рис. 27

Требуется доказать, что внутри этой цепи лежит хотя бы одна целая точка. Начнём с произвольной целочисленной точки на плоскости, и попытаемся её «загнать» внутрь нашей цепи. Очевидно, при этом мы вправе сдвигать точку в трёх направлениях, а именно:

i) на любое целое число вправо-влево (при этом целочисленная точка остаётся целочисленной),

ii) на любое целое число вверх-вниз,

iii) наконец, можно её также сдвинуть вниз на вектор $\left\{-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}\right\}$. Действительно, такой сдвиг переводит наши прямоугольники цепи один в другой, так что если после сдвига точка попала внутрь k-го прямоугольника, то до сдвига она лежала в $(k+1)$-м.

Однако «очевидно», что сдвигая точку сразу в трёх направлениях, мы плотно заполним её образами всю плоскость. Следовательно, точки-сдвиги исходной точки попадут, в частности, и в наши прямоугольники, что и требовалось доказать.

Остаётся, правда, выяснить, что означает «очевидно», и в частности — почему это «доказательство» не проходит, например, когда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

Разобраться в этом мы предлагаем читателям. *Подсказка*: для начала целесообразно доказать, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, то все точки-сдвиги попадают на семейство прямых вида

$$x+y=m, \quad \text{где } m=0, 1, 2, -1, -2, \ldots$$

79. Ответ. При $N=11$.

Доказательство.

i) *Не больше*. Допустим, что удалось расставить 12 чисел или больше: a_1, a_2, …, a_{12}. Выберем из них любые три подряд, и припишем к ним слева или справа ещё пять наших чисел (например: мы выбрали числа a_3, a_4, a_5 — припишем ещё числа a_6, a_7, …, a_{10}). Тогда сумма приписанных чисел, согласно условию, положительна, а сумма всех восьми — отрицательна. Следовательно, сумма любых трёх чисел подряд отрицательна.

Важнейшее замечание: соль решения в том, что к любой тройке всегда можно приписать либо 5 чисел слева (если номер первого числа больше 5), либо справа (если номер первого числа не больше 5, а последнего, следовательно, не больше 7).

Итак, сумма любых пяти чисел подряд положительна, а сумма любых трёх подряд отрицательна. Применим тот же приём вторично: выберем любые 2 числа подряд, и припишем к ним ещё три. По тем же соображениям получается, что сумма нашей пары обязана быть положительна.

Но это уже явно абсурдно. В самом деле, возьмём 6 чисел подряд, тогда, разбив их на две тройки, мы видим, что их сумма отрицательна, а разбив на три пары — что положительна. Противоречие.

ii) *Не меньше*. Пусть $N=11$ или меньше. Тогда приведённое рассуждение не проходит, поскольку к средней тройке — числам a_5, a_6 и a_7 — нельзя приписать ещё пять ни справа, ни слева.

Отсюда, впрочем, ещё ничего не следует. Однако вот **конструкция**.

Расставим одинаковые числа x со сдвигом на 5, а также на 8 номеров. Это значит, что числа, равные x, стоят на 1-м, 9-м, 4-м, а также 6-м, 11-м, 3-м и 8-м местах. На оставшиеся 4 места поставим число y.

Легко убедиться, что в таком случае сумма любой пятёрки чисел равна $3x+2y$, а сумма любой восьмёрки — $5x+3y$. Остаётся подобрать числа x, y так, чтобы первая сумма была положительна, а вторая отрицательна. Можно, например, положить $x=-5$, $y=8$.

Другое доказательство. п. i) Рассмотрим все пятёрки, какие можно выбрать подряд из 12 чисел. Их 8 штук, и они начинаются с первого, второго, ..., восьмого числа. Составим сумму всех пятёрок; исходные 12 чисел входят в эту сумму по нескольку раз, а именно столько, сколько показано в таблице:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	3	4	5	5	5	5	4	3	2	1

Теперь рассмотрим сумму всех восьмёрок, которые можно выбрать в таблице, и также посчитаем, по сколько раз каждое число войдёт в сумму всех восьмёрок. Легко убедиться, что получится *точно та же таблица*.

Это означает, что сумма

$$S=a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5(a_5+a_6+a_7+a_8)+4a_9+3a_{10}+2a_{11}+a_{12}$$

равна, с одной стороны, сумме всех пятёрок (т. е. положительна), а с другой — сумме всех восьмёрок (т. е. отрицательна). Противоречие.

Замечание. Эти же методы позволяют решить задачу в общем случае: если любая сумма m чисел должна быть положительна, а сумма любых n — отрицательна, причём m и n взаимно просты, то расставить можно максимально $m+n-2$ числа. Постарайтесь доказать это самостоятельно.

Ещё замечание. А как изменится ответ, если m и n имеют максимальный общий делитель r?

80. Ответ. Да, существует. Например, число 120 представимо 12-ю способами.

81. Сумма цифр S числа $\frac{A}{2}$ не может быть меньше $\frac{43}{2}$, т. е. 23. Кроме того, сумма цифр числа A равна $2S-9k$, где k — число переносов в разрядах при суммировании $\frac{A}{2}+\frac{A}{2}$. Соответственно, минимальная сумма цифр равна 26 (сумма цифр удвоенного числа равна $52-9k$, и может быть только 1 перенос).

Максимальная сумма равна 215. Можно взять число $55\ldots5\cdot2=$ $=11\ldots10$ (43 ненулевых цифры).

В самом деле, если в каком-то разряде происходит перенос, то у удвоенного числа в следующем разряде стоит нечётная цифра — следовательно, не нуль.

Поэтому переносов не может быть больше 43. В приведённом числе их как раз и будет 43.

82. Ответ-решение. Существует во всех трёх случаях.

а) Годится, например, число $A=1\,023\,456\,789$ ($2A=2046\,913\,578$). Добавим к этому, что если $A=123\,456\,7890$, то числа $2A$, $4A$, $7A$ и $8A$ — тоже полные (!).

б) Тут пример найти труднее. Идея поиска такова: легко сообразить, что если бы перенос в разрядах не происходил, то годилось бы *любое* полное число. Однако переносы неизбежно происходят.

Сумма цифр полного числа равна 45, поэтому при утроении нужно, чтобы произошло $(3\cdot45-45):9=10$ переносов в разрядах (при этом подразумевается, что при утроении, например, девятки происходит 2 переноса). Так как цифры 1, 2 не дают переноса (даже если после них стоит большая цифра), 4, 5 всегда дают один перенос, а 7, 8, 9 — два, то цифры 3 и 6 должны в сумме дать 2 переноса: либо после 6 должна стоять большая цифра, а после 3 — малая, либо наоборот.

Кроме того, цифры должны «пройти круг». Это означает следующее: если бы переносов в разрядах не было, то любое число из 9 или 10 разных цифр при утроении оставалось бы таким же: $1\to3$, $2\to6$, и т. д. — каждая цифра встретится по одному разу (в отличие от удвоения). Но так как неизбежно происходят переносы в разрядах, то к полученным цифрам прибавляются перенесённые из предыдущего разряда единицы или двойки. Сумма переносов должна дать ровно 10.

Исходя из этих соображений, можно найти различные ответы. Годится, например, число $1\,459\,837\,620$. При умножении его на три происходит следующее:

$$0\to0,\ 2\to6,\ 6\to8\quad\text{(и единица в уме)},$$
$$7\to1+1=2\quad\text{(и 2 в уме) и т. д.}$$

То есть, вместо того, чтобы пройти круги $1\to 3\to 9\to 7\to 1$, $2\to 6\to 8\to 4\to 2$ (а 0 и 5 переходят в себя), числа идут по такому кругу:

$$1 \to 3+1=4 \to 2+1=3 \to \ldots,$$

причём сумма добавленных единиц равна 10.

в) Существует. Найти здесь не очень легко. Однако годится, например, число $A=2\,865\,347\,109$.

Алгебра

83. *Указание.* $Q=(a+b)^3+(3b)^3$ и поэтому делится на $(a+b)+$ $+3b=a+4b$.

84. Ответ. $105\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}=15$.

Решение. При первой операции меняется знак у трети всех чисел. Поэтому от всей суммы S остаётся

$$S_1=\frac{2}{3}\cdot S+\frac{1}{3}\cdot(-S)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot S.$$

При второй операции на -1 умножается пятая доля плюс единиц и пятая доля минус единиц (почему?), следовательно, опять-таки от суммы остаётся

$$\frac{4}{5}\cdot S_1+\frac{1}{5}\cdot(-S_1)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdot S_1.$$

Убедитесь сами, что при третьей операции сумма умножается на $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$.

85. Решение. Легко доказать, что начиная с некоторого места a_r равно 0 или 1. (Можно даже указать, что это верно, например, с 250-й тысячи.) Однако в дальнейшем интервалы между полными квадратами возрастают, и потому в последовательности $\{a_r\}$ возникают всё более длинные «куски» из сплошных нулей. Для того чтобы получить кусок длины s, требуется только, чтобы для очередного возводимого в квадрат числа N выполнялось неравенство

$$(N+1)^2-N^2>1000\cdot(s+1),$$

т. е. $N>500\cdot(s+1)$. Поэтому период должен был бы состоять из одних нулей, что невозможно.

86. а) **Ответ.** Нет.

Решение. Поскольку $7^2 < 50$, а $7{,}8^2 > 60$, то в промежутке $[50\cdot 10^{10}; 60\cdot 10^{10}]$ содержится менее 10^5 (точнее, менее 80 000) квадратов. Поэтому квадратов «не хватает» на 10^5 шестизначных чисел, начинающихся с 5.

б) **Ответ.** Да.

Решение. В самом деле, пусть a — некоторое шестизначное число, меньшее $\sqrt{2\cdot 10^{11}}$. Тогда $a<4{,}5\cdot 10^5$, и потому

$$(a+1)^2-a^2=2a+1<10^6.$$

Отсюда ясно, что продвигаясь по ряду чисел $a^2, (a+1)^2, (a+2)^2, \ldots$ мы не пропустим ни одного шестизначного числа B: это могло бы случиться лишь в том случае, если бы оказалось, что $(a+k)^2<B\cdot 10^6$, тогда как $(a+k+1)^2\geqslant(B+1)\cdot 10^6$.

в) **Ответ.** Нет.

Решение. Рассуждение из п. а) здесь уже не проходит, так как $\sqrt{30}-\sqrt{20}>1$. Необходимо воспользоваться тем, что $\sqrt{30}-5<0{,}5$; отсюда следует, что не все шестизначные числа из промежутка $[25\cdot 10^4; 30\cdot 10^4]$ «закрываются» квадратами.

г) **Ответ.** 251 000.

Решение. Если $a<500\,000$, то $(a+1)^2-a^2<1\,000\,000$. Отсюда видно, что в ряде чисел $1^2, 2^2, \ldots, 500\,000^2$ встречаются все 6-значные «начала». Следовательно искомое число больше, чем $500^2 = 250\,000$. Рассмотрим теперь число

$$(500\,000+b)^2=25\cdot 10^{10}+1\,000\,000b+b^2.$$

Когда b пробегает значения $1, 2, \ldots$, второе слагаемое обеспечивает увеличение шестой слева цифры на 1; поэтому весь вопрос в том, когда именно член b^2 приведёт к «проскакиванию». Очевидно, это произойдёт при $b=1000$. Тогда имеем:

$$501\,000^2=251\,001\cdot 10^6,$$

откуда видно, что на 1002 шестизначных числа от 250 000 до 251 001 приходится только 1001 «корень» от 500 000 до 501 000, причём

$$500\,999^2=250\,999\,998\,001,$$

так что пропускается число 251 000. Допустим теперь, что кроме него было пропущено какое-то другое шестизначное число из промежутка [250 000; 251 000]. Тогда в этом промежутке пропущено два числа, и на 1000 «корней» приходится 999 квадратов. Из принципа Дирихле следует, что какое-то другое число в ряду квадратов встретится дважды; но этого быть не может, так как начиная с числа 250 000 расстояние между любыми двумя квадратами больше миллиона.

д) Решите эту задачу сами, приняв во внимание, что

$$3\cdot 10^5 \leqslant n < 4\cdot 10^5.$$

и что $N^3-(N-1)^3<3N^2$ для любого N.

Ответ. 13 цифр. (Почему двенадцати недостаточно?)

87. Решение. а) Невозможно, так как если N — общее кратное чисел $d_1, d_2, \ldots, d_m$, то среди первых N чисел не более $0{,}9\cdot N$ членов данных прогрессий.

б) Это возможно. Например: первая прогрессия начинается с единицы и имеет разность 2, т. е. состоит из всех нечётных чисел ($d_1 = 2$; $\{1, 3, 5, \ldots\}$), вторая начинается с 2 и имеет разность 8 ($d_2 = 8$; $\{2, 10, 18, \ldots\}$), третья начинается с 4 и имеет разность 32 и т. д.: k-я прогрессия начинается с первого из пропущенных до сих пор чисел и имеет разность 2^{2k-1}. Легко убедиться, что эти прогрессии не пересекаются; сумма обратных разностей равна

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}<0{,}9.$$

В действительности сумму обратных разностей можно сделать сколь угодно малой. (Как?)

88. *Указание.* Одно неравенство следует из того, что $2^3=8<3^2=9$; другое — из того, что $2^8=256>243=3^5$.

89. Решение. $2^{10}=1024>1000$, откуда следует, что $\lg 2>0{,}3$.

Поскольку $7^2\cdot 2=98<100$, то $2\lg 7+\lg 2<2$. Отсюда получаем, что $\lg 7<0{,}85$.

С другой стороны, $3{,}4^2>10$, т. е. $\lg 3{,}4>\frac{1}{2}$. Но $7^3=343$, следовательно, $3\lg 7>2{,}5$, $\lg 7>0{,}83$.

Отсюда получаем ответ: $\lg 7\approx 0{,}84$ (ошибка меньше 0,01). В действительности $\lg 7\approx 0{,}8451$.

90. Ответ. Максимум достигается, если эти числа «по возможности» равны между собой. Это значит, что $a_1=26$, $a_2=27$, …, $a_{25}=50$; $a_{26}=1$, $a_{27}=2$, …, $a_{50}=25$. Тогда каждый модуль равен 25, а вся сумма равна $5\cdot 50=250$.

91. Ответ. $c^2=a^2d$.

Указание. $\left(x+\frac{k}{x}\right)^2=x^2+2k+\frac{k^2}{x^2}$, откуда ясно, что после деления исходного уравнения на x^2 первый и последний член выражаются через y^2. Остаётся проследить за тем, чтобы величина k для второго и четвёртого членов была такой же, как для первого и последнего.

92. Ответ. Нет.

Решение. В самом деле, пусть $P(x)=Q(R(x))$ и y, z — корни Q. Тогда, используя теорему Виета для $Q(x)$, получаем:

$$P(x) = Q(R(x)) = k(R(x) - y)(R(x) - z),$$

откуда видно (используем теорему Виета для $R(x)$), что сумма корней первого и второго множителя одинакова. Таким образом, необходимое условие такого представления состоит в том, что корни $P(x)$ можно разбить на две пары x_1, x_2 и x_3, x_4 так, что

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

Можно показать, что это условие является и достаточным.

93. Ответ. $a^2 > \frac{8b}{3}$.

Решение. Если $y_1 = Ax + B$ — такая касательная, то функция $y - y_1$ должна иметь два двойных корня. Отсюда легко следует, что $y - y_1 = (x^2 + px + q)^2$. Числа p и q легко найти, исходя из того, что функция $y - y_1$ совпадает с y в степенях выше первой, а коэффициенты при первой и нулевой степенях x можно сделать произвольными за счёт выбора A, B. Прямое вычисление показывает, что

$$p = \frac{a}{2}, \quad q = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{8},$$

и тогда функция

$$y_1 = y - (x^2 + px + q)^2$$

линейна и задаёт искомую касательную. Остаётся, однако, вопрос: действительно ли она касается кривой y? Это зависит от того, будут ли корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ вещественными или мнимыми, т. е. от знака дискриминанта. Условие, указанное в ответе, и означает, что $D > 0$.

При $D = 0$ касательная прямая имеет две сливающиеся точки касания (т. е. одну точку касания 3-го порядка), а при $D < 0$ — две мнимые точки касания. Например, если $y = x^4 + x^2 + 1$, то прямая $y_1 = \frac{3}{4}$ имеет с графиком две мнимые точки касания; на графике они не видны, прямая лежит ниже графика.

94. Ответ. $x_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!} C_{n-1}^k$.

Решение. Решение этой системы связано с разложением дроби

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{(y+1)(y+2)\ldots(y+n)}$$

на простейшие. Именно, пусть эта дробь равна сумме

$$\frac{x_1}{y+1}+\frac{x_2}{y+2}+\ldots+\frac{x_n}{y+n},$$

тогда левые части уравнений — не что иное, как значения суммы при $y=0, 1, 2, \ldots, n-1$, а правые части — значения самой дроби. Теперь утверждения б) и в) непосредственно следуют из симметрии задачи относительно замены y на $n+1-y$. Пункт а) решается стандартным образом — приведением равенства $\frac{1}{Q}=\frac{x_1}{y+1}+\ldots$ к общему знаменателю, отбрасыванием знаменателя и подстановкой корней.

95. *Указание.* Решение этой задачи сходно с предыдущей. А именно, рассмотрим систему линейных уравнений, k-е уравнение которой имеет вид

$$\frac{x_1}{b_k-c_1}+\frac{x_2}{b_k-c_2}+\ldots+\frac{x_n}{b_k-c_n}=0.$$

(В правой части стоит 0 для всех уравнений, кроме n-го; если же $k=n$, то в правой части должна стоять единица.)

Тогда, во-первых, решение системы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ представляет собой последний столбец обратной матрицы (для нахождения других столбцов нужно рассмотреть в правой части единицу не на n-м, а на другом месте), а во-вторых, из формулы Крамера немедленно следует, что x_n есть частное двух определителей $\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$, где Δ_n — определитель данной матрицы, а Δ_{n-1} — такой же определитель, но $(n-1)$-го порядка. Это позволяет найти определитель системы по индукции.

Для нахождения $x_1, \ldots, x_n$ нужно, как выше, рассмотреть разложение на простейшие рациональной дроби

$$\frac{P(x)}{(x+b_1)\ldots(x+b_n)}=\frac{x_1}{x+b_1}+\ldots+\frac{x_n}{x+b_n},$$

где $P(-c_1)=\ldots=P(-c_n)=0$. Учитывая последнее уравнение, мы видим, что

$$P(x)=(x+c_1)\ldots(x+c_{n-1})\cdot\frac{(b_1-c_n)\ldots(b_n-c_n)}{(c_1-c_n)\ldots(c_{n-1}-c_n)},$$

откуда

$$x_n=\frac{P(-b_n)}{(b_1-b_n)\ldots(b_{n-1}-b_n)}=\frac{[(c_1-b_n)\ldots(c_{n-1}-b_n)]\cdot[(b_1-c_n)\ldots(b_n-c_n)]}{(b_1-b_n)\ldots(b_{n-1}-b_n)(c_1-c_n)\ldots(c_{n-1}-c_n)}.$$

Остальные x_k находятся аналогично.

96. Ответ. Если $k<n-1$, то $D=0$. Легко убедиться, что строки линейно зависимы.

При $k=n-1$ получаем $D=(-1)^{n(n-1)/2}((n-1)!)^n$.

97. Ответ. Предел равен $\sin 1$.

98. Решение 1. Вычет левой части в точке z, очевидно, равен z. Вычет правой части равен n, делённому на производную знаменателя, т. е. $\dfrac{n}{nx^{n-1}}$ при $x=z$. Но тогда $x^{n-1}=z^{n-1}=\dfrac{1}{z}$. Поэтому вычеты совпадают и разность левой и правой части имеет только устранимые особенности, т. е. является константой. Чтобы убедиться в том, что эта константа равна 0, достаточно, например, подставить в обе части равенства $x=0$.

Решение 2. Обозначим левую часть равенства через $f(x)$, правую часть равенства — через $g(x)$. Приведём сумму $f(x)$ к общему знаменателю; ясно, что она примет вид

$$f(x)=\frac{P(x)}{x^n-1},$$

где $P(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$.

Заметим далее, что левая часть (как и правая) не меняется при замене переменной x на ζx, где ζ — любой корень n-й степени из 1. Но тогда и $P(x)$ не меняется при такой замене (поскольку не меняется знаменатель x^n-1). Однако таким свойством обладают лишь многочлены вида $P(x)=Q(x^n)$. Учитывая степень $P(x)$, мы видим, что $P(x)=C$. Найти константу можно так же, как и в первом решении.

Решение 3 (А. В. Князюк). Пусть $P(x)=(x-a)\ldots(x-d)$ — любой многочлен. Тогда по формуле логарифмической производной

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-a}+\ldots+\frac{1}{x-d}.$$

Следовательно,

$$\frac{xP'(x)}{P(x)}=\frac{x}{x-a}+\ldots+\frac{x}{x-d};$$

с другой стороны,

$$\frac{nP}{P}=n=1+1+\ldots+1=\frac{x-a}{x-a}+\ldots+\frac{x-d}{x-d}.$$

Вычитая эти равенства одно из другого, мы получаем для любого многочлена:

$$\sum\frac{\xi}{x-\xi}=\frac{xP'-nP}{P},$$

где ξ пробегает все корни многочлена P. Условие данной задачи есть частный случай получившейся формулы для $P(x)=x^n-1$.

99. Решение. Начнём с задачи б). Ясно, что в каждый момент можно делать один и только один из двух возможных ходов (либо вправо, либо влево), т. е. игра действительно может продолжаться неограниченно, но её ход полностью предопределён начальным положением фишки. Ясно, что рано или поздно фишка окажется на поле, где она уже была. Сколько ходов пройдёт между двумя её попаданиями на это поле? Если считать, что между этими попаданиями было сделано x ходов вправо и y ходов влево, то (x, y) — решение уравнения $100x-47y=0$ в натуральных числах. Но наименьшее такое решение есть $x=47$, $y=100$, так что для возврата на старое место нельзя обойтись менее чем 147 ходами. Следовательно, за первые 147 ходов фишка обойдёт все поля по одному разу, а на 148-м она может попасть только на исходное поле (иначе оказалось бы, что она дважды попала на одно поле с интервалом менее 147 ходов).

Перейдём к задаче а). Поскольку числа 300 и 198 имеют общий делитель 6, количество снятых долларов кратно 6 и не может быть больше 498. Для того чтобы доказать, что можно снять 498 долларов, отметим аналогию задач а) и б). В том и другом случае в любой момент есть возможность делать только один ход из двух возможных (единственное исключение составляет случай, когда на счете лежит 302 доллара, но если такое положение создалось, то сняв 300, мы решим задачу; в остальных случаях если можно снять 300 долларов, то на счете имеется не менее 308 долларов, и у меня нет 198 долларов, чтобы их положить; соответственно, если фишку можно сдвинуть вправо, то её невозможно двигать влево). Таким образом, если сделать $(498:6+1=84)$ операции, то на счете возникнет каждое из 84 возможных положений, в том числе и 2 доллара.

100. Решение. Если

$$a_1+\ldots+\ldots+a_{2n}=0, \quad \text{то} \quad k=2n.$$

Пусть теперь эта сумма отлична от нуля; заметим, что она чётна. Поэтому $\dfrac{a_1+\ldots+\ldots+a_{2n}}{2}=r$ — целое число. Сумма $a_1+\ldots+a_k$ увеличением k на единицу меняется на 1, причём при $k=0$ она равна 0, а при $k=2n$ она равна $2r$. Поэтому на некотором шаге она будет равна r. Тогда и сумма оставшихся чисел будет равна r, что и требуется.

101. Ответ. Нет, не может (в обоих случаях).

Решение. а) Пусть $(n+1)$ — число участников, S_k — сумма очков k-го участника и A_k — число, указанное в условии. Докажем, что

$$A = \sum A_k \leqslant 0.$$

Пусть a_k и b_k — число выигранных и проигранных k-м участником партий соответственно, тогда

$$S_k = \frac{n + a_k - b_k}{2}.$$

Это число входит в общую сумму A несколько, а именно b_k, раз со знаком плюс и несколько, а именно a_k, раз — со знаком минус. Разбивая S_k на два слагаемых — постоянное $\frac{n}{2}$ и переменное $\frac{(a_k - b_k)}{2}$, мы видим, что

$$A = \frac{n}{2} \cdot \sum (b_k - a_k) + \sum \frac{(a_k - b_k)(b_k - a_k)}{2}.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу того, что на каждый выигрыш одного из участников приходится проигрыш другого, т. е. $\sum a_k = \sum b_k$, а второе очевидным образом неположительно (оно может равняться нулю в том и только в том случае, когда каждый из участников проиграл и выиграл одинаковое число партий, т. е. набрал ровно половину возможных очков).

б) Рассмотрим сумму $\sum S_k \cdot A_k$. Поскольку A_k состоит из слагаемых S_r, которые идут со знаками плюс и минус, то и вся сумма состоит из слагаемых $\pm S_k S_r$. Если k-й игрок выиграл у r-го, то такое слагаемое входит в общую сумму дважды — со знаком плюс в $S_k A_k$ и со знаком минус в $S_r A_r$. Если же они сыграли вничью, то такое слагаемое не входит в сумму вовсе. Так или иначе, все слагаемые взаимно уничтожаются и сумма равна нулю.

Поскольку все S_k положительны, это означает, что среди A_k имеются как положительные, так и отрицательные. Заметим, кстати, что это решение проходит и в случае задачи а).

102. Решение. Для доказательства первой формулы надо многократно итерировать следующие два соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{n+1}{n^2(n+1)} = \sum \frac{1}{n(n+1)} + \sum \frac{1}{n^2(n+1)}, \tag{2}$$

причём первый ряд в формуле (2) суммируется в конечном виде.

Применяя сначала первую, а затем вторую формулу непосредственно к левой части, мы получаем:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_2^\infty \frac{1}{n(n+1)} + \sum_2^\infty \frac{1}{n^2(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_2^\infty \frac{1}{n^2(n+1)}, \qquad (3)$$

первые два члена дают $\frac{3}{2}$, т. е. как раз первый член правой части. Для получения второго слагаемого нужно повторить процедуру, т. е. из ряда, оставшегося в правой части (2), опять выделить первый член (он равен $\frac{1}{12}$), а в оставшемся выражении домножить числитель и знаменатель на $n+2$. В результате полученное выражение опять-таки разбивается на два слагаемых, из которых одно суммируется в конечном виде; получившиеся два конечных члена относятся как $1:2$ и в сумме дают нужное второе слагаемое и т. д. Многократно итерируя этот процесс, мы и получим первую формулу.

Вторая формула доказывается точно тем же способом, с той лишь разницей, что если в первом случае числитель и знаменатель нужно последовательно домножать на $n+1$, $n+2$ и т. д., то во втором случае домножать нужно на n^2-1, n^2-4, n^2-9 и т. д.

103. Ответ. $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть сначала в прогрессии $2k+1$ членов, тогда среднее значение равно среднему члену и равно $\frac{1}{2k+1}$. Наименьший член больше 0, следовательно, наибольший меньше, чем $\frac{2}{2k+1}$, соответственно, не больше чем $\frac{1}{k+1}$. В прогрессии имеется k членов, которые больше среднего, поэтому её членами являются все числа $\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}, \ldots, \frac{1}{k+1}$. Но эти числа образуют прогрессию только в том случае, если их не более 2. Следовательно, $k=1$.

Случай чётного числа членов разбирается аналогично, и в этом случае решений нет.

104. Очевидно, если все площади больше нуля (в противном случае доказывать нечего), на каждой из 29 горизонталей должно быть по одному узлу, и все эти узлы стоят также на разных вертикалях. Таким образом, если нумеровать узлы по горизонталям, получается перестановка чисел $\{1, \ldots, 29\}$. Соответственно, задача может быть переформулирована следующим образом:

Числа $1, 2, \ldots, 29$ *переставлены произвольным образом, так, что число* k *стоит на месте с номером* a_k.

а) *Докажите, что существуют такие* k, r, *что модуль произведения* $M_{kr}=(k-r)(a_k-a_r)$ *меньше* 13.

б) *Верно ли, что существуют такие* k, r, *что модуль произведения* M_{kr} *меньше* 10?

Далее мы решаем именно эту задачу.

Решение. а) Назовём «соседями» a числа $a-1$ и $a+1$. Очевидно, каждое число имеет двух соседей, кроме 1 и 29, у которых только по одному соседу.

Допустим, что утверждение а) неверно, и рассмотрим числа, стоящие на местах с номерами от 12 до 18. Если разность каких-то двух их них равна 1 или 2, то $M_{kr} \leqslant 12$. Отсюда следует, что эти семь чисел не могут быть соседними или даже иметь общих соседей. Следовательно, у них не менее 12 различных соседей (было бы 14, но, возможно, два из них — числа 1 и 29, которые имеют только по одному соседу).

Хотя бы один из соседей попадает в интервал от 6 до 24 (вне этого интервала лежит только 10 чисел: 1—5 и 25—29), и этот сосед вместе с исходным числом даёт нужную пару, поскольку разность самих чисел равна 1, а разность мест не более 12.

б) Нет, неверно. Вот пример.

Пусть $a_k = 12k \pmod{29}$, т. е. $a_1 = 12$, $a_2 = 24$, $a_3 = 36 - 29 = 7$, и т. д. Докажем, что все M_{kr} не меньше 12.

Допустим противное. Тогда в формуле для M_{kr} по крайней мере один из сомножителей меньше четырёх. Пусть сначала это первый сомножитель; обозначим его R. Тогда второй сомножитель (обозначим его S) либо в 12 раз больше R (в этом случае очевидно, что произведение не меньше 12), либо отличается от $12R$ на число, кратное 29. Учитывая, что нас интересует не само число, а его модуль, можно сказать, что второй множитель всегда равен либо $12R$, либо $\pm 29 \pm 12R$, либо, наконец, $\pm 58 \pm 12R$. Конкретно получаем:

- Если $R=1$, то S может принимать только значения 12, 17.
- Если $R=2$, то S принимает значения 24, 5. В последнем случае $M_{kr}=10$, откуда и видно, что данный метод позволяет получить оценку 10, но не лучше.
- Если $R=3$, то S принимает значения 7, 22.

Остаётся рассмотреть случай, когда меньше четырёх не первый, а второй сомножитель S. В этом случае достаточно воспользоваться тем фактом, что $12^2=144=5 \cdot 29-1$, откуда следует, что $R=-12S \pmod{29}$, и надо просто повторить уже приведённое рассуждение.

105. Доказательство надо, конечно, проводить по индукции. Вопрос в том, какое именно утверждение надо положить в основу индукции. Оказывается, надо доказывать *индукцией по* n следующее утверждение: *для любых* $n, m > 0$ m*-я производная функции* $f_n(x)$ *монотонна и всюду сохраняет знак*.

Первый шаг доказательства: проверяем его «в лоб» для $n = 0$ и для всех m.

Действительно, все производные имеют вид $f_0^{(m)}(x) = A_m x^{1/2-m}$, и эти функции попеременно то возрастают, то убывают, в зависимости от знака коэффициента A_m.

Остаётся доказать, что если наше утверждение справедливо для данного n и для всех m одновременно, то оно верно для $n+1$ (и для всех m). Это уже несложно: сохранение знака очередных функций легко вытекает из монотонности предыдущих, а их монотонность — из сохранения знака производной. Сверх того, надо ещё проверить, что $f_{2010}(x)$ возрастает, а не убывает; убедитесь в этом сами.

106. Очевидно, при произвольном n имеется решение $x_1 = x_2 = \ldots$ $\ldots = x_n$ — положительный корень уравнения $x^2 + x = 0{,}9$.

Мы утверждаем, что при нечётном n других решений нет, а при чётном n есть ещё две серии решений, для которых $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_n$, $x_1 + x_2 = 1$. При этом x_1 является одним из двух корней уравнения $x + (1-x)^2 = 0{,}9$.

Для доказательства сравним x_k с x_{k+2}. Пусть, например, $k = 1$ (соответственно, $k + 2 = 3$) и $x_1 > x_3$. Тогда из равенства $x_1^2 + x_2 = x_3^2 + x_4$ следует, что $x_2 < x_4$. Но из этого аналогичным образом следует, что $x_3 > x_5$, и т. д.

Естественно, случай $x_1 < x_3$ совершенно аналогичен.

В итоге, в зависимости от того, как соотносятся x_1 и x_3, мы получаем одну из трёх цепочек неравенств (равенств): либо

$$x_1 > x_3 > x_5 > x_7 > \ldots,$$

либо

$$x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < \ldots,$$

либо, наконец,

$$x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = \ldots$$

Поскольку уравнения идут по кругу, эта цепь замкнётся, и в первом и втором случаях получается противоречие: $x_1 > x_1$.

Таким образом, $x_k = x_{k+2}$ для всех k. Остальное очевидно.

107. Ответ. а) 995. б) -997.

Доказательство. Приведём для начала примеры, когда эти суммы таковы.

Чтобы получить число 995, можно расставить минус единицы на местах с номерами: 1 и 2; 11 и 12; 21 и 22; …; 991 и 992. При этом среди произведений получится только две минус единицы (там, где минус единицы на 991 и 992 местах «цепляются» за минус единицы на 1 и 2 местах), во все остальные произведения входит ровно две минус единицы, так что произведение равно $+1$.

Чтобы получить число (-997), надо расставить минус единицы на местах 1, 11, 21, …, 991.

Теперь докажем, что в любую сумму входит не менее двух минус единиц и не менее одной плюс единицы.

Если мы перемножим все получившиеся произведения, то каждое число войдёт в него в 10-й степени, так что произведение равно $+1$.

Следовательно, среди полученных произведений чётное число минус единиц, и соответственно, нечётное число плюс единиц. Таким образом, есть по меньшей мере одна плюс единица, и минимальная сумма равна

$$998 \cdot (-1) + (+1) = -997.$$

Докажем теперь, что все произведения не могут равняться плюс единице. В самом деле, два соседних произведения $x_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_{k+9}$ и $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_{k+10}$ равны между собой тогда и только тогда, когда $x_k = x_{k+10}$. Но если это выполняется для всех k, то легко убедиться, что все наши числа должны быть равны между собой, а это противоречит условию.

108. Решение. Если прошло более 13 лет, то каждого из олигархов уже экспроприировали, и поэтому распределение денег будет таким: у самого бедного (экспроприированного в нынешнем году) 0 миллионов, у второго (экспроприированного год назад) 1 миллион, у следующего 2 и т. д. — всего $0+1+2+\ldots+12=78$ миллионов.

Допустим теперь, что прошло k лет, $k<13$, тогда имеется k экспроприированных олигархов, у которых имеется

$$0+1+\ldots+(k-1) = \frac{k(k-1)}{2} \text{ миллионов.}$$

Кроме того, есть $(13-k)$ тех, до кого ещё не дошли руки. У них денег $N+(13-k)\cdot k$, где N — количество денег, которое было у них изначально.

Поскольку вначале эти олигархи были самыми бедными,

$$N \leqslant \frac{31\cdot(13-k)}{13}. \qquad (*)$$

Максимум достигается, если, во-первых, неравенство $(*)$ является «почти равенством» (т. е. поначалу у всех олигархов было практически поровну), и во-вторых, при подходящем k.

Найти нужное k проще всего так: уже доказано, что поначалу все должны были иметь поровну, т. е. по $\frac{31}{13}=2,\ldots$ Обозначим это число r (миллионов).

Тогда в k-й год олигархи получают суммарно 12 миллионов, а теряют $r+(k-1)$. Поскольку $2<r<3$, отсюда сразу видно, что в первые 10 лет их суммарный капитал прибывает, а на 11-й начинает убывать; максимум достигается после 10 лет кампаний. В этот момент трое олигархов ещё не раскулачены; они имеют $30+3r$ миллионов, а остальные — $0+1+\ldots+9=45$ миллионов. Итого $75+3r=$ $=75+\frac{93}{13}=82+\frac{2}{13}=82$ миллиона 154 тысячи (с ошибкой менее 1000). Это и есть ответ.

109. Решение. Заметим прежде всего, что если в условии заменить строгие неравенства на нестрогие, то задача становится неверной, причём имеется *два* контрпримера:

а) $x_1=100$, $x_2=x_3=\ldots=x_{100}=0$;

б) $x_1=x_2=\ldots=x_9=\frac{100}{3}$, $x_{10}=\ldots=x_{100}=0$.

Наличие не одного, а двух (притом принципиально разных) контрпримеров показывает, что задача трудная. Но оно же, как мы увидим ниже, позволяет изящно завершить решение.

Перейдём к решению. Без ограничения общности можно считать, что

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{100},$$

и, таким образом, нам требуется доказать, что $x_1+x_2+x_3>100$.

Поскольку заведомо $10\,000<x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{100}^2\leqslant x_1\cdot(x_1+x_2+\ldots$ $\ldots+x_{100})$, и второй сомножитель меньше 300, то $x_1>\frac{100}{3}$.

Предположим, что наше утверждение неверно, т. е. $x_1+x_2+x_3\leqslant$ $\leqslant 100$, и применим известный приём «усиления неравенства». А именно, мы утверждаем, что можно без ограничения общности считать, что $x_2=x_3$.

В самом деле, если $x_2-x_3=a>0$, то мы можем заменить наши числа на такие:

$$x_1+a,\ x_2-a=x_3,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{100},$$

причём при такой замене левая часть первого неравенства из условия, как легко видеть, увеличивается, а вторая остаётся неизменной. Таким образом, оба неравенства остаются в силе, и по-прежнему $x_1+x_2+x_3 \leqslant 100$.

Далее, мы можем считать также, что $x_1+x_2+x_3=100$ (в противном случае опять-таки можно заменить числа $x_2=x_3$ на большие, уменьшив при этом какие-то из оставшихся чисел $x_4, \ldots, x_{100}$). При этом произойдёт то же самое: левая часть первого неравенства из условия увеличивается, вторая остаётся неизменной, и оба неравенства остаются в силе.

Итак, если условие неверно, то существуют такие числа $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{100}$, что $x_2=x_3=\dfrac{100-x_1}{2}$ и неравенства справедливы.

Но это уже нетрудно опровергнуть. В самом деле, в таком случае

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{100}^2 \leqslant x_1^2+x_2\cdot(x_2+\ldots+x_{100}) \leqslant \leqslant x_1^2+\left[\frac{100-x_1}{2}\right]\cdot(300-x_1),$$

откуда

$$x_1^2+\left[\frac{100-x_1}{2}\right]\cdot(300-x_1) > 10\,000.$$

Последнее условие является квадратичным неравенством относительно x_1. Можно было бы прямым вычислением проверить, что оно не может выполняться, но проще сослаться на соображения, высказанные вначале. А именно, мы видели, что это неравенство обращается в равенство при $x_1=100$ и при $x_1=\dfrac{100}{3}$. Достаточно бросить беглый взгляд на график параболы, чтобы увидеть, что на интервале между этими точками оно неверно, а это и требуется.

110. Решение. Запишем по биному Ньютона разложение $(k+1)^{m+1}$ для всевозможных k. Получим следующий набор формул:

$$(n+1)^{m+1} = (n+1)^{m+1} = n^{m+1}+C_{m+1}^1 n^m+C_{m+1}^2 n^{m-1}+C_{m+1}^3 n^{m-2}+\ldots$$

$$n^{m+1} = [(n-1)+1]^{m+1} = (n-1)^{m+1}+C_{m+1}^1(n-1)^m+ +C_{m+1}^2(n-1)^{m-1}+C_{m+1}^3(n-1)^{m-2}+\ldots$$

$$(n-1)^{m+1} = [(n-2)+1]^{m+1} = (n-2)^{m+1}+C_{m+1}^1(n-2)^m+ +C_{m+1}^2(n-2)^{m-1}+C_{m+1}^3(n-2)^{m-2}+\ldots$$

Просуммировав все эти формулы, мы видим, что в левой части стоят все $(m+1)$-е степени от 1 до $(n+1)$, а в правой — также все $(m+1)$-е степени, но от 1 до n, (а также много членов меньшей степени). Члены $1^{m+1}, 2^{m+1}, \ldots, n^{m+1}$ взаимно уничтожаются, и остаётся следующая формула:

$$(n+1)^{m+1} = C^1_{n+1}S(n,m)+C^2_{n+1}S(n,m-1)+C^3_{n+1}S(n,m-2)+\ldots \quad (4)$$

Эта формула позволяет получить рекуррентную формулу для $S(n,m)$. Тем самым доказан пункт а). В самом деле, в левой части стоит многочлен степени $(m+1)$, а в правой — $S(n,m)$ и ещё несколько слагаемых, каждое из которых, согласно индуктивному предположению, является многочленом от n степени не выше n (поэтому старший коэффициент не сокращается). Отсюда также находим несколько первых коэффициентов многочлена $S(n,m)$. Несколько дальнейших коэффициентов таковы:

$$a = \frac{1}{m+1}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{m}{12}, \quad d = 0, \quad \ldots$$

Взвешивания

111. Решение. а) Для простоты рассуждений завхоз добавляет одну пустую банку (весом 0) и включает её в список.

Первое взвешивание организуется так: на одну чашку он кладёт 27 самых тяжёлых банок (он знает, какие банки нужно взять), а на другую — 27 самых лёгких. Получается разность, наибольшая из всех возможных. Остальные члены турпохода должны признать, что разбиение на 3 группы (27 самых тяжёлых, 27 самых лёгких и 27 остальных) произведено правильно. Завхоз помечает банки буквами «т» (тяжёлые), «л» (лёгкие) и «с» (средние).

Второе взвешивание: на одну чашку кладутся 9 самых тяжёлых банок из числа 27, помеченных буквой «т», 9 самых тяжёлых из группы «с» и 9 самых тяжёлых из группы «л». На другую чашку — аналогично три самые лёгкие девятки из трёх групп, возникших при первом взвешивании. Опять получается максимальная разность из всех, которые могут получиться, если брать девятки из этих трёх групп. Остальные туристы опять должны признать, что выделение тяжёлых и лёгких групп проведено правильно. Завхоз помечает девятки второй буквой «т», «л» или «с», так что получается 9 групп по 9 банок в каждой, которые помечены парами букв «тт», «тс» и т. д.

Третье взвешивание: кладём на первую чашку по три самых лёгких банки из каждой группы, а на вторую — по три самых тяжёлых; аналогично помечаем банки третьей буквой, и в результате все банки будут разбиты на 27 групп. Четвёртым взвешиванием мы кладём на одну чашку по самой лёгкой банке из каждой группы, а на вторую — по самой тяжёлой. И на этот раз ясно, что разность весов будет максимальна по сравнению с любой другой комбинацией, при которой на каждую из чашек кладётся по одной банке из каждой группы. Тем самым завхоз доказал, что веса банок именно таковы, как он утверждал.

Замечание. Допустим, что вместо буквы «л» мы будем писать 0, вместо «с» — единицу и вместо «т» — двойку. Тогда на банке будет написано четырёхзначное число; проверьте, что оно есть простонапросто троичная запись номера банки (считая по увеличению весов) без единицы. (Почему?)

Легко убедиться, что при наличии N банок потребовалось бы $\log_3 N$ взвешиваний (с округлением до целого в сторону увеличения).

б) Предположим, что проделано только 3 взвешивания; при каждом взвешивании банка попадает либо на левую, либо на правую чашку, либо остаётся в стороне. В зависимости от этого пометим каждую банку одной из букв «т», «л» или «с» (последнее означает, что банка не взвешивалась). Аналогично напишем по букве после второго и третьего взвешиваний. Наборов из букв всего 27, а банок — 80. Значит, найдутся две банки с одинаковой маркировкой. Это означает, что при каждом взвешивании эти банки попадали на одну и ту же чашку (или одновременно откладывались в сторону); поэтому невозможно, основываясь на результатах только трёх взвешиваний, различить их.

112. Решение. Предположим, что плечи относятся как $1:2$. Положим на одну чашку три монеты, на другую шесть.

Если весы в равновесии, то эти девять монет настоящие, а фальшивая — одна из четырёх оставшихся. Кладём на одну чашку весов две настоящие монеты, а на другую — три подозрительные и одну настоящую. Если равновесие не нарушено, то фальшивая монета — последняя (можно третьим взвешиванием выяснить, легче она или тяжелее); если же равновесие нарушилось, то фальшивая — одна из этих трёх (причём известно, легче она или тяжелее). Тогда третьим взвешиванием кладём две из них на разные чашки, дополнив одну из чашек ещё одной, настоящей монетой. Этого достаточно, чтобы определить фальшивую.

Теперь допустим, что при первом взвешивании равновесие нарушено и что перевесила, например, чашка с тремя монетами. Тогда четыре оставшихся монеты — настоящие, а фальшивая — либо одна из трёх (тяжелее других), либо одна из шести (легче). Вторым взвешиванием мы можем разложить эти шесть «подозрительно лёгких» монет на две кучки по три в каждой (и дополнить одну чашку тремя настоящими монетами); это позволит определить, находится ли фальшивая монета на одной чашке, на другой, или она среди трёх «подозрительно тяжёлых». Третье взвешивание находится без труда.

113. Решение. а) Заметим прежде всего, что для пяти гирь достаточно восьми взвешиваний.

В самом деле, за три взвешивания можно расположить 3 гири в порядке их весов. Для того чтобы определить место четвёртой гири среди них, достаточно двух взвешиваний (сначала надо её сравнить со средней по весу); итак, за 5 взвешиваний удалось расположить 4 гири в порядке весов. Место пятой легко определить за 3 взвешивания.

Этот метод годится для любого числа гирь и позволяет расставить n гирь по весу за $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$ взвешиваний, где a_k равно $\log_2(k+1)$, округлённому до ближайшего целого сверху: $a_1=a_2=1$, $a_3=a_4=2$ и т. д. Оценка сверху, очевидно, равна $\log_2(n!)$, также округлённому в бóльшую сторону.

Однако для пяти гирь найденное решение не оптимально: можно обойтись семью взвешиваниями. Для этого надо действовать следующим образом.

Обозначим гири A, B, C, D, E. Взвесим сначала две разные пары гирь, и пусть $A>B$, $C>D$. Взвесим теперь A и C; очевидно, они равноправны, поэтому пусть $A>C$. Нетрудно заметить, что в каждом случае мы делили $5!=120$ вариантов расположения гирь по весам пополам, так что теперь осталось 15 возможностей.

Сравним теперь гири C и E. Имеется две возможности:

1) $C>E$; допустимо 8 вариантов порядка: $ABCDE$; $ABCED$; $ACBDE$; $ACBED$; $ACEBD$; $ACDBE$; $ACDEB$; $ACEDB$.

Тогда установлено, что A — самая тяжёлая, а гири D и E оказались равноправны; сравниваем их. Допустим, что $D>E$; тогда осталось найти гире B место между C, D, E, и это легко сделать за два взвешивания.

2) $E>C$; возможны 7 вариантов порядка: $ABECD$; $AEBCD$; $AECBD$; $AECDB$; $EABCD$; $EACBD$; $EACDB$.

Следующим взвешиванием сравним гири A и E. Если A тяжелее, то остаётся найти место гире B между гирями E, C, D, если же тяжелее гиря E, то у нас остаётся 2 взвешивания, чтобы выбрать один правильный вариант из трёх. В том и другом случае решение очевидно.

Стоит отметить, что это решение единственно (по крайней мере на первых четырёх ходах). В самом деле, если мы, например, на втором ходу пустим в ход одну из уже взвешенных гирь, то легко убедиться, что в зависимости от результата у нас останется либо 20, либо 40 вариантов (либо $A > B > C$, либо $A > B$ и $A > C$). Во втором случае задача, очевидно, не решается за 5 взвешиваний. Точно та же ситуация возникает на третьем и четвёртом ходах.

114. Ответ. Не обязательно. Если веса гирь — все чётные числа от 2 до 100, то он прав. В самом деле, тогда сумма весов, как легко сообразить, имеет вид $4k+2$, следовательно, весы были бы в равновесии только если бы на каждой чашке были гири суммарным весом $2k+1$, а это невозможно.

Дополнительный вопрос. *Верно ли, что этот пример — единственный? Иными словами, верно ли такое утверждение: если имеется* 50 *гирь, весом от* 1 *до* 100, *которые нельзя разложить на две чашки весов — то набор весов всех гирь определён однозначно*: 2, 4, 6, …, 100?

115. Решение. Пусть a_k — веса гирь, расположенные по убыванию:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_{12}.$$

Тогда из условия следует, что $a_1 - a_7 \geqslant 6$, аналогично для $a_2 - a_8$, и т. д. Таким образом, если на левую чашку весов положить гири a_1, …, a_5 а на правую — a_7, …, a_{11}, то левая чашка весит, как минимум, на 30 граммов больше. С другой стороны, добавив на правую ещё и гирю a_{12}, мы получим перевес правой чашки. Следовательно, $a_{12} > 31$. Отсюда $a_1 > 42$. Взяв гири весом 32, 33, …, 43, мы убеждаемся, что оценка точная.

116. а) Это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant 2$.

В самом деле, если $\alpha > 2$, то последняя гиря по весу более чем на 1 превышает сумму всех остальных, так что та часть набора, в которую она входит, заведомо слишком тяжёлая.

Пусть $\alpha \leqslant 2$. Начнём раскладывать гири по двум кучам, начиная с самой тяжёлой. Кладём её в одну кучу, а каждую следующую — в ту кучу, которая в данный момент легче.

Тогда очевидно, что после того, как положена очередная гиря, разность весов двух куч не больше, чем вес только что положенной гири. В частности, после того, как положена последняя, разность весов не больше 1, что и требуется.

б) Если $\alpha > \frac{3}{2}$, то опять-таки вес последней гири слишком велик — больше половины веса всех остальных гирь.

С другой стороны, если α ощутимо меньше $\frac{3}{2}$, например, если $\alpha \leqslant 1{,}3$, то задача имеет решение. Нужно опять-таки начать раскладку с самой тяжёлой гири, и затем класть каждую следующую в самую лёгкую из трёх куч. (*Указание*: докажите сначала, что после того, как вы положите три или меньше гири, самая тяжёлая куча перестанет быть таковой. Для доказательства используйте для неравенство $\alpha^3 < \alpha + 1$.)

Может быть, читателям удастся получить более точную оценку.

Что касается пункта в), мы опять-таки предлагаем читателям получить какие-нибудь оценки (пусть не точные).

Игры

117. Ответ. Нет.

Решение. Бегая только по диагоналям, мышка находится в опасности только в те моменты, когда она прибегает в одну из вершин; но перед этим она обязательно пробегает центр. Чтобы избежать лап кошки, ей нужно только правильно выбрать, в какую вершину бежать. Дело в том, что за время, которое ей нужно, чтобы добежать из центра до вершины ($t = 2{,}5$), кошка пробегает путь, равный 25; легко убедиться, что из исходного положения (какого угодно) она может, пройдя путь $S = 25$, попасть, самое большее, в 2 вершины прямоугольника, лежащие на одной из длинных сторон, тогда как две другие безопасны.

118. Решение. Начинающий выиграет, если съест кучку в 33 конфеты, а вторую разделит на кучи в 17 и 18 конфет. В дальнейшем он должен играть так, чтобы всё время оставлять противнику кучи с числом конфет $5k + 2$ или $5k + 3$ (проверьте, что он может этого добиться). Таким образом, его партнёр в конце концов должен будет делить кучку в 2 или 3 конфеты — и проиграет.

119. Решение. Наиболее естественные стратегии (их иногда называют «жадными» стратегиями) здесь являются и наилучшими.

Именно, на первом шаге первый мудрец должен вычеркнуть 512 чисел с одного из концов; либо от 513 до 1024, либо от 0 до 511. Тем самым его проигрыш будет не больше 512. На втором шаге он должен опять вычеркнуть числа с одного из концов оставшейся последовательности — либо 128 наибольших, либо 128 наименьших и т. д. Эта стратегия гарантирует, что ему придётся платить не больше 32, как бы ни играл второй. С другой стороны, второй мудрец может обеспечить себе выигрыш не меньше 32 при следующей стратегии: на первом ходу вычеркнуть из оставшихся чисел каждое второе (тем самым он обеспечивает себе выигрыш не меньше 2) и т. д. Детали мы оставляем читателю; заметим только, что число 32 (которое может гарантировать себе каждый из игроков, но только «с разных сторон») называется «ценой игры».

120. Решение. Ошибкой со стороны Пети было бы взять самое большое яблоко; в этом случае Вася успевает быстро съесть два маленьких и приняться за третье; Пете достанется только 600 г.

Оптимальное решение для Пети: начать с маленького яблока в 250 г, тогда если Вася возьмётся за самое большое, то Пете достанутся $250+300+400=950$ г, а если нет — Петя получит, во всяком случае, $250+600=850$ г.

Оптимальная стратегия для Васи, таким образом, — также не брать самое большое яблоко, а взять любое из двух других: 300 г или 400 г.

121. Ответ. Сможет, если будет постоянно делать ходы параллельно диагонали первого квадранта.

122. Ответ. Первый может обеспечить себе 499 очков, второй — 501.

Решение. Будем говорить, что один набор из k карт «не меньше» другого, если каждой карте первого можно сопоставить карту второго, которая не меньше. Будем говорить, что один набор из k карточек «строго больше» другого, если каждой карточке первого можно сопоставить карточку второго, которая строго больше.

Заметим, что если в некоторый момент игры набор карточек заменить на «не меньший», то при правильной игре можно сыграть не хуже, чем имея первоначальный (т. е. можно набрать не меньше очков).

Тогда верно следующее утверждение: если карточку соперника бить наименьшей из карточек, которыми её можно побить, либо сбрасывать самую маленькую карточку, то при правильной игре можно получить не меньше очков, чем при любом другом ходе (так как набор карточек, который получается при этом варианте хода, «не меньше»). Поэтому можно считать, что оба игрока ходят именно так.

Докажем сначала утверждение про второго игрока. Набор его карточек без наименьшей карточки «строго больше», чем набор карточек соперника. Теперь, пусть после k-го хода это свойство верно, тогда если он будет ходить каждый раз наименьшей карточкой, то второй отобьётся наименьшей своей карточкой. При этом набор карточек без наименьшей по-прежнему у первого игрока будет строго больше. Пусть первый сделает так 500 ходов.

На 501-м ходу у него останется 2 карточки. Пусть он ходит с большей.

Тогда у него ровно 501 очко.

У первого игрока набор «строго больше» набора второго игрока без самой большой карты. До того момента, как второй игрок положит наибольшую свою карточку, первый может сохранять это свойство следующим образом: будет ходить с наименьшей из своих карточек (свойство при этом сохранится). Карту соперника он также будет бить так, чтобы свойство сохранилось. После того как соперник пойдёт своей самой большой карточкой, первый пусть положит самую маленькую. Тогда его набор будет больше, чем набор второго без наименьшей карты, а значит, продолжая действовать по своей тактике, первый игрок при каждом ходе соперника будет получать очко. Таким образом он обеспечит 499 очков.

123. Ответ. При наилучшей игре X выигрывает 30 очков.

На первый взгляд кажется, что X должен стремиться создать побольше единиц, а Y — минус единиц.

Однако это не так, поскольку X в любой момент может переменить знак любого количества чисел (даже всех, или уж по меньшей мере 59-ти).

Следовательно, интерес Y состоит в том, чтобы на любом отрезке, по возможности, встречались как плюс, так и минус единицы (наличие одних только минус единиц для X столь же выгодно, как и наличие одних только плюс единиц).

Это значит, что оба партнёра вплоть до последнего хода должны следить не столько за количеством плюс и минус единиц, сколько за количеством перемен знака в ряду.

Поэтому рассмотрим сначала вспомогательную задачу о переменах знака.

А именно, рассмотрим вместо данных чисел всевозможные произведения двух соседних чисел (каждое число умножается на своего соседа по часовой стрелке; например, если исходные числа были: $1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, \ldots$, то новые будут: $-1, 1, 1, -1, 1, -1, \ldots$). Новых чисел будет также 60, и минус единицы стоят там и только там, где поначалу знак менялся. Заметим при этом, что минусов (а следовательно, и плюсов) непременно будет чётное число.

Очевидно, что когда X делает свой ход, то меняются ровно два новых числа, притом — любые, по его выбору (там, где начинается и кончается выбранный им ряд), а когда делает ход Y, то меняются любые два рядом стоящие числа.

В начальный момент все новые числа — минус единицы.

Докажем теперь, что Y всегда может добиться того, что среди них не более 30 плюс единиц, и что X может добиться того, что среди новых чисел будет не менее 30 плюс единиц.

а) Поначалу Y может играть как угодно. Но в тот момент, когда число плюсов стало больше 30 (это значит, что их стало 32), где-то есть два плюса, стоящих рядом. Заменив их на минусы, он уменьшает число плюсов до 30.

б) Действия X таковы: он заменяет на плюс единицы все числа, стоящие на чётных местах. Y своим ходом может испортить только одну из этих плюс единиц. Поэтому самое позднее на 29-м ходу X окажется, что на всех чётных местах стоят плюс единицы. Теперь ходит Y; имеется две возможности:

(∗) если хоть на одном нечётном месте также стоит плюс единица, то всего есть не менее 32 плюсов (по соображениям чётности) и после хода Y будет не менее 30 плюсов;

(∗∗) если же на всех нечётных местах стоят минус единицы, то Y своим ходом не может изменить число плюсов, и следовательно, после его хода так и останется 30 плюсов.

Итак, X может достичь ситуации, когда число плюсов равно 30. Теперь вернёмся к исходной задаче; для неё это означает, что числа стоят по кругу так, что имеется 30 мест перемены знака, т. е. имеется 15 групп подряд стоящих плюс единиц, и 15 групп минус единиц.

Теперь X 15-ю ходами заменяет все группы минус единиц на плюсы. Таким образом, если бы ходов Y не было, то оказалось бы, что все числа — плюс единицы. Но Y тем временем делает 15 ходов, которыми он может восстановить 15 минус единиц.

Дальнейшая игра, по сути, не нужна; из сказанного видно, что лучшее, что могут делать X и Y — это превращать по одному знаку: минус единицу в единицу или наоборот. После 100 ходов ситуация будет точно та же, что после 44-х: будет 45 единиц и 15 минус единиц.

124. а) Докажем, что Петя может выиграть, если n есть степень двойки, и только в этом случае.

В самом деле, пусть $n = 2^k$. Будем считать, что лунки занумерованы по часовой стрелке от 1 до 2^k, причём номер 2^k имеет отмеченная лунка. Стратегия Пети очень проста: если шарик находится в лунке номер s, он называет число s.

Если Вася сдвинет шарик против часовой стрелки, то он немедленно попадёт в отмеченную лунку. Значит, он вынужден сдвинуть шарик по часовой стрелке, т. е. в лунку номер $2s$.

Таким образом, после первого шага шарик обязательно находится в лунке с чётным номером. На следующем шаге номер лунки будет обязательно делиться на 4, и т. д. Поэтому не позже чем на k-м шаге номер лунки будет делиться на 2^k, а такая лунка только одна — отмеченная, что и требуется.

Пусть теперь n не является степенью двойки, т. е. имеет нечётный множитель, $n = (2r+1) \cdot 2^k$.

Пусть для начала $k = 0$, т. е. n — нечётно. Тогда Вася может для начала положить шарик в любую лунку (кроме отмеченной). Действительно, в этом случае расстояние между этой лункой и отмеченной будет чётным, считая по часовой стрелке, и нечётным в противном случае (или наоборот). Поэтому, назовёт ли Петя чётное число или нечётное, Вася в любом случае может сдвинуть шарик так, чтобы он не попал в отмеченную лунку — а больше ничего и не требуется.

То же самое верно и в том случае, если n чётно, но имеет нечётный множитель (т. е. $n = (2r+1) \cdot 2^k$, $k > 0$) с одним отличием: Вася должен положить шарик в лунку, номер которой s не делится на $2r+1$. В этом случае опять-таки, какое бы число t ни назвал Петя, либо $s+t$, либо $s-t$ не делится на 2^k, что и позволит Васе положить шарик в подходящую лунку.

Если же Вася по неосторожности положит шарик, например, в лунку номер $2r+1$, то Петя выиграет по той же схеме, что была приведена выше.

б) Выясним вначале, куда нужно положить шарик, чтобы Петя мог выиграть не более чем в 1 ход.

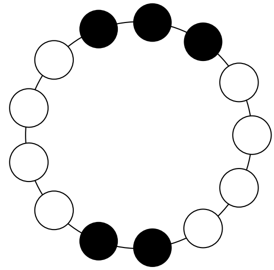


Рис. 28

Пусть опять-таки лунки пронумерованы от 1 до n, и отмечена лунка n. Тогда искомое множество (мы обозначим его Φ_1) состоит из двух групп лунок: во-первых, три лунки подряд с номерами $(n-1)$, n, 1 (шарик уже лежит в нужной лунке, и требуется 0 ходов), а во-вторых, две или три лунки напротив этих. Конкретно, если n чётно, $n=2k$, то в Φ_1 входят три лунки с номерами $k-1$, k, $k+1$, если же n нечётно, $n=2k+1$, то годятся только две лунки с номерами k, $k+1$. Во всех случаях Петя выигрывает в 1 ход, назвав число k (см. рис. 28).

Теперь пусть уже найдено множество Φ_r тех лунок, начиная с которых Петя выигрывает не более чем в r ходов. В это множество, во всяком случае, входят две найденные нами группы, в каждой не менее двух лунок подряд.

Разделим пополам интервал между какими-нибудь двумя лунками, входящими в Φ_r; например, пусть в Φ_r входят 37-я и 49-я лунки — рассмотрим 43-ю. Если шарик лежит в ней, то Петя может назвать число 6, и куда бы Вася ни двинул шарик, он попадает в множество Φ_r, так что 43-я лунка входит в Φ_{r+1}.

Правда, это невозможно, если расстояние между лунками нечётно (например, 12-я и 17-я); именно поэтому в задаче а) Петя выигрывает не всегда, а только при некоторых n. Но поскольку в Φ_r входят группы в две и три лунки (достаточно было бы и двух), то всегда можно найти пару лунок в Φ_r, расстояние между которыми чётно.

Это значит, что Φ_{r+1} всегда строго больше, чем Φ_r (есть лунки, которые ещё не входят в Φ_r, но уже входят в Φ_{r+1}), т. е. множество Φ_r всё время увеличивается, и через некоторое время совпадёт с множеством всех лунок.

Это значит, что в игре б) Петя выигрывает всегда.

Таблицы

125. Решение и анализ. Будем считать, что ничьих в турнире не было (ясно, что заменив ничью выигрышем любой из команд, мы не испортим таблицу).

Условимся теперь о терминологии. Если команда A выиграла у команд B, C, …, E, то такую команду мы будем называть «общим победителем» группы B, …, E. Если для n команд можно составить турнирную таблицу, в которой любые s команд имеют общего победителя, мы назовём такую таблицу **решением** задачи типа (n, s). Сама же наша задача, очевидно, может быть сформулирована для произвольных n, s таким образом: существует ли турнирная таблица, которая является решением задачи типа (n, s)? Исходная задача а) тогда переформулируется так: **доказать, что задача типа** $(n, 2)$ **не имеет решений при** $\boldsymbol{n \leqslant 6}$.

Заметим прежде всего, что задача типа (2, 1) не имеет решений: если команды всего две, то одна из них выиграла у другой, и для команды-победительницы нет команды, которая у неё выиграла.

Далее, очевиден следующий факт: **если задача** $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s})$ **не имеет решения, то и задача** $(\boldsymbol{2n+2}, \boldsymbol{s+1})$ **также не имеет решения**. В самом деле, при $2n+2$ командах неизбежно имеется команда A, у которой выиграло не более n команд. С другой стороны, предполагается, что существует команда, выигравшая у A и, сверх того, у любых данных s команд; такую команду придётся искать среди этих n или менее команд, т. е. придётся решать задачу типа (n, s), которая, по предположению, решения не имеет.

Отсюда сразу вытекает решение задачи а). Более того, это означает, что задача $(n, 3)$ может иметь решение только при $n \geqslant 15$, задача $(n, 4)$ — только при $n \geqslant 31$ и т. д.

Прежде чем пойти дальше, разберёмся подробнее в ситуации для семи команд. Мы утверждаем: во-первых, решение (турнирная таблица) в этом случае единственное с точностью до перенумеровки команд, во-вторых, это решение даёт следующая конструкция.

(K) Командам присваивается номер — вычет по модулю 7, и x выиграла у z, если $x-z$ — квадратичный вычет.

Докажем сначала, что **(K)** даёт решение. Возьмём любые две команды x, y. Поскольку из двух чисел $x-y$, $y-x$ одно является квадратичным вычетом, а другое нет, будем для определённости считать, что вычетом является $y-x$.

Если z — общий победитель для x и y, то при произвольном a $z-a$ — общий победитель для $x-a$, $y-a$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $x=0$.

Поскольку, далее, конструкция не меняется также и в случае, когда x, y заменяются на xb, yb, где b — квадратичный вычет, и поскольку мы уже условились считать $x=0$, можно умножить y на квадратичный вычет, в частности на $1/y$, что позволяет свести задачу к одному-единственному случаю $x=0$, $y=1$.

Ясно, что нетрудно указать общего победителя для этой пары (это будет $z=2$). Замечательно, впрочем, то, что можно не подбирать общего победителя даже и в этом случае, а рассудить так: поскольку каждая команда выиграла 3 матча, то имеется пара команд с общим победителем. А так как только что было доказано, что все пары равноправны, то общего победителя имеет также и пара (0, 1), и вообще любая пара.

Наметим теперь доказательство того, что решение единственно с точностью до перенумерации.

Из приведённых выше рассуждений следует, что решение возможно только в том случае, если каждая команда проиграла не менее трёх матчей; но при 7 командах это означает, что каждая выиграла и проиграла ровно по 3 матча. Тогда для каждой команды имеется ровно 3 пары команд, у которых она выиграла; а так как всего есть 21 пара, то конструкция возможна, только если **для каждой пары A, B имеется единственная команда C, которая выиграла у A и B**.

Рассмотрим теперь произвольную команду A, и пусть B, C, D — команды, которым она проиграла. Допустим для определённости, что B выиграла у C. Тогда D — единственная команда, которая могла выиграть у A и B; следовательно D выиграла у B и (по аналогичной причине) C выиграла у D. Остаётся выяснить, как сыграли свои матчи три команды E, F, G, у которых A выиграла. Каждая из команд B, C, D выиграла у них по одному матчу и по два проиграла. Допустим, что B и C выиграли у одной и той же команды E; тогда обе они выиграли у пары (A, E), что противоречит сказанному выше. Следовательно каждая из команд B, C, D выиграла ровно у одной из этих команд: B — у E, C — у F, D — у G. Разобраться в том, как сыграли между собой E, F, G, мы предоставляем читателю.

Теперь перейдём к числам, большим 7.

Приведённый выше метод позволяет без особого труда решить задачу б). В самом деле, рассмотрим конструкцию, аналогичную **(К)**, для p команд, где p — достаточно большое простое число вида $4k+3$ (если $p=4k+1$, то не выполняется очевидное условие «если команда x выиграла у z, то команда z проиграла x»). Рассуждая как выше, мы убеждаемся, что для того чтобы доказать утверждение: «для любых трёх команд x, y, z существует четвёртая команда t, которая выиграла у всех трёх», достаточно доказать его для случая $x=0$, $y=1$ и произвольного z.

Эту задачу приходится уже решать перебором; однако он уже невелик. Для $p=19$ перебор показывает, что утверждение верно. С другой стороны, как мы видели, p не может быть меньше 15. Числа между 15 и 18 остаются под сомнением.

Даёт ли конструкция **(К)** решение для произвольного s, если p достаточно велико? Мне неизвестен ответ, но правдоподобно, что он положителен. Похоже на то, что квадратичные вычеты по модулю p ведут себя примерно так же, как орлы и решки при бросании монеты. А именно, если начать со случайно выбранного числа n, $0<n<m$, то вычеты чисел $n, n+1, n+2, \ldots$ есть набор единиц и минус единиц, который ведёт себя как случайный (в нём около половины единиц и т. д.)

Чтобы получить корректное решение задачи в), применим намеченный выше подход «случайной таблицы». А именно, пусть имеется N команд и результат каждой встречи (выигрыш или проигрыш) распределён случайно. Пусть для определённости $s=5$; рассмотрим произвольную пятёрку команд A, B, C, D, E и найдём вероятность того, что ни одна команда Z не выиграла у всех пяти. Для одной команды такая вероятность составляет, очевидно, $1-\frac{1}{32}$. Поэтому вероятность, что ни одна из M ($M=N-5$) команд не выиграла, равна $\left(1-\frac{1}{32}\right)^M$. С ростом N эта вероятность стремится к нулю как экспонента; с другой стороны, число пятёрок (A, B, C, D, E) растёт всего лишь как степенная функция, и потому при больших N с ненулевой вероятностью для любой пятёрки существует общий победитель.

Для того чтобы превратить это рассуждение в строгое доказательство, надо лишь перейти от теории вероятностей к комбинаторике. Рассмотрим всевозможные таблицы, описывающие турнир N команд; выберем произвольную пятёрку (A, B, C, D, E), тогда доля таблиц, в которых эта пятёрка не имеет общего победителя, составляет $\left(1-\frac{1}{32}\right)^M$. Поэтому доля таблиц, в которых любые 5 команд имеют общего победителя, не меньше, чем $1-C_N^5\cdot\left(1-\frac{1}{32}\right)^M$, и при больших N эта величина положительна, т. е. искомая таблица существует. Тем самым решена (в положительном смысле) задача в).

126. Решение. Как ни странно, такая ситуация возможна.

Например: в турнире участвует 11 команд, т. е. играется 10 матчей по 2 партии в матче, всего 20 партий.

В команде *A* первый номер играл все 10 партий и набрал в них 6,5 очков (65 %), а второй и запасной — по 5 партий, и каждый из них набрал по 4,5 очка (по 90 %).

Итого команда *A* набрала 15,5 очков.

В команде *B* игрок №1 набрал 2,5 из 4 (62,5 %), а номера второй и третий — по 7 из 8 (по 87,5 %). В результате команда *B* набрала 16,5 очков.

Но это ещё не самое интересное. Допустим, что проводится не турнир, а матч двух команд, но в несколько кругов. Оказывается, что даже здесь возможен случай, когда команда *A* на каждой доске набрала процент очков больше, чем команда *B*, но тем не менее команда *B* выиграла матч.

На первый взгляд, это абсурдно, ведь чтобы победить, надо, чтобы у вас было больше 50 %, а у противника, соответственно, меньше. Тем не менее...

Допустим, что в команде три участника (один запасной), и матч проходит в 8 кругов. Таким образом, играется 16 партий.

Команда *A*: игроки **А**, **Б**, **В**.

Команда *B*: игроки **а**, **б**, **в**.

1 тур:	**А**	0,5 : 0,5	**а**	**Б**	0 : 1	**в**
2 тур:	**А**	0,5 : 0,5	**а**	**Б**	0,5 : 0,5	**в**
3 тур:	**А**	1 : 0	**б**	**Б**	0,5 : 0,5	**в**
4 тур:	**Б**	0 : 1	**а**	**В**	1 : 0	**б**
5 тур:	**Б**	0 : 1	**а**	**В**	0,5 : 0,5	**б**
6 тур:	**Б**	0,5 : 0,5	**а**	**В**	0,5 : 0,5	**в**
7 тур:	**Б**	0,5 : 0,5	**а**	**В**	0,5 : 0,5	**в**
8 тур:	**Б**	0,5 : 0,5	**а**	**В**	0,5 : 0,5	**в**

В итоге команда *A*:

А	набрал 2 из 3	67 %
Б	набрал 2,5 из 8	31 %
В	набрал 3 из 5	60 %
всего 7,5 из 16		

Команда *В*:

а	набрал 4,5 из 7	64 %
б	набрал 0,5 из 3	17 %
в	набрал 3,5 из 6	58 %
всего 8,5 из 16		

127. Да, могло. Пусть, например, $n=4$, и таблица *до* турнира выглядела так:

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Рейтинг до турнира**
А	**	2 из 4	2 из 3	2 из 3	6 из 10, или 60
Б	2 из 4	**	2 из 3	2 из 3	6 из 10, или 60
В	1 из 3	1 из 3	**	12 из 24	14 из 30, или 46,666
Г	1 из 3	1 из 3	12 из 24	**	14 из 30, или 46,666

а таблица турнира выглядела так:

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Рейтинг по результатам турнира**	**Окончательный (суммарный) рейтинг**
А	**	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	58,333	59,0909…
Б	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	**	$1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	58,333	59,0909…
В	$0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	**	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	41,667	45,238…
Г	$0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	**	41,667	45,238…

Причина в том, что участники *до* турнира могли встречаться каждый с каждым *неравное* число раз (как оно практически всегда и бывает на практике). Если бы к условию задачи было добавлено условие «до турнира каждый встречался с каждым одно и то же число раз», такая ситуация была бы невозможна. Докажите это!

128. Прежде всего переменим знак у всех чисел последней строки, а затем — также у всех чисел последнего столбца (т. е. у всех сумм). При этом последнее число остаётся без изменений (мы дважды меняли его знак). Теперь таблица обладает следующим свойством: сумма чисел в любом ряду («рядом» мы будем называть строку или столбец) равна 0. Будем округлять так, чтобы это свойство соблюдалось.

Если один из рядов таблицы (строка или столбец — безразлично) целиком состоит из целых чисел, то его трогать, во-первых, запрещено, а во-вторых, не нужно. Поэтому мы будем рассматривать только те ряды, в которых есть нецелые числа; очевидно, таких чисел всегда не менее двух в ряду.

Применим индукцию по количеству нецелых чисел в таблице (если их ноль, то опять-таки доказывать нечего). Пусть в данный момент в таблице N нецелых чисел. Будем считать, что всё доказано для всех таблиц данного размера, в которых нецелых чисел меньше чем N.

Построим граф, вершинами которого являются ряды данной таблицы (при этом ряды, состоящие из целых чисел, мы не рассматриваем), а рёбра соединяют строку и столбец, если число, стоящее на их пересечении — нецелое. (Таким образом, все вершины разбиты на две группы, и любое ребро соединяет вершину первой группы с вершиной второй.) По предположению, из каждой вершины исходит не менее 2 рёбер. Отсюда сразу следует, что в графе есть цикл. Без ограничения общности можно считать, что этот цикл имеет следующий вид: 1—1; 1—2; 2—2; 2—3; 3—3; …, $(n-n)$; $(n-1)$.

Это значит, что нецелые числа, входящие в цикл, расставлены так, как показано на рис. 29.

a_1	b_1						
	a_2	b_2					
		a_3	b_3				
			a_4	b_4			
b_5				a_5			

Рис. 29

Теперь заставим эти числа «ползти» к целым. А именно, мы будем уменьшать числа a_i и увеличивать числа b_i на одно и то же число: тем самым сумма по строкам и по столбцам остаётся неизменной.

Будем увеличивать до тех пор, пока хотя бы одно число не станет целым. (Тот же процесс можно описать и несколько иначе: рассмотрим числа $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$, а также числа $\{1-b_1\}, \{1-b_2\}, \ldots, \{1-b_n\}$. Пусть ε — наименьшее из этих чисел, тогда надо уменьшить a_i и увеличить b_i именно на ε.)

Теперь в таблице стало, как минимум, на одно целое число больше, и остаётся применить индукцию.

129. Решение. Рассмотрим двух участников X и Y. Если X одержал меньше побед, чем Y (по крайней мере, на одну), но при этом набрал больше очков, то «дополнительные» очки он мог набрать только на ничьих. Ему требовалось набрать на ничьих хотя бы на полтора очка больше; следовательно, X сделал, как минимум, на три ничьи больше, чем Y.

Следовательно, A сделал по крайней мере на 3 ничьи больше, чем B. Но эти «лишние» ничьи он мог сделать, только играя с C. Следовательно, C сыграл не менее 3 партий вничью (притом с A), тогда как A сделал, следовательно, не менее 6 ничьих. Поскольку эти 6 ничьих не совпадают с упомянутыми тремя, в сумме как раз и получается 9.

Осталось ещё доказать, что можно ограничиться 9-ю ничьими. Вот **пример**: пусть турнир проходил в 6 кругов, т. е. было сыграно 18 партий. A выиграл 2 партии (обе у C) и проиграл одну (ему же), тогда как B и C сыграли 3:3 (без ничьих): каждый выиграл у другого по 3 партии. Таким образом, A выиграл 2 партии и проиграл одну, B выиграл 3 и проиграл тоже 3, а C выиграл 4 и проиграл 5. Всего было 9 выигранных партий и, соответственно, 9 ничьих, что и требуется.

Комбинаторика; разное

130. Ответ. Да, можно.

Решение. Возьмём все номера, сумма цифр которых делится на 10. Любые два таких номера, очевидно, различаются не менее чем в двух местах, поэтому при вычёркивании одной цифры никакие два не совпадают.

Это решение, разумеется, не единственно. Пусть, например, $x_1, \ldots, x_6$ — цифры номера, зададим какие-нибудь целые числа $a_1, \ldots, a_6$, b и возьмём все те номера, для которых $a_1x_1 + \ldots + a_6x_6 + b$ делится на 10. Докажите сами, что если $a_1, \ldots, a_6$ взаимно просты с 10, а b произвольно, то получающийся набор содержит ровно 100 000 номеров, удовлетворяющих условию задачи. Наше исходное условие соответствует случаю $a_1 = \ldots = a_6 = 1$, $b = 0$. Подумайте, что произойдёт, если a_i не будут взаимно просты с 10, например, если $a_1 = 2$.

Замечание. Задачи этого типа возникают в теории кодов. Назовём *расстоянием* между двумя телефонными номерами $d(A, B)$ число мест, на которых эти два номера различаются (например $d(012345, 212365) = 2$, так как номера различаются на 1-м и 5-м местах). Множество телефонных номеров называется *кодом*; основная задача теории кодов состоит в том, чтобы выбрать код, имеющий как можно больше номеров, но так, чтобы расстояние между любыми двумя номерами было не меньше d. Число d называется кодовым расстоянием; построенный нами код имеет кодовое расстояние $d = 2$.

131. Решение. За 11 сеансов школьники совершили 22 «сеансопосещения». Если все 11 сеансов в кинотеатре №1 были посещены, то на остальные 6 кинотеатров пришлось не более 11 посещений. Но тогда хотя бы в одном из них был посещён только 1 сеанс. Следовательно, кто-то из школьников (тот, кто был в это время в кинотеатре №1) в нём вообще не побывал, что противоречит условию.

132. Решение 1. Тривиальное решение состоит в том, что если все слагаемые привести к общему знаменателю 1996!, то все числители заведомо делятся на 1995, кроме двух последних. А два последних числителя равны соответственно 1996 и 1; поэтому их разность делится на 1995.

Решение 2. Задача имеет, однако, и гораздо более интересное решение. Дело в том, что выписанная дробь есть не что иное, как вероятность того, что при случайном раскладывании 1996 писем по 1996 конвертам ни одно письмо не будет вложено в нужный конверт (докажите это!) Знаменатель 1996! есть полное число способов раскладки, а числитель, стало быть, — число всех «плохих» способов.

Но при любом «плохом» способе письмо адресату №1 должно быть вложено в один из остальных 1995 конвертов; и ясно, что число способов во всех этих 1995 случаях одинаково. Вот потому-то число «плохих» способов раскладки обязано делиться на 1995.

133. Решение. Доказательство этого факта связано с прямым вычислением чисел N и M. Именно, известно, что

$$N = n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}\right),$$

а отсюда следует, что для M справедлива сходная формула с заменой n на $n-1$:

$$\frac{M}{n} = (n-1)!\left(1 - 1 + \ldots \pm \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

Из них немедленно следует нужный результат.

Интереснее было бы найти доказательство, устанавливающее напрямую «почти точное» взаимно однозначное соответствие между перестановками первого и второго типа. Попытайтесь сделать это самостоятельно.

134. Решение. Заметим прежде всего, что номер любого фиолетового билета делится на 11, а поэтому и искомое максимальное расстояние d делится на 11. Далее, нетрудно заметить, что между билетами 908 919 и 909 909 нет ни одного фиолетового; это значит, что $d \geqslant 990$. С другой стороны, билеты вида $\overline{abcabc}$ всегда фиолетовые (будем в дальнейшем называть их ультрафиолетами), а расстояние между двумя соседними ультрафиолетами равно 1001.

Поэтому $990 \leqslant d \leqslant 1001$, а поскольку d делится на 11, возможны лишь два ответа: либо $d = 990$, либо $d = 1001$. Что же верно?

Докажем, что между любыми двумя ультрафиолетами есть ещё хотя бы один фиолетовый билет, откуда, очевидно, следует, что $d = 990$. В самом деле, пусть $\overline{abcabc}$ — очередной ультрафиолет, отличный от 999 999. Пусть сначала $b < 9$. Если ещё и $c < 9$, то фиолетовым будет билет $\overline{abca(b+1)(c+1)}$, номер которого увеличен на 11; если $a < 9$, то фиолетовым будет билет $\overline{abc(a+1)(b+1)c}$. Остаётся рассмотреть билеты вида $9b99b9$; нетрудно убедиться, что между ним и следующим ультрафиолетом имеется, например, фиолетовый билет $\overline{9(b+1)000(8-b)}$. (Например, между билетом 929 929 и следующим ультрафиолетом 930 930 имеется билет 930 006.)

Случай $b = 9$ разбирается аналогично. Сделайте это сами.

135. Ответ. Это возможно тогда и только тогда, когда n чётно. В этом случае легко строится пример нужной расстановки; мы приводим его для $n = 6$ (рис. 30).

1	1	1	1	1	1
−1	1	1	1	1	1
−1	−1	1	1	1	1
−1	−1	−1	0	1	1
−1	−1	−1	−1	0	1
−1	−1	−1	−1	−1	0

Рис. 30

Решение. Докажем, что при нечётном n требуемой расстановки не существует. Пусть в квадрате $n \times n$ числа расставлены произвольным образом, и пусть $a_1, \ldots, a_n$ — суммы чисел по строкам, а $b_1, \ldots, b_n$ — по столбцам. Предположим, что все они различны.

Заметим, что при перестановке в таблице каких-нибудь двух строк или столбцов эти суммы (а только они нас интересуют) не меняются; поэтому, переставив, если нужно, строки и столбцы, мы сможем считать, что

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n \quad \text{и} \quad b_1 > b_2 > \ldots > b_n.$$

Кроме того, очевидно, $a_1 \leqslant n$, $a_n \geqslant -n$ и $b_1 \leqslant n$, $b_n \geqslant -n$. Таким образом, наши числа могут принимать лишь $2n+1$ значений: $-n$, $-n+1$, …, $-1, 0, 1, 2, \ldots, n$. Поэтому среди чисел a_i, b_i встречаются ВСЕ эти числа, кроме одного. Предположим для определённости, что единственное отсутствующее число неположительно; таким образом, среди чисел a_i, b_i имеется n положительных и n неположительных.

Пусть r — наибольший номер, для которого $a_r > 0$, а s — наибольший из номеров, для которых $b_s > 0$; таким образом,

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_r > 0 \geqslant a_{r+1} > \ldots > a_n,$$

и аналогично

$$b_1 > b_2 > \ldots > b_s > 0 \geqslant b_{s+1} > \ldots > b_n.$$

Разобьём таблицу на 4 части (рис. 31) таким образом, что суммы верхних строк и первых столбцов (строки A, B и столбцы A, C) — положительные числа, а нижние и последние суммы — неположительны.

A	B
C	D

Рис. 31

Матрица A — размера $r \times s$. Из наших предположений следует, что $r+s=n$, и набор чисел $\{a_1, a_2, \ldots a_r, b_1, \ldots b_s\}$ совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, n\}$, тогда как набор $\{a_{r+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n\}$ отличается от множества $\{0, -1, \ldots, -n\}$ лишь тем, что недостаёт одного элемента.

Поэтому можно следующим образом оценить сумму S_1 всех положительных и сумму S_2 всех неположительных строк и столбцов таблицы:

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_r + b_1 + \ldots + b_s = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

а

$$S_2 = a_{r+1} + \ldots + a_n + b_{s+1} + \ldots + b_n \leqslant$$
$$\leqslant 0 + (-1) + (-2) + \ldots + (-n+1) = -\frac{n(n-1)}{2}.$$

Отсюда $S_1 - S_2 \geqslant n^2$.

Докажем теперь, что при нечётном n последнее неравенство невозможно. В самом деле, пусть T_A, T_B, T_C, T_D — суммы чисел в частях таблицы, указанных на рисунке, тогда

$$S_1 = 2T_A + T_B + T_C, \quad \text{а} \quad S_2 = T_B + T_C + 2T_D,$$

так что

$$S_1 - S_2 = 2(T_A - T_D).$$

Эта разность максимальна, если прямоугольник A заполнен единицами, а прямоугольник D — минус единицами, и тогда она равна удвоенной сумме площадей этих прямоугольников:

$$S_1 - S_2 \leqslant 2(S_A + S_D) = 2[rs + (n-r)(n-s)] = 4r(n-r).$$

Но это последнее выражение максимально, если $r = \frac{n}{2}$ и в этом случае равно n^2 (как нам требуется), тогда как при нечётном n равенство невозможно, что и требовалось доказать.

136. Ответ. Нельзя.

Решение. Отметим первую, третью, пятую, седьмую и девятую монеты. При каждой операции переворачиваются две из них.

137. Решение. Очевидно, было сыграно $\frac{24+28+38}{2} = 45$ партий. Игрок пропускает одну партию после проигрыша, а C пропустил ещё и первую партию; следовательно, из первых 44 партий A проиграл 21 партию, B — 17 и C — 6. Итак, B проиграл 17, а выиграл, следовательно, 11 партий.

138. Решение. Пусть $y = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2},$$

и наше уравнение приобретает вид

$$11y(1 - 3y^2) = 3y - y^3.$$

Отсюда $y = 0$, т. е. $x = \pi k$, или

$$3 - y^2 = 11 - 33y^2, \quad y = \pm\frac{1}{2}, \quad x = \pm \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n.$$

139. Решение. Очевидна оценка $S < 100$. Чтобы её улучшить, домножим и разделим сумму на $\sin\frac{x}{2}$, и положим $t = 50x$. Тогда стандартные тригонометрические преобразования приводят её к виду

$$S = \frac{\sin 50x \cdot \sin 50{,}5x}{\sin 0{,}5x} = \frac{\sin 1{,}01t \cdot \sin t}{\sin 0{,}01t}.$$

Оценим эту дробь. Если $|\sin 0{,}01t| > \frac{1}{50}$, то, очевидно, $S < 50$. Но, как нетрудно проверить, $S > 50$, например при $t = \frac{\pi}{2}$. Следовательно достаточно рассмотреть случай $t < 2$, т. е. $0{,}01t < 0{,}02$. Но для малых аргументов $\sin z \approx z$, мы можем в знаменателе приближённо заменить $\sin 0{,}01t$ на $0{,}01t$, и получаем:

$$S \approx 100 \sin 1{,}01t \cdot \frac{\sin t}{t} \approx 100 \frac{\sin^2 t}{t}.$$

Экстремум правой части можно найти обычным способом — при помощи дифференцирования. Производная равна 0, если $2t = \operatorname{tg} t$; решая это уравнение приближённо, мы увидим, что $t \approx 1{,}1657$, и при этом значении $S \approx 72{,}46$.

Исходя из этих соображений уже не так трудно доказать, например, что $S < 80$ при любом t.

Указание. Рассмотрите по отдельности три случая: t довольно мало (в этом случае наша формула действует плохо, но зато легко убедиться, что первые 30—40 членов суммы малы); t сравнительно близко к 1,1; t значительно больше, чем 1,1.

140. Решение. Подобный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ можно изобразить системой столбиков соответствующей высоты. (На рис. 32 они закрашены.) Столбики умещаются в квадрате 100×100, и незакрашенные строки также образуют систему чисел $(y_1, y_2, \ldots, y_{100})$. Очевидно, $y_{100} = 100$ тогда и только тогда, когда $x_{100} < 100$, что и даёт взаимно однозначное соответствие между наборами, в которых последнее число меньше 100, и равно 100; при этом если одна сумма делится на 10, то и другая тоже.

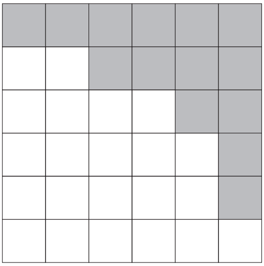


Рис. 32

Рисунок соответствует набору из шести чисел 1, 1, 2, 2, 3, 5; дополнительный набор — 0, 2, 4, 5, 5, 6.

141. Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда числа $a_1, \ldots, d_1$ не все равны 0; кроме того, очевидно, их сумма равна 0. Аналогично для любого n $a_n + \ldots + d_n = 0$.

Рассмотрим теперь алгебраическую сумму

$$S_r = a_r - b_r + c_r - d_r.$$

Легко убедиться, что $S_{r+2} = 2S_r$, откуда $S_{100} = 2^{49} S_2$. Из условия

$$a_{100}, \ldots, d_{100} < 1\,000\,000\,000$$

следует, что $S_2=0$, т. е. $a_2+c_2=b_2+d_2$. Поскольку, сверх того, a_2+ $+b_2+c_2+d_2=0$, можно сделать вывод, что $a_2=-c_2$, $b_2=-d_2$.

Но тогда нетрудно убедиться, что $a_4=-2b_2$, $b_4=-2c_2$ и т. д. Другими словами, за 2 шага все 4 числа удваиваются (и меняют порядок, что для нас несущественно). Отсюда ясно, что если хоть одно из них не равно 0, то за 100 шагов они вырастут слишком сильно.

142. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что

$$a=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b=\frac{b_1+c_1}{2}\quad \text{и т. д.}$$

143. Ответ. Уравнение имеет бесконечно много решений.

Решение.

Лемма. *Уравнение $x^2=2y^2+1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.*

Доказательство. Простейшее доказательство этого (довольно известного) факта таково. Очевидно, что пара чисел $(1, 0)$ — решение. Из него можно получить, одно за другим, бесконечное число других решений таким способом: если (x, y) — решение, то непосредственно проверяется, что пара $(3x+4y, 2x+3y)$ — тоже решение. Таким образом мы последовательно получаем решения $(1, 0)$, $(3, 2)$, $(17, 12)$, $(99, 70)$, …

Вернёмся к нашей задаче. Данное уравнение можно переписать в виде $\frac{n}{m}=\frac{2(m+1)}{n+1}$.

Предположим, что обе части равны $\frac{p}{q}$. Тогда

$$n=\frac{p}{q}m,\quad n+1=\frac{2q}{p}(m+1),$$

откуда элементарными преобразованиями получаем

$$m(p^2-2q^2)=2q^2-pq.$$

Теперь, предполагая, что $p^2-2q^2=1$, мы видим, что m, а вместе с ним и n, являются целыми числами, а именно:

$$m=q(2q-p),\quad n=p(2q-p).$$

Пусть, например, $(p, q)=(17, 12)$. Тогда $m=84$, $n=119$.

144. Ответ.

а) $Y_2=399$ $(21^2=441>399)$, а $Y_3=69\,999$ $(42^3=74\,088>69\,999)$.

б) Ответ неизвестен.

145. Решение. Суммарное число решений уравнения $xy=n$ для всех $n<N$ равно числу решений неравенства $xy<N$. Для простоты

будем решать более слабое неравенство $xy \leqslant N$, что изменит общее число решений на 49 (для наших целей это несущественно).

Зафиксируем x, тогда y должно удовлетворять неравенству $y \leqslant \frac{N}{x}$, т. е. число решений неравенства при данном x равно $\left[\frac{N}{x}\right]$.

Отсюда следует, что число решений равно

$$\left[\frac{N}{1}\right] + \left[\frac{N}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{N}\right] \approx N\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}\right).$$

Чтобы получить более точную оценку, примем во внимание, что из двух множителей всегда один меньше, чем корень из N (т. е. 1000 при $N = 1\,000\,000$). Отсюда легко видеть, что число решений приближённо равно

$$1\,000\,000 \cdot \left[2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1000}\right) - 1\right].$$

Так как в каждом слагаемом ошибка меньше 1 (разность между числом и его целой частью), то суммарная ошибка меньше 2000.

Сумма в круглых скобках приближённо равна $C + \ln 1000$, где $C = 0{,}577\ldots$ — константа Эйлера.

Поскольку $\ln 10 = 2{,}30\ldots$, то искомое число приближённо равно

$$2C + 6 \cdot \ln 10 - 1 \approx 6 \cdot 2{,}3 + 2 \cdot 0{,}577 - 1 \approx 13{,}95,$$

т. е. среднее число делителей близко к 14.

Замечание. Из решения видно, что при $N \to \infty$ среднее число делителей числа n, $n < N$, растёт примерно как логарифм N.

146. Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть существуют натуральные a, b, n, для которых верно

$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2.$$

Заметим, что $a < a + 1 \leqslant b$. Имеем:

$$n^2 < a^3 < (a+1)^3 \leqslant b^3 < (n+1)^2.$$

Из этого следует, что

$$(n+1)^2 - n^2 > (a+1)^3 - a^3,$$

т. е. $2n + 1 > 3a^2 + 3a + 1$, откуда $2n > 3a^2 + 3a$. Возводя в квадрат, получаем

$$4n^2 > 9a^4 + 18a^3 + 9a^2 > 4a^3,$$

откуда $n^2 > a^3$. Но $n^2 < a^3$ — противоречие.

Значит, таких чисел нет.

Замечание. Условие задачи равносильно следующему: *между любыми двумя кубами лежит, по меньшей мере, один квадрат.*

В действительности верно и более сильное утверждение: *между любыми двумя кубами лежит не менее двух квадратов* (есть единственное исключение между $1^3=1$ и $2^3=8$, но и его можно «обойти», если трактовать слово «между» как нестрогое неравенство: тогда между 1 и 8 лежат квадраты 1 и 4).

Доказательство аналогично приведённому, с одним отличием: указанный метод доказывает наличие противоречия только для достаточно больших n, тогда как для $n<6$ существование двух промежуточных квадратов надо проверить прямым перебором (например, между 27 и 64 лежат числа 36 и 49).

147. Решение основано на следующей лемме.

Лемма. *Если* $f(x)\in[-1;7]$, *то и* $x\in[-1;7]$.

Доказательство. Проще всего поглядеть на график функции $y=f(x)$ и заметить, что он проходит через точки $(-1,24)$ и $(7,8)$, а вершина параболы лежит в точке $(4,-1)$.

Отсюда ясно, что для любого $y\in[-1;7]$ уравнение $f(x)=y$ имеет два вещественных корня, причём эти корни опять лежат на том же отрезке.

Теперь решение сразу проводится индукцией по n (первый шаг индукции состоит в том, чтобы заметить, что решения уравнения $y=0$ принадлежит промежутку $[-1;7]$).

Замечание. Эта задача была предложена на XXVI Турнире городов (весенний тур, 10—11 классы) в несколько иной формулировке: «Существует ли такой многочлен $f(x)$, что...».

В этой формулировке задача, естественно, имеет много решений, наиболее идейное из которых таково.

Возьмём $f(x)=T_2(x)=2x^2-1=\cos(2\arccos x)$ — многочлен Лежандра.

Тогда очевидно, что

$$f(f\ldots(f(x)\ldots)=\cos(2^n\arccos x).$$

Корнями этого многочлена являются все решения уравнения

$$2^n\arccos x=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

причём k может принимать 2^n значений от 0 до 2^{n-1}. Таким образом, здесь можно предъявить все корни, и даже в явном виде; они равны

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\ldots\pm\sqrt{2}}}}}.$$

Надо, впрочем, проверить, что разным комбинациям плюсов и минусов в формуле соответствуют разные числа, что несложно, но всё-таки не вполне очевидно.

148. Решение. а) Из приведённых неравенств следует, что сумма кубов по меньшей мере в 4 раза больше, чем сумма квадратов. Отсюда легко понять, что хотя бы одно из чисел $x_1, \ldots, x_k$ больше 4; обозначим это число A.

Очевидно, $2A^2 - A > 28$.

Поэтому для выполнения первого неравенства необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$(x_1 - 2x_1^2) + \ldots + (x_k - 2x_k^2) > 28.$$

Но каждое слагаемое в этой сумме, как легко проверить, не превосходит $\frac{1}{8}$ (равенство достигается при $x = \frac{1}{4}$).

Отсюда число слагаемых не может быть меньше $8 \cdot 28 + 1 = 225$, что значительно превышает требование задачи.

б) Из первого пункта видно, что целесообразно взять одно сравнительно большое число и много малых, причём малые лучше брать равными между собой. Подбор показывает, что хорошее решение можно получить, например, взяв 600 чисел, равных 0,1, и ещё одно, равное 5,125.

в) **Ответ.** 516 чисел. Этот пункт оказался значительно труднее, чем казалось поначалу автору.

План решения следующий:

1) Заметить, что среди чисел должны быть как числа, которые больше 1, так и числа меньше 1.

2) Если имеется два числа $a > b > 1$, то можно заменить их на два равных друг другу числа d и d так, что неравенства сохранятся и даже усилятся.

3) То же самое для чисел, которые меньше 1.

Отсюда следует, что в оптимальном наборе могут присутствовать только два различных числа: $A > 1$ и $a < 1$, оба с некоторой кратностью. (В действительности здесь придётся ещё воспользоваться существованием оптимума.)

4) Доказать, что число A встречается только 1 раз. Кроме того, для удобства обозначим $m = n - 1$; число a, таким образом, встречается m раз.

5) После этого наши неравенства принимают вид

$$A + ma > 2(A^2 + ma^2), \quad m > \frac{2A^2 - A}{a - 2a^2},$$
$$A^3 + ma^3 > 2(A + ma), \qquad m < \frac{A^3 - 2A}{2a - a^3}.$$

Числа A и a должны быть такими, чтобы между дробями, ограничивающими m, умещалось хотя бы одно целое число; при этом требуется, чтобы это целое число было как можно меньше.

Оказывается, минимум достигается при

$$a = \frac{8 - \sqrt{58}}{3} \approx 0{,}128,$$

тогда можно положить $A = 5{,}169$, и при этом m равно 515.

149. Ответ. 2004 способа.

Указание. Для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует ровно один способ разбить данное число n на k приблизительно равных слагаемых. При этом каждое слагаемое равно либо $\left[\frac{n}{k}\right]$, либо $\left[\frac{n}{k}\right] + 1$.

150. а) **Ответы.** Да; нет.

Решение. Для построения примера, когда число камней всегда будет больше 120, достаточно заметить, что данное число $N = 1001$ нечётно и делится на 7. Из первого следует, что собрать все камни в одну кучу никогда не удастся. Теперь предположим, что в одной из куч лежит несколько седьмых долей от общего числа камней (или, иными словами, число камней в куче кратно 143), тогда то же верно для другой кучи и ясно, что эта ситуация будет сохраняться постоянно. Следовательно, число камней в каждой из куч будет не меньше 143.

Теперь докажем, что в первом случае ответ положительный: рано или поздно в одной из куч окажется менее пятой части всех камней.

Заметим сначала, что не позднее чем после первого перекладывания в одной из куч окажется менее трети камней (при этом существенно то, что N не делится на три!). В самом деле, пусть в меньшей из куч количество камней равно $\frac{N}{3} + r$, тогда либо $r < 0$ и утверждение верно после нуля перекладываний, либо $0 < r < \frac{N}{6}$, и тогда после первого перекладывания во второй куче будет $\frac{N}{3} - 2r$ камней.

Итак, пусть в меньшей из куч число камней равно $\frac{N}{3}-r$, причём $r>0$. Рассмотрим два случая. Если $r>\frac{N}{12}$, то число камней в этой куче меньше $\frac{N}{4}$. Если же $0<r<\frac{N}{12}$, то после двух перекладываний, как нетрудно убедиться, в этой же куче будет $\frac{N}{3}-4r$ камней, т. е. «недостаток» увеличится в 4 раза. Проделав такие операции несколько раз, мы неизбежно придём к ситуации, когда r станет больше $\frac{N}{12}$, т. е. число камней в куче станет меньше, чем четверть от общего числа.

Наконец, чтобы от четверти перейти к одной пятой, нужно опять-таки рассмотреть две возможности, но на сей раз достаточно двух перекладываний независимо от числа камней. В самом деле, пусть в меньшей из куч число камней равно $\frac{N}{4}-r$. Если $r>\frac{N}{20}$, то это число уже меньше одной пятой (т. е. не превосходит 200), если же нет, то после двух перекладываний в этой куче будет $N-4r$ камней, а в другой, соответственно, $4r$ камней, что меньше, чем пятая часть N.

Замечание. Применённые нами методы существенно используют тот факт, что у числа $N=1001$ нет слишком маленьких делителей (все делители не менее семи). Если бы, к примеру, общее число камней делилось на 3, то можно было бы в одну кучу положить третью часть камней, в другую — две трети. При этом перекладывание сводилось бы в тому, что две кучи менялись бы ролями.

Отсюда читателю уже понятно, почему в данной задаче особую роль играет наличие простых делителей у числа камней N — притом *маленьких* простых делителей.

Задача для исследования. Пусть M — число, у которого нет маленьких простых делителей (скажем, нет делителей, меньших миллиона). Какого результата можно добиться в этом случае, т. е. для какого $\gamma<1$ можно гарантировать, что доля камней в одной из куч станет меньше γ, и для каких γ это неверно?

Заметим, однако, что ответ зависит от того, каковы именно большие делители M, и потому такая задача намного сложнее, чем задача б), к которой мы и переходим.

б) **Решение.** Прежде всего заметим, что эта задача вполне аналогична задаче а), поскольку перекладывание камней означает, что в меньшей куче число (а следовательно и доля) камней удваивается, а в другой, если там доля камней равнялась β, составит $2\beta-1$.

Разница лишь в том, что в первой задаче доля (от общего числа камней в каждой куче) была рациональным числом со знаменателем 1001, а в задаче б) доли от единицы иррациональны.

Тем же способом, что в пункте а), мы можем легко доказать, что на некотором шаге α_n станет меньше $\frac{1}{5}$. Можно применять тот же метод и дальше; при этом последовательно доказывается, что α_n станет меньше

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{80} = \frac{3}{16};$$

затем точно также можно получить оценку $\frac{3}{17}$ и т. д. Но что, собственно, значит «и т. д.»? Можно ли таким способом дойти до нуля? А если нет, то как получить оценку снизу?

Для этого, очевидно, нужно предъявить иррациональное число α, для которого любое α_n окажется не слишком малым. Мы сделаем несколько больше.

Назовём иррациональное число α *минимальным*, если при всех n

$$\alpha_n > \alpha, \quad \beta_n > \alpha.$$

Ниже будут предъявлены минимальные числа.

Для этого запишем искомое число α в виде бесконечной непериодической дроби, но не десятичной, а двоичной. Как и в десятичном случае, число иррационально тогда и только тогда, когда дробь непериодична.

Для начала укажем, что рациональные числа, которые у нас встречались раньше, в двоичной записи имеют такой вид:

$$\frac{1}{3} = 0{,}010101\ldots \qquad \frac{1}{4} = 0{,}01$$
$$\frac{1}{5} = 0{,}001100110011\ldots \qquad \frac{3}{17} = 0{,}00101101\ldots$$

(Для дроби $\frac{3}{17}$ указан период, дальнейшие цифры идут в том же порядке.)

Очевидно, удвоение числа означает, что запятая в двоичной дроби переносится на одно место вправо. Поскольку в числе β мы, сверх того, отбрасываем единицу (т. е. целую часть), то можно сказать, что у обоих чисел α, β запятая переносится на 1 разряд и целая часть (если она есть) отбрасывается.

Но отсюда ясно, что после n шагов происходит то же самое: у обоих чисел запятые переносится на n разрядов, и отбрасываются целые части.

Поэтому наша задача может быть переформулирована в следующей форме.

Имеются две бесконечные непериодические последовательности, состоящие из нулей и единиц. Известно, что они дополняют друг друга (там, где в одной стоит нуль, в другой — единица). Разрешается взять любую из них и отбросить в ней любое число знаков спереди, а затем поставить впереди нуль, запятую и объявить то, что получится, бесконечной двоичной дробью. Какое наименьшее число при этом может получиться (в том же смысле, что и раньше)?

Прежде чем двигаться дальше, предъявим два минимальных числа.

Таковыми являются, например, числа

$$\delta = 0{,}0010101\ldots0100101\ldots01001\ldots$$

(«внутрь» числа $\frac{1}{3} = 0{,}010101\ldots$ время от времени непериодическим образом вставляется комбинация цифр 001) и

$$\varepsilon = 0{,}001011001100\ldots1100101100\ldots$$

(«внутрь» числа $\frac{1}{5} = 0{,}00110011\ldots$ время от времени вставляется комбинация 10).

Доказательство. В первом случае ясно, прежде всего, что в числе $1-\delta$ никогда не встречается два нуля подряд, и потому $(1-\delta)_n$ заведомо больше $\frac{1}{4}$. А для того чтобы δ_n было при всех n больше δ, достаточно, чтобы количество групп 01 после первой комбинации 001 было меньше, чем после всех остальных, чего, естественно, нетрудно достичь.

Таким образом, δ минимально. При этом число δ можно сделать сколь угодно близким к $\frac{1}{6}$, взяв уже в первый раз достаточно много групп (01) (равенство было бы достигнуто для числа

$$\frac{1}{6} = 0{,}001010101\ldots,$$

где группы 01 идут до бесконечности).

Доказательство минимальности числа ε аналогично, причём ε можно сделать сколь угодно близким к числу $\frac{7}{40}$.

Следствие. Наибольшее из минимальных чисел γ принадлежит отрезку $\left[\frac{7}{40}; \frac{3}{17}\right] = [0{,}175; 0{,}1764\ldots]$.

Ниже будет показано, что $\gamma \approx 0{,}1750919\ldots$

Для дальнейшего нам будет удобно такое обозначение. Пусть a — произвольный набор нулей и единиц, конечный или бесконечный. Тогда через $\bar{a}$ обозначается набор, дополнительный к нему (там, где нули — стоят единицы, и наоборот).

Например, если $a = 001011$, то $\bar{a} = 110100$ и т. п.

В частности, $\beta = \overline{\alpha}$.

Естественно, конечные наборы мы можем рассматривать как числа, записанные в двоичной системе.

Лемма. *Пусть α — минимальное число. Рассмотрим число a, составленное из первых k цифр, и число b, состоящее из следующих k цифр того же числа α. Тогда $b < \bar{a}$.*

Доказательство. Допустим сначала, что $b > \bar{a}$, тогда $\overline{b} < a$. Поскольку $\alpha = ab\ldots$, то $\beta = \overline{ab}\ldots$ Отбрасывая в числе β первые k знаков, мы получаем число, которое меньше α, что противоречит минимальности α.

Пусть теперь $b = \bar{a}$. Таким образом, $\alpha = a\bar{a}\ldots$ и, соответственно, $\beta = \bar{a}a\ldots$ Отбросим в числе β первые k знаков, тогда $\beta_k = a\ldots$ По предположению, $\beta_k \geqslant \alpha$, следовательно следующие k цифр числа β не меньше, чем $\bar{a}$. Соответственно следующие k цифр числа α не больше, чем a, и так как меньше они быть заведомо не могут, то $\alpha = a\bar{a}a\ldots$, $\beta = \bar{a}a\bar{a}\ldots$ Продолжая те же рассуждения, мы видим, что $\alpha = a\bar{a}a\bar{a}a\bar{a}\ldots$ и $\beta = \bar{a}a\bar{a}a\bar{a}a\bar{a}\ldots$ — периодические дроби, что опять-таки противоречит предположению.

Отсюда легко вытекают все оценки, полученные нами ранее. Так, если $k = 1$, то $a = 0$, $\bar{a} = 1$; поскольку $b < a$, то $b = 0$, $\alpha = 0{,}00\ldots$ Теперь примем $k = 2$, тогда $a = 00$, $\bar{a} = 11$. Из условия $b < a$ получаем $b \leqslant 10$, $\alpha \leqslant 0{,}0010\ldots$ Принимая затем $k = 4$, мы получим, что $\alpha \leqslant 0{,}00101100\ldots$ и т. д.

Возникает естественная

Гитотеза. *Число, составленное из следующих k цифр, должно быть на единицу меньше, чем $\bar{a}$; в обозначениях леммы $b = \bar{a} - 1$.*

Вообще говоря, это неверно, как будет показано чуть ниже. Однако это верно в случае, когда k есть степень двойки; и именно по этой формуле выписывается искомое число γ.

Ответ. Число γ имеет в двоичной записи вид

$$\gamma = 0{,}0010110011010010\ldots$$

и может быть определено любым из следующих двух способов.

1. Первая цифра числа γ равна нулю. Если уже выписано 2^n первых цифр этого числа, которые образуют некоторое число a, то следующие 2^n цифр образуют число $b = \bar{a} - 1$.

2. Находим k-ю цифру числа γ по следующему правилу: число k записывается в двоичной системе, и подсчитывается число единиц в записи. Если оно чётно, то цифра равна 1, если нечётно — то нуль.

Например, на восьмом месте стоит нуль ($8 = 1000_2$), а на девятом — единица ($9 = 1001_2$).

Десятичная запись числа γ была приведена выше.

Замечание. Из вида числа γ следует, что сформулированная выше гипотеза неверна, например, для $k = 3$ или $k = 5$. Действительно, первые 3 цифры числа γ составляют 001, а следующие три — не 101, как должно быть по гипотезе, а только 011; аналогично для пяти цифр.

Доказательство. Докажем вначале, что оба определения приводят к одному и тому же числу. Согласно определению 1, если $k < 2^n$, то цифры с номерами k и $k + 2^n$ дополнительны друг к другу (одна равна нулю, другая единице), тогда как при $k = 2^n$ обе цифры равны нулю.

Но то же верно, если исходить из определения 2. Действительно, по определению 2 цифра с номером 2^n, так же как цифра с номером 2^{n+1}, равна нулю (в двоичной записи этих чисел есть только одна единица), тогда как при $k < 2^n$ двоичная запись чисел k и $k + 2^n$ различается на единицу на $(n+1)$-м месте (в одном эта единица присутствует, в другом нет), так что эти цифры дополняют друг друга.

Далее, докажем, что γ иррационально. В самом деле, допустим противное. Тогда цифры числа γ, начиная с некоторого места, повторяются с некоторым периодом A. Запишем число A в двоичной системе: $A = 1xy\ldots z$ ($x, y, \ldots, z$ — нули или единицы), и пусть A имеет m цифр. Рассмотрим теперь (также в двоичной записи) следующие два числа:

$$v = 100\ldots0100\ldots0$$

(число нулей между единицами в первой группе равно некоторому l, которое мы выберем чуть позже, а во второй группе равно $m-1$) и

$$w = 100\ldots01100\ldots0$$

(число нулей в первой группе $l-1$, во второй по-прежнему $m-1$).

В первом числе 2 единицы, а во втором три. Поэтому в числе γ на месте с номером v стоит единица, а на месте с номером w — нуль. Но $v + A = 100\ldots10xy\ldots z$, $w + A = 100\ldots100xy\ldots z$ (число нулей в первом случае $l-1$, во втором $l-2$). Поэтому у обоих чисел $v+A$, $w+A$ поровну единиц, и на соответствующих местах стоит одна и та же цифра.

Остаётся выбрать l настолько большим, чтобы к этому моменту непериодическая часть, которая может быть в начале рационального числа, уже закончилась.

Докажем теперь, что γ является минимальным числом. Для этого воспользуемся определением 2. Докажем сначала, что $\gamma_n > \gamma$ для любого n. Для этого запишем число n в двоичной записи:

$$n = xy\ldots z \ (x, y, \ldots, z \text{ — нули или единицы}).$$

Естественно, мы будем считать, что в числе n нечётное число единиц, в противном случае γ_n начинается с единицы и заведомо больше γ.

1. Пусть сначала последняя цифра числа n равна 0. Тогда в числах n и $n+1$ число единиц различается на 1 (в числе $n+1$ последняя цифра 1, а остальные цифры совпадают).

Следовательно, в числе $n+1$ число единиц чётно, и

$$\gamma_n = 0{,}01\ldots > \gamma = 0{,}00\ldots,$$

что и требовалось.

2. Пусть, далее, число n заканчивается чётным числом единиц:

$$n = \ldots 011\ldots 1.$$

Тогда $n+1 = \ldots 100\ldots 0$ и в числах n, $n+1$ опять-таки количество единиц разной чётности, как и в случае 1.

3. Пусть n заканчивается нечётным числом единиц, причём их больше одной. Тогда

$$\begin{aligned} n &= \ldots 011\ldots 1,\\ n+1 &= \ldots 100\ldots 00,\\ n+2 &= \ldots 100\ldots 01,\\ n+3 &= \ldots 100\ldots 10. \end{aligned}$$

В числах n и $n+1$ количество единиц нечётно, а в числах $n+2$ и $n+3$ оно на единицу больше, чем в числе $n+1$, т. е. чётно. Отсюда $\gamma_n = 0{,}0011\ldots > \gamma = 0{,}0010\ldots$

4. Случай, когда n заканчивается только одной единицей, т. е.

$$n = \ldots 1000\ldots 001,$$

исследуется аналогичным образом, но требует более длинных рассуждений. Причина этого понятна: в первых трёх случаях γ_n и γ различаются уже, в худшем случае, в четвёртом знаке, тогда как в последнем случае разность между γ_n и γ может быть сколь угодно мала.

Мы предоставляем читателю самому разобрать этот случай; заметим только, что необходимо прежде всего выписать последние цифры числа в форме ...011...100...01 (последняя цифра — единица, перед ней s нулей, перед которыми, в свою очередь, стоит t единиц) и рассмотреть по отдельности случаи, когда $s+t$ чётно или нечётно.

Наконец, требуется ещё доказать, что $\beta_n > \gamma$ при всех n, где $\beta = 1-\gamma$. Но это доказательство полностью аналогично уже приведённому. В самом деле, очевидно, что дополнительное к γ число $\beta = 1-\gamma$ строится точно по тому же закону, что γ, с одной лишь разницей: в нём k-я цифра равна единице, если число единиц в записи k нечётно, и равна нулю, если оно чётно. Приведённые выше рассуждения проходят с минимальными изменениями.

Наконец, тот факт, что γ является наибольшим из всех минимальных чисел, будет уже прямым следствием его определения в первом варианте, так как индукция по $k=2^n$ в совокупности с леммой показывает, что первые 2^n цифр числа γ — наибольшие из всех возможных.

Заключительное замечание. Мы доказали, что число γ является предельным; если $\beta > \gamma$, то можно за несколько операций получить число, меньшее чем β.

Однако в действительности число γ не достигается. Придумайте сами пример числа, начав с которого мы никогда не достигнем значения γ или меньшего (хотя и сможем неограниченно приблизиться к γ).

151. Ответ. Фокус удаётся.

Это можно сделать, например, таким образом. Три карты из 5 идут либо подряд (например 234 или 451), либо две рядом, одна в стороне.

В первом случае помощник забирает себе среднюю карту (остаются две карты не подряд).

Во втором помощник берёт себе ту карту, которая идёт не подряд (остаются две подряд).

При этом фокусник легко угадывает взятую карту.

Есть и другие решения.

152. Ответ. а) Да; б) нет.

Решение задачи а). Тройку показателей за год можно рассматривать как координаты точки в трёхмерном пространстве; тогда соответствующие 4 точки являются вершинами некоторого тетраэдра. (Если они лежат на одной прямой или на одной плоскости, это можно поправить за счёт «уточнения» цифр.)

Очевидно, тетраэдр $ABCD$ всегда можно спроектировать на подходящую прямую таким образом, чтобы проекции его вершин расположились в заданном порядке (например, в порядке A, B, C, D). Простейший способ сделать это таков: сначала спроектируем параллельно плоскости BCD, тогда три вершины спроектируются в одну точку, а четвёртая будет лежать в стороне; затем чуть-чуть подвинем эту плоскость так, чтобы проекции точек B, C, D разъединились; при этом точка A по-прежнему будет первой, а три других — за ней. Для того, чтобы также и точки B, C, D расположились в нужном порядке, можно применить аналогичный приём.

Остаётся заметить, что вычисление значений линейной функции есть в точности то же самое, что проецирование точек в подходящем направлении на числовую ось.

Построение контрпримера в случае б). Рассуждаем, как выше, только теперь мы имеем не 4, а 5 точек A, B, C, D, E. Предположим, что точка E находится внутри тетраэдра $ABCD$. Тогда очевидно, что и проекция точки E, как ни проектируй, окажется где-то между остальными четырьмя точками, тогда как нам требуется, чтобы она оказалась крайней. Ясно также, что малое уточнение здесь, вообще говоря, ничем помочь не сможет.

Замечание. Если бы в условии не было разрешения «уточнять» цифры, то задача была бы неразрешима, даже если бы речь шла только о трёх годах. Почему?

153. *Указание.* Полного доказательства этого ответа у автора нет. Однако есть очень веские аргументы в его пользу: с одной стороны, экспериментальная проверка (об этом ниже), с другой, что еще важнее — следующие соображения.

Можно рассмотреть случайную величину X — сумму ста независимых случайных величин, где k-я величина с вероятностью $\frac{1}{2}$ принимает значение 0 или k. Исходная задача сведется к поиску самого вероятного значения X или моды распределения случайной величины X.

Сумма X ста независимых случайных величин распределена приблизительно по нормальному закону[1] с матожиданием

$$M = \frac{1+2+\ldots+100}{2} = 2525,$$

[1] Строго говоря, когда для обоснования нормальности применяют центральную предельную теорему требуется ограниченность дисперсий складываемых случайных величин; в данном случае это условие не выполнено. — *Прим. ред.*

откуда следует, что самым вероятным является именно это значение.

Конечно, слова «отсюда следует» надо понимать не в точном математическом, а в эвристическом смысле слова.

Но и прямая проверка показывает, что если число 100 заменить на какое-нибудь меньшее число r, то максимум действительно всегда достигается при $M = \frac{1+2+\ldots+r}{2}$ (проверка проведена до $r=20$). Впрочем, вначале (до $r=9$) максимум чаще всего нестрогий. Например, при $r=2$ принимаются по разу значения 0, 1, 2, 3; при $r=4$ шесть значений принимаются по одному разу, и пять — по дав раза, и т. д.

154. Решение неизвестно. Можно лишь указать примеры:

а) $120=C_{16}^{2}=C_{10}^{3}$.

б) Имеется бесконечная серия чисел вида $C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k}$.

Действительно, сократив одинаковые члены в равенстве

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!},$$

мы получим диофантово уравнение на числа n, k вида

$$n^2-3nk+k^2-2k-1=0,$$

которое поддаётся решению. Первое решение имеет вид $n=14$, $k=5$, а соответствующее целое число имеет даже не два, а три принципиально разных представления:

$$3003 = C_{14}^{6} = C_{15}^{5} = C_{78}^{2}.$$

Второе решение диофантова уравнения имеет вид $n=4894$, $k=$ $=1869$ (выписывать само число C_n^k нет желания, поскольку оно имеет несколько тысяч цифр).

О других повторениях мне ничего не известно.

155. Ответ. а), б) Количество куч должно равняться двум; в одной куче — 3 белые фишки и 7 чёрных, во второй — все остальные.

Решение. Во-первых, независимо от числа белых и чёрных фишек, куч должно быть две (ещё лучше одна, но это запрещено условием).

В самом деле, если куч больше двух, то можно объединить кучу, где доля белых наибольшая, с кучей, где она наименьшая. При этом доля белых в объединённой куче будет равна медиане соответствующих дробей, т. е. вместо двух чисел мы получим некое среднее между ними, и ситуация улучшится.

Теперь рассмотрим задачу а). Как сказано, имеется только 2 кучи, и в одной из них (будем её называть первой) доля белых больше, чем $\frac{20}{67}$, а в другой меньше. Если в первой куче некоторое число m белых фишек, то число чёрных, очевидно, должно быть равно $\left[\frac{47m}{20}\right]$. Пусть $m=3$, тогда дробная часть числа $\frac{47m}{20}$ равна $\frac{1}{20}$. Меньше она, очевидно, быть не может, и более того, при любом другом m она уже не может равняться $\frac{1}{20}$ (иначе оказалось бы, что $(m-3)$ делится на 20). Следовательно, это и есть ответ.

Решение задачи б) для чисел 50 и 117 полностью аналогично.

156. Решение. а) На первый взгляд кажется, что должно получиться распределение, сходное с нормальным, т.е. наименее вероятно распределение $(N-1, 1)$, а наиболее вероятно распределение пополам.

Однако здесь интуиция даёт неверный ответ. На самом деле *все распределения равновероятны*, с оговоркой, что именно равное распределение вдвое менее вероятно, чем остальные. Например, если $N=100$, то вероятность распределения $(50, 50)$ равна $\frac{1}{99}$, а вероятность каждого из остальных 49 распределений — $\frac{2}{99}$.

Перейдём к решению. Первый шаг состоит в том, что нужно немного видоизменить условие задачи, и искать не вероятность, а число способов получить то или иное распределение орехов по корзинам. (Ясно, что суть задачи от этого не изменится, поскольку вероятность получится, если мы полученное число способов разделим на общее число способов.)

Пронумеруем корзины от 1 до N, затем выставим их в ряд (в произвольном порядке!), выложим орехи из корзин и положим каждый орех перед соответствующей корзиной. Между орехами положим белые палочки, которые призваны отделять одну кучку орехов от другой. В начальном положении N кучек по одному ореху. Вместо того, чтобы перекладывать орехи из одной корзины в другую, мы будем убирать одну из палочек, подразумевая при этом, что соответствующие кучки объединяются.

Тут можно возразить: ведь при этом вопреки условию объединяются не любые корзины, а только соседние. Это совершенно верно; но поскольку мы располагаем корзины *всеми возможными* способами (число таких способов равно $N!$), то во-первых, мы можем объединить любые две корзины, и во-вторых, число распределений,

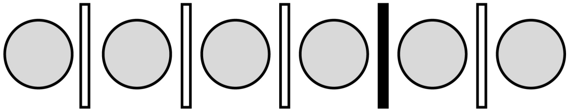


Рис. 33

в которых можно объединить, скажем, корзины с номерами a и b — одно и то же для всех a, b.

Теперь положим, к примеру, что $N=6$, и мы хотим найти число способов получить распределение $(4, 2)$. Отметим это распределение, закрасив в чёрный цвет 4-ю палочку (см. рис. 33).

Чтобы получить такое распределение, требуется убрать в любом порядке все белые палочки, не трогая чёрную. Понятно, что количество способов будет одно и то же, независимо от того, какой по счёту лежит чёрная палочка — что и требовалось.

Понятно также, почему распределение поровну имеет вдвое меньшую вероятность: чтобы получить распределение $(4, 2)$, можно положить чёрную палочку либо на 4-е, либо на 2-е место, тогда как $(3, 3)$ получается только одним способом.

Если N нечётно, то никакие оговорки не требуются и ответ состоит в том, что все распределения равновероятны.

б) Эту задачу разберите сами. И здесь также *все распределения* (a, b, c) *имеют равную вероятность*, если все числа (a, b, c) *разные*; вероятность получить распределение вида (a, a, b), вдвое меньше, а если N делится на 3, то надо ещё учесть и вариант (a, a, a).

Способ решения аналогичен.

157. Определения из п. ii), iii) предполагают построение в несколько шагов. Поэтому удобно сначала заменить построение, описанное в п. i), другим, более замысловатым, но тоже проходящим в несколько шагов.

Итак, опишем, как можно построить последовательность точек на луче OL не сразу, а шаг за шагом.

Отметим на OL две точки L_1 и L_2; L_1 — на пересечении луча OL с k-й по счёту вертикалью, а L_2 — на пересечении OL с k-й по счёту горизонталью. Очевидно, отрезок OL_2 длиннее OL_1, и на OL_1 стоит k букв A и несколько букв B, тогда как на OL_2 имеется k букв B и несколько букв A.

Теперь построим ещё отрезок OM, симметричный OL_1 относительно биссектрисы угла O (того, в котором начинается луч), и рас-

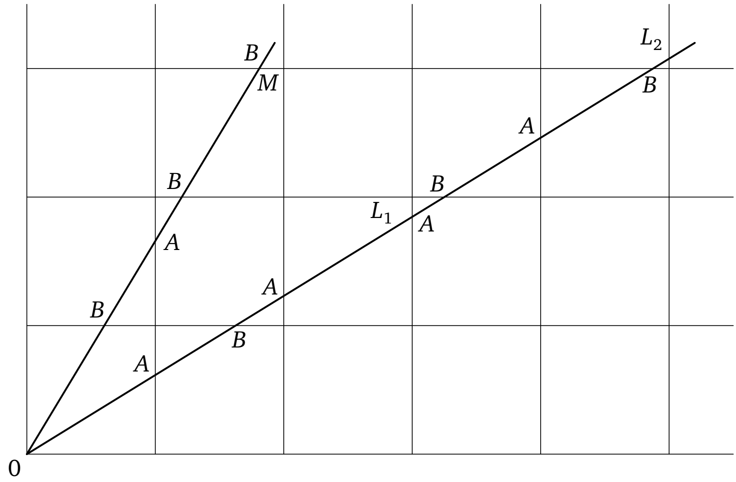


Рис. 34

ставим на OM буквы согласно правилу. Симметрия относительно диагонали, переводящая отрезок OL_1 в OM, переставляет буквы: A переводит в B, а B — в A. (См. рис. 34; здесь $k=3$, точка L_1 совпадает с одной из точек A, а точки L_2 и M — с некоторыми точками B.)

До сих пор угол наклона лучей мог быть произвольным, и это никак не влияло на ход построения. Теперь необходимо вспомнить, что тангенсы углов, под которыми наклонены лучи OL и OM, равны соответственно τ и $\frac{1}{\tau}$. Число τ удовлетворяет тождеству $\frac{1}{\tau}-\tau=1$, поэтому расстояние между двумя точками B (на отрезках OM и OL_2) на первой горизонтали равно 1, между следующими двумя (на второй по счёту горизонтали) равно 2, и т. д.

Это означает, что на отрезке OL_1 ровно столько же точек B, сколько на отрезке OM, но точек A имеется на k штук больше, поскольку OL_1 пересекает больше вертикалей. Понятно также, что если мы, двигаясь параллельно горизонтали, сместим эти точки A на отрезок OM, то там появится ровно по одной точке A перед каждой точкой B (см. рис. 35).

Итак, зная расположение точек на «коротком» отрезке OL_1, мы можем установить их расположение на «длинном» отрезке OL_2 по следующему правилу:

- сначала поменять все буквы местами: $A\to B$, $B\to A$,
- а затем перед каждой буквой B поставить букву A.

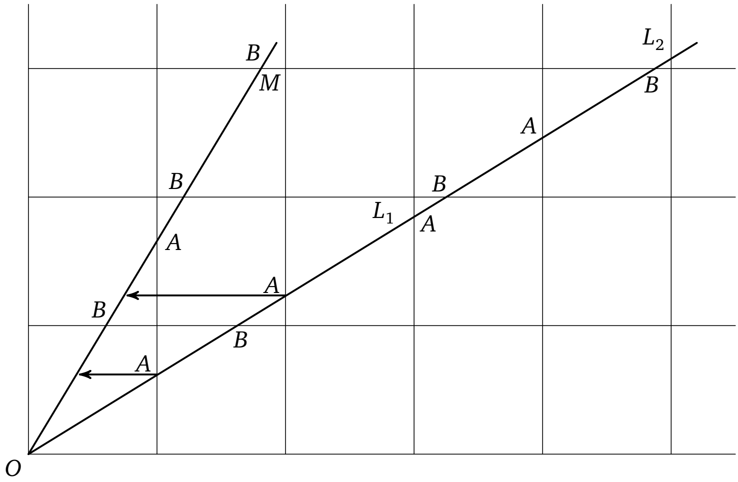


Рис. 35

Это как раз и означает, что преобразование происходит по закону, описанному в п. ii).

Перейдём теперь к способу iii). Здесь прежде всего понадобится ключевое утверждение.

Лемма. *При любом n среди отрезков деления имеется не более трёх, различающихся по длине* [1].

Доказательство леммы. Склеим конец отрезка с началом. Тогда он превращается в окружность длины 1, на которой отмечены точки τ, 2τ и т. д. Занумеруем их именно в этом порядке: нулевая — это точка 0, она же 1, первая — τ, вторая — 2τ и т. д.

Рассмотрим какой-нибудь из полученных отрезков; если его концы — это k-я и l-я точки, то обозначим его $[k, l]$. Очевидно, длина $[k, l]$ такая же, как длины отрезков $[k+1, l+1]$ и $[k-1, l-1]$. Поэтому все отрезки делятся на несколько серий; в каждую серию входит по несколько отрезков одинаковой длины, а именно $[k, l]$, $[k+1, l+1]$, $[k+2, l+2]$, …, $[k-1, l-1]$, …

Поскольку число точек конечно, то и каждая из серий конечна, в частности, имеет последний элемент. Будем считать, что именно

[1] Именно такая задача предлагалась на XXXI ММО (1968 год), причём факт верен независимо от того, берём мы в качестве τ золотое сечение или любое другое число.

элемент $[k, l]$ последний, т. е. элемента $[k+1, l+1]$ не существует. Но почему же?

На это может быть только три причины, а именно:

1) $k=n$;

2) $l=n$;

3) если ни первое, ни второе неверно, то отрезок $[k+1, l+1]$ существует, но на нём лежит одна из точек деления. Пусть это точка r, тогда на отрезке $[k, l]$ должна была бы лежать точка $r-1$. Поскольку это, по предположению, не так, то имеется единственная возможность: $r=0$.

Таким образом, любой отрезок входит в одну из этих серий, причём, очевидно, первая и вторая серии существуют всегда, тогда как третья может и не существовать. Например, нетрудно проверить, что при $n=6$ существуют все три серии, а при $n=7$ — только первые две.

Меньше двух серий быть не может, так как это означало бы, что все отрезки имеют равную длину (а именно, $\frac{1}{n}$), тогда как по условию длины отрезков иррациональны.

Дальнейший ход рассуждений мы только наметим вкратце. Нужно доказать следующие факты:

– если имеются три разные длины $a>b>c$, то всегда $a=b+c$,

– если имеются три разные длины $a>b>c$, то очередная точка деления всегда делит отрезок a на две части b и c, и так продолжается, пока есть хоть один отрезок длины a,

– длина любого отрезка равна τ^k для некоторого k, причём одновременно встречаются либо две длины τ^k и τ^{k+1}, либо три длины τ^k, τ^{k+1}, τ^{k+2},

Теперь утверждение задачи легко доказывается по индукции. А именно, начнём индукцию с $n=5$; это означает, что имеется 4 точки деления, которые, как легко проверить непосредственно, делят отрезок $[0, 1]$ на 5 частей, которые соответственно равны a, a, b, a, b, причём $a=\tau^3$, $b=\tau^4$.

Очередная точка деления может делить только отрезок a. Это можно либо проверить непосредственно, либо воспользоваться тем, что если бы делился отрезок b, то получилось бы четыре различные по длине части, а это, как мы знаем, невозможно.

Таким образом, следующие три точки делят все три отрезка a на отрезки b и $c=a-b=\tau^5$. После этого у нас не осталось отрезков длины a; согласно условию задачи, это означает, что мы должны переменить обозначения, и «бывший» отрезок b обозначить буквой a, а отрезок c — буквой b. Учитывая, что «бывший» отрезок a превратился в два отрезка, которые мы теперь обозначаем a и b, мы опять видим, что получилось всё то же преобразование, и способ iii) также равносилен ii).

Остаётся заметить, что мы совершили переход от $n=5$ к $n=8$, но точно так же происходят дальнейшие переходы к следующим значениям. Можно также проверить (хотя условие задачи этого не требует), что нужные нам числа n, для которых имеется не три, а только две разные длины отрезков — это числа Фибоначчи.

Что такое математика, или Метаматематика для нематематиков

О той пользе, которую математика приносит обществу, знают все. Любое предисловие к любой книге по математике начинается именно с этой, в общем-то совершенно справедливой, мысли. Говорится о том, как математика помогает рассчитать траекторию ракеты, построить мост, оценить размер страховых платежей. На крайний случай, говорят о том, как математика позволяет познавать законы природы.

Всё это совершенная правда. Но гораздо реже и меньше говорят о той пользе, которую математика приносит человеку — и тому, кто собирается посвятить ей жизнь, и тому, кто только немного постоит на границе великой страны, называемой Математика.

* * *

Широкая публика обычно представляет себе учёного-математика либо в виде скучного рассеянного сухаря, который вечно, выходя из дома, забывает то калоши, то зонтик, — либо как некоего средневекового мага (смотри американские фильмы типа «Изгоняющий дьявола»), который вещает, орудуя таинственными знаками, недоступными простым смертным.

(Замечу в скобках, что злоупотребление «таинственными знаками» — интегралами, алефами, кванторами и так далее — нехарактерно для серьёзных математиков. Они куда выше ценят работу, в которой удалось обойтись наиболее простым математическим аппаратом — другое дело, что это удаётся сравнительно редко.)

И потому я хотел бы начать с анекдота об А. Н. Колмогорове, услышанного мною около 30 лет назад. Слово «анекдот» я употребляю здесь не в современном, а в классическом смысле: анекдот есть случай, иногда смешной, иногда серьёзный, но непременно взятый из реальной жизни.

Итак, мой знакомый М. С. рассказал мне, как ему довелось присутствовать на каком-то военном совещании.

«Выступил полковник; трижды исписал всю доску формулами. Потом вышел Андрей Николаевич [Колмогоров]; он не написал ничего, но коротко и внятно объяснил собравшимся, о чём, собственно, говорил предыдущий докладчик.

И выходя с заседания, — закончил М. С., — я услышал такой обрывок разговора двух генералов:

— Этот штатский, видно, в математике не шибко силён, но в нашем деле здорово разбирается».

Можно было бы добродушно посмеяться над генералами: как же они ошиблись, приняв одного из величайших математиков XX в. за «штатского, который не шибко силён в математике». Но в действительности генералы не виноваты. Их слова — это довольно-таки типичная реакция непрофессионала на настоящую математику.

* * *

Что же собой представляет настоящая математика? Позвольте мне сначала сказать, чем она НЕ является.

Математика, в сущности, не наука. А если наука — то все прочие науки — не науки. Слишком уж велика разница. Математика ближе к музыке, чем к физике. И пропасть между математикой и физикой глубже, чем между физикой и социологией. Математика — это образ мысли, это человеческий характер. И математик — это не просто человек, окончивший мехмат. Это прежде всего определённый склад ума и, не побоюсь сказать, определённое состояние души.

А те, кто применяют математику, чаще всего просто подставляют полученные из опыта параметры в известные формулы. Речь идёт, таким образом, всего лишь о том, что некоторые люди (например, социологи или экономисты) выучили некоторое количество алгоритмов и умеют эти алгоритмы применять. Это не совсем бесполезно. Но математика тут почти что и ни при чём.

Для иллюстрации приведу такой пример.

• Психолог Д. Канеман в своей книге «Думай медленно... Решай быстро» утверждает, что люди очень часто принимают нерациональные решения. С этим спорить, пожалуй, невозможно. Однако все ли приводимые им примеры убедительны?

Вот один нелогичный, по мнению психолога, поступок. Участникам эксперимента предлагают на выбор: либо получить 46 долларов, либо бросить монетку и в случае успеха получить 100 долларов. Что лучше? Эксперимент показывает, что «лучше синица в руке, чем журавль в небе: большинство предпочитает получить гарантированные 46 долларов, чем 50 %-й шанс на получение 100 долларов».

Психолог думает, что такое поведение нелогично или, по меньшей мере, нерационально. Согласимся ли мы с этим?

На первый взгляд, надо согласиться: ведь если вы идёте на риск, то получите (в математическом ожидании) не 46, а целых 50 долларов. Так и рассуждал психолог.

Но математик рассудит по-другому.

Ведь «математического ожидания» вы отнюдь не получите; вместо этого вы получите то ли ноль, то ли 100 долларов. Получить ноль явно обидно. Ну, а получить сто? Это-то хорошо? Да, конечно; но надо ещё подумать: действительно ли вы, получив сто долларов, испытаете вдвое больше удовольствия, чем от получения сорока шести? Это далеко не очевидно...

Психолог исходит здесь из не сформулированного (и заведомо неверного, причём именно с точки зрения психологии) догмата о том, что получаемое человеком удовольствие находится в прямой (подчёркиваю: прямой) пропорциональной зависимости от полученной суммы. И, конечно, не учитывает обиды, которую испытает неудачник, который мог получить деньги, а вместо этого получил шиш.

Он правильно применил формулу; но он забыл, что результат надо ещё правильно истолковать.

* * *

Многие думают также, что математики — это люди, которые постоянно что-то вычисляют. Помнится, мой отец был сильно удивлён, обнаружив, что я умею считать интегралы гораздо хуже, чем он. И он тоже, хотя был достаточно сведущ в математике (он был физиком-теоретиком высокого класса), он тоже был уверен, что математик должен главным образом уметь вычислять. Конечно, такое умение непременно входит, как один из важнейших компонентов, в образование математика и в его «минимальный запас», но всё же суть работы математика отнюдь не в этом.

Я бы даже сказал, что дело обстоит как раз наоборот[1]. Математик часто вынужден вычислять (об этом ещё будет говорится ниже). Но он всегда стремится вычислять как можно меньше.

[1] В 1980-е годы мой друг прислал мне из Израиля калькулятор — по тогдашним понятиям, передовая техника. И пользовался ли я им?

Да, один раз. Он понадобился мне, когда я ездил со студентами на картошку, и мне нужно было рассчитать, кто из них сколько заработал. Конечно, я мог бы это сделать и с карандашиком, но складывать десяток чисел с калькулятором проще и надёжнее, чем в столбик.

И это, повторяю, был единственный случай, когда я воспользовался калькулятором для дела, а не так просто, для развлечения. В своей математической деятельности мне им так и не пришлось воспользоваться: он не был мне нужен.

Тут весьма уместно припомнить характерную ошибку, сделанную при переводе «Очерков по истории математики» (одного из томов фундаментального труда Н. Бурбаки).

Последняя (и следовательно, особенно важная) фраза книги в переводе заканчивается словами:

«...которые, подобно всем великим математикам, стремились заменить *идеи — вычислениями*».

Ошибка переводчика (или, что вероятнее, редакторов и корректоров) состоит в том, что два ключевых слова поменялись местами. В оригинале говорилось: «...заменить *вычисления — идеями*».

Ошибка не случайная, ох, не случайная! Она, как и обмолвка генералов, показывает, какая пропасть лежит между математикой — и досужими представлениями о ней.

Математика и Буратино

Алексей Толстой не любил математику. Её не любит ни Буратино (о глубоком философском смысле диалога Буратино с Мальвиной я поговорю чуть ниже), ни герой автобиографической повести «Детство Никиты», который с тоской представляет себе того купца, который купил (или продал) столько-то аршин синего и чёрного сукна; или те поезда, которые вышли из пунктов A и B, чтобы встретиться на расстоянии $\frac{3}{4}$ от A... Да. Мнение о том, что математика — очень скучная наука — не то чтобы доминирующее, но достаточно распространённое. Сплошные бассейны, в которые вода через одну трубу вливается, а в то же время (непонятно зачем) выливается через другую...

Я мог бы возразить, что на математических олимпиадах очень часто даются задачи с весьма занятными формулировками: «Короли ездили друг к другу пировать, а вечером слуги развозили их по домам...», «Мудрый таракан решил отыскать Истину...» Но вначале позвольте мне защитить именно «математическую скуку»: в ней заложен глубокий научный смысл.

Если нам предлагается решить скучную задачу о том, как купец продал 138 аршин синего и чёрного сукна за 477 рублей, причём синее стоило 5 рублей за аршин, а чёрное — 3, нам не требуется знать, не было ли это сукно, случайно, гнилым. Неважно и то, у кого купец его перед этим купил и какую прибыль получил (это, впрочем, могло бы стать темой другой задачи — но именно ДРУГОЙ).

Поэтому перед тем, как поговорить о задачах с увлекательными (или, по крайней мере, с занятными) формулировками, признаем, что хулители в немалой степени правы. Большинство математических задач по формулировке скучны; но отчего?

Вспомним, как «девочка с голубыми волосами» пытается учить Буратино математике. Результат, что называется, «значительно ниже среднего»:

«— У вас в кармане два яблока...

Буратино полез в карман.

— Врёте, ни одного.

— Я говорю, — терпеливо продолжала девочка, — предположим, у вас в кармане два яблока. Некто взял у вас одно яблоко. Сколько у вас осталось?

— Два.

— Подумайте хорошенько.

Буратино сморщился — так он здорово подумал.

— Два.

— Почему же?

— Я же не отдам Некту яблока, хоть он дерись!

— У вас нет никаких способностей к математике, — огорчённо сказала девочка...»

(*А. Толстой. «Золотой ключик, или приключения Буратино»*)

Мальвина права: своим ответом Буратино продемонстрировал свою неспособность отвлечься от конкретной ситуации. Математика всегда основана на «предположим это», и обсуждать вопрос «а почему бы не предположить другое», не принято[1].

В качестве иллюстрации к моему тезису приведу очередной анекдот.

• Корреспондент спрашивает директора сумасшедшего дома, как врачи проверяют, действительно ли пациент излечился. Директор отвечает:

— Мы напускаем полную ванну воды, кладём рядом чайную ложечку, рядом ставим кружку и предлагаем освободить ванну от воды.

Корреспондент. Ну, понятно: всякий нормальный человек возьмёт кружку.

Директор. Нет. Нормальный человек вынет пробку.

---

[1] Правда, знаменитый английский математик Дж. Литлвуд приводил такой пример:

«**Учитель.** Предположим, что x есть число овец. — **Ученик.** Но, господин учитель, предположим, что x не есть число овец. — Я спросил у Витгенштейна, имеет ли эта шутка глубокий философский смысл, и он ответил, что имеет». («Математическая смесь»).

Но, во всяком случае, математического смысла шутка, вроде бы, не имеет.

Этот анекдот неплохо иллюстрирует суть математического подхода к проблеме. Дело в том, что математик-то как раз поступит, вероятнее всего, как предлагал корреспондент: возьмёт кружку. Ведь математик привык решать задачи, в которых круг допустимых средств жёстко ограничен (и это важно!). А в задаче не сказано, разрешается ли вынимать пробку. Значит, наверно, нельзя.

В математике всегда говорится: «Дано то-то и то-то. Какие из этого можно сделать выводы?»

Вообще говоря, из этого можно сделать множество разнообразных выводов (так и проступает Буратино, проявляя тем свою отвагу, но уж никак не математический талант). И если мы хотим получить определённый вывод, нам необходимо прежде всего отбросить все посторонние соображения. Данный случай показывает это достаточно отчётливо.

В реальной ситуации не мешало бы знать и то, большие ли яблоки лежат в кармане или маленькие; и кто такой этот Некто, и каким путём он взял яблоко — попросил, потребовал или просто украл. В последнем случае надо не считать оставшиеся яблоки, а надавать ему по шее, что и предлагает сделать персонаж другой детской повести.

«— Слушай, — говорю, — Костя, мальчик и девочка собрали вместе 120 орехов, мальчик взял вдвое больше, чем девочка. Что делать, по-твоему?

— Надавать, — говорит, — ему по шее, чтоб не обижал девочек!

— Да я не про то...»

Это ключевая фраза для понимания математики как науки; она всегда «не про то». Но послушаем беседу мальчиков дальше.

«— Да я не про то спрашиваю. Как им разделить, чтобы у него было вдвое?

— Да что ты ко мне пристал? Пусть делят, как сами хотят. Пусть поровну делят.

— Да нельзя поровну. Это задача такая.

— Какая ещё задача?

— Ну, задача по арифметике.

— Тьфу! — говорит Шишкин. — У меня морская свинка подохла, я её только позавчера купил, а он тут с задачами лезет!»

(*Н. Носов. «Витя Малеев в школе и дома»*)

Этот разговор, так же как и разговор Буратино с Мальвиной, имеет глубокий философский смысл. Советы Кости Шишкина («надавать по шее»; «пусть поровну делят») вполне разумны с общечеловеческой точки зрения, но для задачи никак не подходят. И, соответственно, позиция Вити Малеева («как им разделить, чтобы у него было вдвое?») никак не сообразуется с жизненной мудростью. В самом деле, зачем им делить так, чтобы было вдвое? Витя и Костя говорят на разных языках.

После того, как сказано «дано то-то и то-то» — то, что дано, уже не обсуждается. Эти условия можно и должно обсуждать либо ДО, либо ПОСЛЕ того, как задача решена. Но не в процессе решения. Первое, чему необходимо научиться, занимаясь математикой — искусству полностью забыть о нематематическом содержании задачи, оставить от жизненной ситуации лишь голый скелет формальных данных. Неспециалист скажет: видите, какая математика скверная, как она оторвана от жизни… Отнюдь! Просто это лишь половина дела, и притом вторая половина; для настоящих занятий математикой необходимо предварительно уметь в обычной жизненной ситуации понять: можно ли здесь вообще применить математику?

Очень часто это возможно — поскольку математический аппарат очень разнообразен, могуч, и «школьная математика» даёт представление о реальных возможностях математики не большее, чем капля воды — об Атлантическом океане. И к очень многим ситуациям можно тем или иным боком присобачить математическую теорию (или создать новую математическую теорию, специально для этой ситуации), затем выделить чистую математическую задачу — и уж потом переходить ко второй части: решение этой задачи. Как заметил У. Сойер, математику надо всё объяснять, «как ребёнку или Сократу» («Прелюдия к математике»). Но научить этому — как выделить математическую сторону в ситуации, где математикой вроде бы и не пахнет, — много трудней, чем решить задачу про бассейн с двумя трубами. И школа, вполне естественно и разумно, начинает с того, что легче.

Школьнику же остаётся задача попроще: вышелушить математическое ядро задачи там, где оно уже почти видно.

Но и здесь это не совсем тривиально. И чем скучнее условие задачи — тем легче это сделать. Унылые, однообразные условия задач даются именно для того, чтобы это было легче.

А теперь — как обстоит дело на олимпиадах? Математическая олимпиада — совсем другой случай. Туда приходят люди, для которых вышелушить математическое содержание — проще простого, как бы замысловато задача ни была сформулирована. И для них необходимость понять чисто математическое содержание задачи, исключив из неё мудрого таракана и королей, — не в тягость, а в радость. Это некий дополнительный аттракцион.

Это примерно так же, как в анекдотах: в них обычно что-то не договаривается. Дело не в том, что догадаться о недоговорённом трудно — наоборот, это очень легко. И рассказывающий и слушающий улыбаются друг другу улыбкой авгуров, «посвящённых» в недоговорённое.

* * *

Но как же на самом деле работают математики?

Иной раз представляют дело так: для математики, дескать, нужно, чтоб всё было просто: «тут белые, там чёрные, по эту сторону свободные, по ту — рабы», а жизнь, мол, сложнее.

Так ли это? Отчасти.

Действительно, математики хотят иметь теории попроще и ценят такие теории. Однако работает математик всё-таки совершенно иначе. Поскольку приходится, хочешь не хочешь, опираться на факты. Да, вначале он обычно строит какую-нибудь совсем простую рабочую гипотезу; но тут же выясняется, что факты ей противоречат. Он начинает её менять. Даже пиджак шьётся не с одной примерки — а тут всё много сложнее. Переделываешь раз, другой, третий. На десятый раз начинаешь примерно понимать, какая именно теория имеет шанс оказаться верной — причём обычно нечто совершенно непохожее на то, что собирался сделать: думал, что шьёшь штаны, а вышла штормовка.

И всё-таки при этом теория должна быть простой. Под очень сложную теорию можно подогнать всё, что угодно (появился новый факт — вводишь в основное уравнение ещё один член); но слишком сложная теория никому не нужна. Вот и вертись, как знаешь.

Можно ещё это изобразить таким образом: допустим, есть ряд экспериментальных точек, и надо придумать кривую, на которую они все, хотя бы приблизительно, ложатся.

Вообще-то есть совсем простая теорема, которая гласит: для любого набора точек существует многочлен, на графике которого все они лежат. Ну так что: берём этот многочлен, и вперёд? Как бы не так!

Берём сначала две точки и бодро проводим через них прямую (иначе говоря, строим график многочлена 1 степени). Но третья точка, вот досада, на график не попадает. Не беда: вместо прямой возьмём параболу (вместо уравнения первой степени — уравнение второй) и проведём её через 3 точки.

Но для четвёртой придётся брать уравнение третьей степени, потом четвёртой, и так далее. Для 40 точек придётся взять уравнение 39-й степени. Однако мало того, что его долго искать, главное — даже уравнение 9-й степени, не говоря уж о 39-й, никому не нужно.

Начинаем химичить. Будем считать, что измерения проведены неточно, и теория тоже не совсем точная — значит, пусть искомая кривая пройдёт не через наши точки, а поблизости от них. Вот эти две точки, которые не лезут ни в какие ворота — долой; условимся, что они из другой науки. После этого попробуем подобрать что-то приемлемое... А потом понимаешь, что точки довольно хорошо лягут на кривую, — но надо брать не многочлен, а сумму трёх синусоид. Впрочем, две точки всё-таки придётся выбросить... Только не те, которые я выбрасывал раньше, а две другие.

Вот примерно так и работаем. А вы говорите «простая теория»...

Зачем нужно уметь считать?

Г-жа Простакова (*Правдину*). Как, батюшка, назвал ты науку-то?

Правдин. География.

Г-жа Простакова (*Митрофану*). Слышишь, еоргафия.

Митрофан. Да что такое! Господи боже мой! Пристали с ножом к горлу.

Г-жа Простакова (*Правдину*). И ведомо, батюшка. Да скажи ему, сделай милость, какая это наука-то, он её и расскажет.

Правдин. Описание земли.

Г-жа Простакова (*Стародуму*). А к чему бы это служило на первый случай?

Стародум. На первый случай сгодилось бы и к тому, что ежели б случилось ехать, так знаешь, куда едешь.

Г-жа Простакова. Ах, мой батюшка! Да извозчики-то на что ж? Это их дело. Это-таки и наука-то не дворянская. Дворянин только скажи: повези меня туда, свезут, куда изволишь. Мне поверь, батюшка, что, конечно, то вздор, чего не знает Митрофанушка.

Д. Фонвизин. «Недоросль»

Выше я сказал о том, что математики стараются считать поменьше. Теперь я хочу выдвинуть дополнительный тезис: всем нематематикам (не только физикам) необходимо уметь считать. Или, говоря точнее, — уметь работать с цифрами.

Ведь очень многие склонны думать, что такое умение требуется только математикам (ну, может быть, физикам, или ещё в каких-то точных науках). Во всех прочих случаях, если нужны цифры — то «извозчик довезёт», пусть кто-нибудь сосчитает за нас.

А результат получается печальный: они приводят цифры, но не понимают, что именно из этих цифр можно извлечь. Притом — подчеркну — речь отнюдь не о том, что математики обладают какими-то особенно хитрыми приёмами, позволяющими извлечь из имеющихся цифр нечто, недоступное простым смертным. Да, такие приёмы действительно существуют, математики ими владеют и изредка применяют. Но, как правило, речь идёт о совершенно элементарном умении не просто смотреть на цифры, а сопоставлять их. Здесь не требуется знание специальных разделов математики. А требуется некое владение духом математики — т. е. тем, что необходимо каждому человеку.

Приведу несколько примеров.

• Американская исследовательница Энн Эпплбаум в своей книге «ГУЛАГ» приводит данные о числе его узников.

Данные, надо сказать, достаточно удивительные.

Во-первых, эти цифры заметно меньше тех, которые мы привыкли считать оценочными. Согласно этим данным, в начале 1930-х годов общее число узников ГУЛАГа составляло около 300 тысяч, и дальше росло медленно, но верно. (Кстати сказать, в 1937 г. не было какого-то резкого скачка; цифра выросла, да, но не так уж заметно.) Максимум был достигнут в 1953 г. — несколько больше 2,5 миллионов. Кстати, это примерно равняется числу заключённых в тюрьмах США в наши дни (правда, надо сделать поправку: население США примерно вдвое больше, следовательно, процент заключённых в нынешних США примерно вдвое меньше).

Но более странно другое. Суммируя число заключённых по годам (этого мисс Эпплбаум не сосчитала), мы получаем приблизительно 36 миллионов. Между тем она пишет, что общее число людей составляет примерно 18 миллионов.

Расхождение? Да. Но совсем не в ту сторону, как кажется на первый взгляд. Первая цифра и должна быть заметно больше: ведь человек, просидевший, скажем, 8 лет, в первом случае учитывается 8 раз.

А вышло, что каждый заключённый ГУЛАГа учитывался в среднем только два раза.

Отсюда математически неизбежный вывод: либо цифры фальшивые, либо средний срок заключения составлял около 2 лет.

Предположим, что цифры не фальшивые (это предположение косвенно подтверждается тем фактом, что мисс Эпплбаум, во всяком случае, НЕ стремилась оправдывать советский режим). Тогда — как их объяснить?

Может быть, высокой смертностью? Нет. Конечно, высокая смертность несколько корректирует эти цифры, но «списать» это противоречие на её счёт, как легко сосчитать, не удаётся. (Для того, чтобы объяснить такую ситуацию только высокой смертностью, нужно было бы, чтобы по крайней мере 80 % заключённых умирало в течение первого года, а реальная цифра заведомо меньше в несколько раз — или даже в десятки раз.)

Между тем буквально все авторы пишут, что все сроки составляли 8—10 лет и более; о ком ни прочтёшь — узнаешь, что он провёл в лагерях 10 лет и более. Даже делая поправку на «добросовестность» сегодняшних журналистов, трудно сделать так, чтобы данные сходились.

По моей грубой прикидке, высокая смертность в лагерях может «сблизить» две приведённые цифры — 10 лет (обычные сроки) и 2 года (цифра, выведенная выше) процентов на 20, может быть — 30. От силы — 50, но это уж с колоссальными натяжками. Так или иначе, требуется ещё и другое, дополнительное объяснение.

Может быть, оно состоит в том, что «астрономические» сроки относятся к известным людям (старым большевикам или интеллигенции и т. п.), тогда как простых людей и воров выпускали быстро.

Я говорю «возможно»; никак не настаиваю на такой версии. Для целей настоящей статьи важно другое: никого эти расхождения в цифрах не смущают. Зачем «дворянину» знать математику? Или хотя бы арифметику?

И исследователи приводят очень интересные цифры, решительно не понимая, что же из них можно извлечь.

Но оставим этот пример, где мы неизбежно оказываемся в лапах самой низменной политики. Рассмотрим другой пример, который сегодня не имеет уж ровно никакого политического подтекста; автора не обвинишь в том, что он нарочно, в каких-то низких целях, завысил или занизил цифры. Тем не менее...

• Вот данные о богатых и бедных дворянах в Российской империи. (Таблица взята из книги *Миронов Б.* «Социальная история России периода империи (XVIII — начало XX в.)». СПб., 2003. Т. 1. С. 89.)

И опять — автор книги не очень умеет считать, а вернее — не понимает, зачем нужно это уметь. В результате в таблице есть странности.

А именно, рассмотрим частное от деления чисел четвёртого столбца на соответствующие числа второго. Это частное показывает, сколько крепостных в среднем приходится на одного дворянина малого, среднего или большого достатка.

Например, посмотрим, сколько же крепостных приходится на одного дворянина с 4—20 крестьянами. Делим 327,5 тысяч на 190,2 тысячи... так... выходит... это ещё что?!

Выходит, что в среднем на помещика с 4—20 крестьянами приходилось по 1,7 крепостного.

Стратификация дворянства Европейской России без Польши и Финляндии в 1858 г.

	Число дворян обоего пола		Число крепостных мужского пола у дворян	
	Тысяч	%	Тысяч	%
Личные	276,8	31,3	0	0
Потомственные	612,0	68,9		
Без земли и крепостных	33,9	3,8	0	0
С землёй и крепостными	96,6	10,9	0	0
Без земли, с крепостными, до 4	16,8	1,9	12,0	0,1
Без земли, с крепостными, до 20	190,2	21,4	327,5	3,1
С землёй и с крепостными, 20—100	164,5	18,5	1666,1	15,8
С землёй и с крепостными, 101—500	92,4	10,4	3925,1	37,2
С землёй и с крепостными, 501—1000	11,2	1,3	1569,9	14,9
С землёй и с крепостными, >1000	6,4	0,7	3050,6	28,9
Итого	888,8	100	10 551,2	100

Это как понимать? Может быть, принять во внимание, что в таблице учтены только мужики, а не бабы? Увы, это не поможет; если даже допустить, что во втором столбце, в отличие от четвёртого, учитывались крестьянки (а это не факт), то число лишь удвоится, выйдет 3,4 крепостных.

То же самое получается и дальше. На помещика с 20—100 крестьянами в среднем приходится по $1666 : 164 = 10{,}1$ крестьянина — вдвое меньше, чем допускает нижняя граница. И так далее.

Поразмыслив, я всё-таки нашёл правдоподобное объяснение этому парадоксу. Вероятно, помещики учтены ВСЕ — обоего пола и с учётом детей. Если принять, что в дворянской семье пять душ (скажем, помещик, жена и трое детей), и на каждого из них приходится эти самые 1,7 крепостного — то на всю семью приходилось в среднем 8,5 крепостных, что уже нормально укладывается в интервал от 4 до 20.

Возможно, именно так и было. Может быть, тут какое-то другое объяснение. Во всяком случае, автору безусловно следовало бы разъяснить этот момент.

Но автор совершенно не интересовался такими пустяками. Ему нужны цифры — он привёл цифры. Ну, и хватит с вас...

Вот вам ещё пример, на этот раз довольно грустный.

• Читаем бодрое сообщение (от 23.11.2010). Шапка: «ВИЧ в мире всё меньше». Это ведь хорошо, не правда ли? Прочтём:

Количество новых случаев ВИЧ в мире снизилось с 3,1 миллиона в 2001 г. до 2,6 миллиона в 2009 г., или на 19 %, сообщил директор агентства ООН по борьбе со СПИДом. В настоящее время в мире живёт 33,3 миллиона ВИЧ-инфицированных — на сто тысяч меньше, чем год назад.

Так вот, господа. Если заразилось 2,6 миллиона, а инфицированных стало меньше на 100 тысяч, то куда же делись 2,7 миллиона? Ответ, к сожалению, очевиден: умерли.

Однако этого журналисты не видят. И излагают эти печальные факты в мажорном духе.

• А вот обратный случай. Согласно сообщению пресс-службы Счётной палаты Украины, смертность в этой стране «превышает соответствующие показатели в Европе в 3—5 раз...»

Более чем странно, если принять во внимание, что до сих пор смертность во всех странах составляла ровно 100 %.

Конечно, и здесь можно обсуждать, как получилась такая удивительная цифра. Сказать, что смертность в настоящее время (именно в настоящее) втрое выше? Тоже не получается, тоже цифирь не сходится. Потому что это должно было бы означать, что продолжительность жизни на Украине примерно в три раза меньше, чем в Европе; она действительно меньше, но никак не втрое. Поэтому фактор продолжительности жизни может объяснить такой феномен лишь на 20—30 %. А где остальные 70 %?

Можно, конечно, допустить, что речь идёт о случайном «всплеске» смертности. Но тогда он должен был бы привести к тому, что через год-два всё нормализуется, и смертность на Украине станет примерно такой же, как в Европе (должна бы — меньше, но как сказано, надо учесть, что продолжительность жизни меньше).

А ещё можно допустить, что играет роль такой фактор: значительная часть активного населения выехала на заработки. Их смертность (допустим) не учитывается. И в результате учитывается смертность только среди тех, кто остался, т. е. среди людей постарше. Это автоматически даст некоторое увеличение смертности — хотя опять-таки недостаточное, чтобы объяснить подобные цифры.

В общем, какие-то объяснения этим откровенно абсурдным цифрам придумать можно. Но вновь повторю: это никому не интересно. Прежде всего — потому, что никто не замечает абсурдности цифр.

До сих пор я говорил о том, что нематематики не умеют обращаться с цифрами. Но увы! И у людей, прямо связанных с математикой, есть проблемы.

• Знаменитый, а может быть, великий математик современности Уильям Пол Тёрстон (W. P. Thurston) пишет в своей статье[1]:

«Помню, как в пятом классе я пришёл к поразившему меня пониманию, что ответ на вопрос «сколько будет 134 делённое на 29» — просто $\frac{134}{29}$. Это же удивительно, от какого количества работы можно освободиться! Для ме-

[1] Переведено в журнале «Математическое просвещение» (М., 2007. Т. 11).

ня деление 134 на 29 было утомительным заданием, тогда как за таким предметом, как $\frac{134}{29}$, никакого труда не стояло. В радостном возбуждении я прибежал к отцу и рассказал о своём замечательном открытии. Он мне ответил: да, да, конечно, так и есть: $\frac{a}{b}$ и a, делённое на b, — это просто синонимы. Для него это был всего лишь ещё один вариант обозначений».

Мысль поучительная, но... способный мальчик-пятиклассник был не совсем прав. Он не понимал, что таким образом мы выигрываем в одном, чтобы потерять в другом. При таком обозначении вы, скажем, не очень ясно понимаете: а вот это самое число $\frac{134}{29}$ — оно, к примеру, больше трёх или меньше? И по этому случаю хочу рассказать ещё один анекдот. Опять «анекдот» в классическом смысле слова; на этот раз — из моих собственных наблюдений.

Когда-то я пытался давать на вступительных экзаменах в КПИ (т. е. в одном из лучших вузов Киева) несложную задачу «на пятёрку». И потерпел полное поражение. Никто из претендентов на пятёрку не знал, как её решать.

Задача такова.

Даны 4 положительных числа a, b, c, d. Рассматриваются три дроби: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *и* $\frac{a+c}{b+d}$.

Как они могут располагаться по возрастанию (и как — не могут)?

Ответ состоит в том, что третья дробь (она называется медианой) всегда находится посредине между двумя другими. Доказательство более чем элементарно, но... его не проходят в школе. Результат, как сказано, печален.

И причина, вероятно, именно в том, что школьники слишком много внимания уделяют формальным обозначениям и явно недостаточно понимают, что именно они должны обозначать.

Напоследок приведу ещё два примера, где уже не будет никаких цифр, но суть проблемы та же. Оба взяты из книги Н. Константинова, в обоих идёт речь — подчеркну это — о школьниках из специальных школ, глубоко изучавших математику и физику. И тем не менее...

• Как-то раз группа школьников плыла на лодках. Один из школьников захотел перепрыгнуть из одной лодки в другую, шедшую в кильватере следом. «Я просто подпрыгну, — объявил он, — и пока я поднимусь и опущусь, та лодка как раз подойдёт».

А ведь ему рассказывали в школе об относительности движения. И был это не двоечник, не хорошист, а один из лучших и талантливейших школьников (других в константиновском лагере не было). Но он всё равно был уверен: то, что он учит в школе — это так, наука, не имеющая отношения к реальности. И ему таки понадобилось подпрыгнуть и опуститься на то же место (то же, разумеется, в лодке; в неподвижной системе координат он двигался вниз по течению вместе с лодкой), чтобы понять, что *относительность движения есть физический факт*.

Другой подобный случай.

• Школьник оставил на берегу Белого моря свой рюкзак. Вернувшись, он с удивлением обнаружил, что его на берегу и близко нет. Украли? Нет; рюкзак стоял там же, где стоял. Но теперь он стоял в воде, далеко от берега. Ушёл берег: начался прилив.

А ведь опять же — в школе он учил про приливы...

Зачем балерине математика?

Допустим, однако, что человек не собирается возиться с цифрами вообще. Ни извлекать из них что-либо, ни вообще что-то делать. Так, наверно, он прекрасно обойдётся и без математики?

Обойтись — обойдётся. Можно, как известно, обойтись без одной ноги (или даже без двух) и прожить жизнь; можно даже быть при этом счастливым. Но никто не станет спорить, что с обеими ногами как-то предпочтительней.

Так вот, зададим себе вопрос: зачем математика балерине или художнику? Неужели им так необходимо уметь решать квадратные неравенства?

Тут я для начала хочу привести точку зрения телекритика газеты «Известия» и возразить ей.

Ирина Петровская, критик, вообще-то, очень и очень неглупый, рассуждая о современной полу-развлекательной, полу-образовательной телепередаче («Известия», 22.02.2008), не удержалась, чтобы не лягнуть советскую систему образования.

«А на канале СТС с недавних пор существует своё интеллектуальное шоу под названием «Кто умнее пятиклассника?» Разного рода знаменитостям предлагают ответить на вопросы школьной программы 1—5 классов. Темы: литература, история, география, математика, природоведение... Подсказчиками выступают как раз пятиклассники, готовые прийти на помощь плавающей в школьной программе знаменитости. Тот, кто всё-таки проваливает экзамен, должен публично признаться: «Я не умнее пятиклассника». Почти все произносят эту фразу ещё до начала испытания. И это, в свою очередь, развенчивает миф о невероятной мощи советского школьного образования, якобы дававшего ученикам такой багаж знаний, что хоть ночью разбуди и спроси — от зубов отскакивать будет.

Да, вдалбливать знания в школе действительно умели. Вот только не задержались эти насильно вбитые знания в бедных головушках бывших советских школьников. А может, многие из них и не нужны были, вот время и стёрло их из памяти словно ластиком. Но нынешним школярам по-прежнему приходится зубрить то, что в будущем им совершенно не пригодится...»

Аргументация, мягко говоря, сомнительная. И. Петровская не понимает, что идеал, к которому должна стремиться школа — в том, чтобы научить человека *учиться*; если он это умеет, то впоследствии всегда сумеет за несколько месяцев «доучить» то, что ему понадобится. Достигается ли этот идеал — другой вопрос; но важно понимать, что цель образования именно в этом, а совсем не в том, чтобы «вдолбить» знания, которые якобы пригодятся в дальнейшем[1].

Не понимает она и того, что если большая часть полученных знаний потом благополучно выветривается из головы — тут нет беды. Большую часть знаний человек приобретает для того, чтобы потом забыть. Отчасти потому, что для того, чтобы запомнить хоть что-то — надо выучить вдесятеро больше (если выучите только необходимое — забудете из него девять десятых). А отчасти ещё и потому, что в принципе **есть вещи, которые нужно выучить именно для того, чтобы потом забыть**.

Эта очень важная и глубокая мысль встретилась мне в воспоминаниях Сергея Прокофьева. В них он, среди прочего, описывает свои занятия с Р. Глиэром, когда 27-летний композитор учил 10-летнего, но уже много обещавшего Серёжу Прокофьева, и как Глиэр просветил его в отношении «квадрата», секвенций и отклонений в шестую ступень. Что это такое — для нас не особенно важно, скажу лишь, что «квадрат» — это построение музыкального произведения четвёрками: 4 такта, потом следующие 4, и так далее.

Однако музыканту (пишет Прокофьев) не следует слишком строго держаться квадрата; он вносит в мысль порядок, но если вся пьеса будет написана как $4+4+4$, то она станет монотонной, и $4+4+5$ повеет, как свежий воздух. Квадрат надо было выучить — а потом забыть. «Этого мне Глиэр не объяснил, может быть, потому, что сам неясно сознавал, и я надолго попал в объятья квадрата».

Это очень важная мысль.

Действительно, есть много вещей, которые надо не просто выучить, а выучить и потом забыть. Вот аналогия: говорят, что человеку надо прочесть 10 книг, но эти 10 книг надо искать всю жизнь. Это не означает, что остальные действительно можно не читать. Это значит,

[1] Для примера: если вы хотите научиться решать неравенства или брать интегралы — вам необходимо решить много неравенств; взять много интегралов. Но вам нет никакой необходимости помнить решённые вами задачи — ни их решений, ни даже их условий. Всё это выветривается из памяти — туда ему и дорога; вам же остаётся приобретённое искусство решать эти задачи.

что надо прочесть очень много других книг, после чего (но только после этого!!) ты поймёшь, что это всё — не обязательно. Это можно уже забыть. Но всё равно все эти знания остаются где-то в подкорке[1].

Вернёмся, однако, к нашей балерине. Наверно, многие со мной согласятся, что и ей (как каждому из нас) следует знать побольше. Большинство моих современников с этим тезисом, конечно, не согласны — но эти люди читать мою статью не будут, а потому и я могу их мнение игнорировать; моих же читателей, я полагаю, убеждать в этом — значит ломиться в открытую дверь. Но мои читатели выдвинут иное возражение: конечно, балерине тоже нужно знать побольше (в частности — чтобы потом забыть), но всего ведь всё равно не выучишь. Зачем же ей математика, именно математика? Может быть, пусть лучше учит, чтобы забыть, что-нибудь другое?

На такую постановку вопроса, вообще говоря, ответить нечего: есть и другие полезные вещи. Но есть вещи, входящие в обязательный культурный багаж — об этом речь пойдёт ниже — и сверх того, есть вещи, которые необходимы всякому. И прежде всего — это некоторые свойства души.

Потому позвольте мне поговорить немного подробнее о тех вещах, которые вполне можно забыть, но с которыми надо ознакомиться — и потом всю жизнь держать в подкорке.

Математические понятия

Лет 30 назад в мехматской стенгазете была опубликована статья о Всесоюзной алгебраической конференции «Кольца и модули». Она начиналась со слов о том, что плакат на местном вокзале с названием конференции вызвал некоторое смущение, поскольку «хотя что такое кольцо, знает каждый, то о модулях знают лишь те, кто ещё помнит программу шестого класса...»[2]

И в самом деле: считается, что культурный человек не может не знать, кто такая Мона Лиза и что Героическую симфонию написал Бетховен, а не Моцарт. В то же время предполагается, что

[1] Во времена Низами, чтобы стать поэтом, нужно было знать на память столько-то тысяч строк классиков, столько-то — современников; а сверх того, требовалось ещё знать наизусть и забыть 10 000 строк — чтобы они порождали подтекст.

[2] Несведущим читателям поясню: это была шутка. На самом деле и кольцо, и модуль — не те, о которых знают все или хотя бы все шестиклассники; это понятия из современной алгебры, довольно простые, но всё же входящие в университетский, а не школьный «багаж знаний».

культурному человеку вовсе не обязательно знать, что такое кольцо, или что такое дифференциальное уравнение. Это не входит в «обязательный багаж».

Я охотно соглашаюсь с первой половиной, которая является (или, увы, являлась до недавнего времени) общепризнанной, но не могу согласиться со вторым. Дело, разумеется, не в том, чтобы непременно выучить какие-то формулы, или чтобы знать, как именно решается КдФ-уравнение[1] — этого, в самом деле, знать не обязательно (я и сам-то не знаю).

Можно не знать, как именно решать дифференциальные уравнения и как следует работать с бесконечно малыми. Но понимать, что это такое, необходимо.

Необходимо знать, что такое «общее положение»; что такое контрпример, зачем он нужен и как он строится.

Не пытаясь представить читателю какую-то общую картину, я ограничусь тремя-четырьмя этюдами на эту тему.

С точки зрения методики преподавания мне, вероятно, следовало бы начать с темы «доказательства, контрпример и понятие общего положения». Но эти вещи немного навязли в зубах, и я хочу начать с философии матанализа и философии дифуров.

Да, каждый раздел математики имеет некую собственную философию. Философия алгебры состоит в том, что надо изучать инварианты; философия теории вероятностей — в том, что маловероятные события не происходят. А вот названные мной науки... с них и начнём.

Математический анализ и дифференциальные уравнения

Философия математического анализа — в том, что *всё происходящее приблизительно линейно*. Знаем ли мы это? Да, это знает каждый. Каждый уверен в том, что если он будет идти не один час, а два, то пройдёт вдвое большее расстояние; если получит в полтора раза денег, то и купит в полтора раза больше, и так далее, и тому подобное.

И поэтому, пожалуй, важнее обсудить даже не то, почему это верно (это, повторю, и так все знают), а как раз обратное: почему это неверно.

Допустим, вы — американский пионер XVIII в., вышли в густой лес и решили обосноваться в этом месте. Вы вырубаете участок, что-

[1] Уравнение Кортевега — де Фриза, описывающее распространение волны в мелком бассейне.

бы поставить там свой дом, и ещё участок — чтобы засеять поле. Поставили; засеяли; сняли урожай.

Допустим теперь, что на следующий год у вас появились дополнительные силы, дополнительные рабочие руки, и вы решили: вам есть смысл вдвое увеличить свой участок, чтобы получить урожай вдвое больше.

Каким будет результат? Да именно таким он и будет (есть, конечно, разные привходящие обстоятельства, вроде возможной засухи или, наоборот, благоприятной погоды, которая вам даст урожай не вдвое, а втрое больше — но это не имеет к делу отношения; это вы предвидели заранее). Результат линейно или приблизительно линейно зависит от вложенных усилий и расходов.

Но если вы продолжаете увеличивать вырубки — что тогда?

Тогда через некоторое время вы неожиданно для себя обнаружите, что климат местности стал меняться. Что ручьи пересохли, и поля страждут от засухи. Что начались пыльные бури... да мало ли что ещё. Словом, возникли внушительные *нелинейные эффекты*, которые были совершенно незаметны до сих пор. «Линейный» подход оказался непригодным, когда изменения слишком велики.

Понимать это чрезвычайно важно. Но теперь (вернёмся назад) давайте поймём и другое: «линейная философия», т. е. философия матанализа, тем не менее очень часто позволяет правильно смотреть на вещи, она крайне полезна. Но совершенно необходимо также понимать, что́ именно вы делаете, когда предсказываете «линейный» эффект — и понимать, до каких пор ваш расчёт достаточно разумен, обоснован — и где он становится весьма опасен.

К примеру, что будет, если продолжать выкачивать из недр Земли газ и нефть? Все считают, что будет то же самое, что и сейчас, только лучше; хорошо бы выкачивать ещё больше, чтобы нам жилось лучше.

Между тем, вроде бы, всякому понятно, что запасы нефти и газа в природе ограничены. Тем не менее все политики твёрдо уверены, что надо продолжать добывать больше нефти, больше газа. А что будет, когда всё выкачаем? А, оставьте; нам не до этого. Мы живём «линейно»: сегодня качаем 100 миллионов баррелей, завтра будем качать 150 миллионов, и будем жить в полтора раза лучше...

Но не будем говорить о грустном и постараемся понять хотя бы, что следует делать, если «линейная философия», философия матанализа, даёт сбой.

Как быть тогда? Тут может помочь *практика* (*уже не философия*) *дифуров*. Наука об обыкновенных дифференциальных уравнениях как раз изучает, как протекают процессы во времени. И она говорит, что мы можем предсказать течение процесса в целом, если знаем, как он протекает в малом. Это уже не анализ (анализ даёт примитивный, хотя и очень полезный прогноз: всё будет линейно), это более совершенный способ изучения. Как всякий более совершенный способ, он имеет тот минус, что каждый случай надо рассматривать по отдельности (в анализе всё всегда одинаково), да к тому же в большинстве случаев оказывается, что составить дифференциальное уравнение кое-как удаётся, но решить его нельзя[1].

Иногда решить уравнение удаётся. Простейший пример такого рода — процесс ядерного распада. Мы знаем, что за очень короткий срок распадается определённая доля атомов, скажем, урана-238 (для урана-235 верно то же, но доля распадающихся атомов другая).

Это то, что происходит «в малом», скажем, за долю секунды. Отсюда можно вывести, что количество оставшегося урана будет убывать по экспоненте, т. е. нужно определённое время, чтобы от имеющегося количества осталась половина; ровно столько же для того, чтобы от этой половины осталась половина (т. е. одна четверть исходного количества), потом половина от этого, и т. д.

Значительно сложнее явление солитона (уединённой волны), для которого было совсем непросто и написать дифференциальное уравнение, а уж тем более — разобраться с его решениями.

Тем не менее на первом, самом примитивном уровне, можно говорить, что и здесь то же самое: мы знаем, что именно происходит за минимальный отрезок времени (скажем, за долю секунды), и поэтому мы можем предсказать поведение волны надолго вперёд.

И вот такие вещи обязан понимать каждый.

Пределы

Отступим немного назад. Дифференциальное уравнение — вещь непростая. Предел, вроде бы, намного проще: понятие предела изучается в школе. Школьники что-то выучивают... и ничегошеньки не

[1] И поэтому математики шутят о себе так: «Если математику задают вопрос, будет ли устойчивым стол на четырёх ножках, он довольно быстро принесёт вам первые результаты — касающиеся стола с одной ножкой и стола с бесконечным числом ножек. Всю остальную жизнь он безуспешно пытается решить задачу о столе с произвольным числом ножек».

понимают. (Я сам-то только совсем недавно понял, что это такое — и спешу поделиться с читателем.)

Несколько лет назад я вёл дискуссию с математиком К. Он утверждал, что из школьной программы вполне можно выбросить теорию пределов — ведь «всем понятно, что производная — это просто-напросто касательная».

Я возразил: касательная — ладно, а как быть с рядами?

К: Так что же? Можно прекрасно сосчитать сумму геометрической прогрессии алгебраическими методами.

Я: Ну нет. А число e?

И вот тут-то до меня дошло, что самое вредное, что можно сделать — это привить человеку мысль, будто сумму ряда можно сосчитать.

Наоборот. Он должен понимать, что в абсолютном большинстве случаев (для того же числа $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$) единственное, что можно сделать — это «вручную» сложить достаточно много членов, а потом бросить это занятие и сказать, что мы вычислили сумму ряда довольно точно.

Точно так же, в большинстве случаев, вычисляется предел. Тут, конечно, возникает масса тонкостей — скажем, лучше было бы не просто «бросить» сложение членов ряда, а сверх того ещё приблизительно оценить сумму оставшихся, и тому подобное... но эти тонкости уже, и в самом деле, балерине или даже физику знать не обязательно. Но каждому надо понимать, что предел последовательности — это «на самом деле» просто-напросто его достаточно далёкий член, а сумма ряда — это сумма его первых десяти (может быть, ста или двухсот) членов.

Неточно? Конечно, неточно. Но для того чтобы понимать, как устроен мир, надо иметь в голове именно его неточную картину; точная уж слишком сложна.

Неравенства и теоремы о среднем

А ещё есть такая наука: теория неравенств. Она вполне элементарна, её изучают не в университетах, а в школах. Но недостаточно объясняют, зачем она нужна.

Для начала приведу один совсем простой пример.

Утверждение. *Если дано некоторое множество чисел, оно разбито на подмножества, и среднее значение в каждой группе меньше A, то и среднее значение по всему множеству меньше A.*

Очевидно?

Для всякого, кто понимает, — очевидно[1].

Для любого выпускника средней школы — трудная задача. И трудна она именно потому, что у него нет ни понимания о том, что такое «среднее», ни представления о том, что наука и жизнь как-то между собой связаны.

А зачем такие вещи нужны?

Ну, хотя бы для того, чтобы на важных заседаниях не произносились с умным видом слова: «к сожалению, имеются ещё недостатки, к примеру, в 9 областях наши показатели ниже, чем в среднем по стране...»

Или чтобы не оказывалось, что такие-то области в прошлом году были передовыми, а теперь, к сожалению, отстают...

• Пример из жизни: с учёным видом сообщают, что в прошлом году Полтавская область была по темпам роста на 21-м месте (т. е. среди наихудших), а в нынешнем достигла огромного успеха, перейдя на второе место.

Это что: резкое улучшение ситуации? — Ничего подобного. Это значит, что область начинала с очень низких показателей, и благодаря этому её небольшой прогресс сразу дал «высокие» темпы роста. А другие области, те, которые добились прогресса раньше — те исчерпали резервы роста, и теперь уже растут медленнее, оказываются на «плохих» местах.

Знание тонких фактов и методов решения неравенств совершенно не обязательно. Но знать, во сколько раз отличаются, к примеру, разные расстояния, необходимо. Иначе получается то, что мне пришлось однажды читать в газете:

«... Крым есть замечательная точка Земли, поскольку именно на Крым льётся с расстояния 15 000 световых лет непрерывный поток информации из Космоса...»

Писавший явно не представлял себе, что такое неравенства. Прикиньте, пожалуйста, размеры Крыма и световые годы[2].

Перейдём к другому, но тесно связанному с первым вопросу. Что такое «среднее»? Вы уверены, что вы знаете это?

---

[1] Для тех, кого смущает абстрактная формулировка, приведу другую, в точности равносильную. **В мире есть много стран, но в каждой стране средняя зарплата меньше 100 долларов в месяц. Тогда и по всему миру средняя зарплата меньше 100 долларов.**

Или ещё один вариант, опять-таки строго равносильный. **В мире есть много стран, средняя зарплата в мире больше 100 долларов в месяц. Тогда есть хотя бы одна страна, в которой средняя зарплата тоже больше 100 долларов в месяц.**

[2] Для справки: 1 световой год составляет около 10 триллионов километров.

К примеру: известно, что мужчины, в общем, выше женщин. Это известно всякому. А вот что именно это означает?

Что каждый мужчина, даже самый низкорослый, выше самой высокой женщины? Разумеется, нет.

А что же? То, что мужчины выше «в среднем». А что это означает — «в среднем»?

Что средний рост мужчины больше, чем средний рост женщины? Пожалуй, так... Вот только нехорошо, что нельзя понять, что такое «средний рост». Надо ли, к примеру, учитывать младенцев? (Вероятно, нет.) А 15-летних? Где граница?

А может быть, вообще надо говорить не о усреднённом росте, а о так называемой медиане: выбрать из всех мужчин одного мужчину среднего роста (т. е. такого, что ровно половина мужчин выше его и половина — ниже), соответственно выбрать женщину среднего роста — и сравнить?

Или брать по-другому? Счесть, что «среднее» значение — это значение, которое встречается чаще всего? Среднее геометрическое? Среднее гармоническое? Или, может быть, взвешенное среднее, о котором речь пойдёт чуть ниже?

Мне, вероятно, скажут: стоит ли так разбираться? — В данном вопросе, бесспорно, не стоит. А если речь идёт не о таком академическом вопросе, как «средний рост мужчин», а о среднем росте цен на товары? Тогда как его вычислять, и что правильнее?

Как известно, «средний» рост цен называется инфляцией (или индексом инфляции). Но дав ему название (или даже предложив формулу для его вычисления), мы никак не объяснили, что же это такое.

И в каком именно из перечисленных смыслов берётся среднее: среднее арифметическое, среднее гармоническое или взвешенное среднее (т. е. среднее арифметическое, но с некими коэффициентами «взвешивания»)?

На самом деле экономисты используют последнюю из перечисленных формул, причём коэффициенты вычисляют путём тщательного разглядывания потолка. Но правильный ответ о том, как вычислять инфляцию, таков: ни один из них, или же все сразу. То есть: ни один из этих показателей, строго говоря, не годится, величина не может быть измерена ОДНИМ числом, и надо пользоваться более сложными приёмами.

Этого, однако, никто делать не будет, поскольку более сложные показатели не удастся вставить в пропагандистскую статью (хвалебную или хулительную — всё равно).

Однако не надо впадать в обратную крайность и утверждать, что «ничего мы не знаем и знать не можем». Нет. Именно в связи с проблемой «наилучшего среднего» стоит сказать, что в исключительно важном и очень часто встречающемся случае *нормального распределения* ВСЕ перечисленные выше показатели СОВПАДАЮТ. Иными словами — можно пользоваться любым из них, и все они хороши.

Не всё безнадёжно. Но и не всё просто.

Алгебра. Инварианты. О множественности миров

Современная математика занимается в основном преобразованиями. И алгебра — тот раздел, который смотрит на них с позиции инвариантов.

Философия алгебры состоит в том, что надо изучать инварианты, т. е. то, что не меняется в ходе преобразований. Так сказать, «всё меняется в этом мире, но есть и что-то прочное, неизменное; именно на это нетленное надо обращать внимание, всё остальное — пустяки».

Конечно, этот подход — тоже ущербный; не только нетленное заслуживает внимания. Но поскольку алгебра — не вся математика, а только один крупный её раздел, такой подход более чем оправдан.

А что же такое «нетленное» в смысле алгебры?

Пример. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, т. е. симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3, но в другом углу?

Ответ: нет, невозможно. Дело в том, что вначале в нечётных рядах вначале стоит 6 фишек, тогда как если поставить фишки в верхний угол, то в нечётных рядах будет только 3 фишки. Но фишка прыгает из нечётного ряда только в нечётный (и никогда — в чётный); раз вначале в нечётных рядах стояло 6 фишек — так оно и будет до конца времён.

Такова *философия алгебры*. А *задачи алгебры* совсем другие. Алгебра создаёт новые миры.

Их множество. Можно заниматься кольцом натуральных чисел; но можно вместо этого взять какое-нибудь глобальное кольцо. Этих колец бесчисленное множество; они в основном похожи друг на друга, но каждое имеет свои особенности, точно так же, как имеют свои особенности Франция, Германия или Италия — при том, что все они — крупные европейские страны, и в этом смысле противостоят Венесуэле или Китаю.

А можно взять уже кольца совсем другого типа: скажем, кольца Ли. Или изучать теорию луп. Продолжая приведённую аналогию, мы скажем, что это будут уже «алгебраический Китай», «алгебраическая Индия». И всё это — отдельные миры.

Но...

Современная алгебра кое в чём похожа на жизнь во Вселенной. Планет много, но есть ли на них жизнь? Судя по всему — где-то, возможно, есть, но редко.

Сравнение покажется неожиданным, но сходство есть.

Современная алгебра (не путать со школьной алгеброй: школьная — тоже наука, тоже очень важная и полезная — но совсем другая, имеющая мало общего с современной) — наука, которая прежде всего учит чёткости. Предельно ясно сказано, «что мы знаем — что требуется доказать».

А что именно мы знаем? Согласно философии современной алгебры, мы знаем некий набор аксиом. Отбросьте любую, замените её чем-нибудь — и вы получите новую теорию, так сказать, новый мир.

Много миров. Но среди них очень мало разумных. Так же мало, как мало во Вселенной миров, где есть жизнь.

Вот потому-то по окончании доклада принято спрашивать докладчика: «А зачем нужна эта теория?» И чаще всего оказывается, что она вовсе не нужна.

Помню, как на одном семинаре известный математик К. спрашивал у молодых докладчиков:

— Ну, а зачем нужен этот метод?

Докладчик: Сначала нужно его довести до совершенства.

К. (иронически): А уж после этого выбросить.

Смысл этой дискуссии в том, что нередко бывает именно так: математик (в особенности — алгебраист) сам придумывает задачу, сам придумывает для неё метод, который только для неё и годится... и тут, конечно, возникает вопрос: «а какая от этого польза?»

Ещё одну иллюстрацию к этому принципу даёт известный анекдот.

• Два воздухоплавателя отправились в путешествие на воздушном шаре. Вдруг — ураган, шар уносит неведомо куда, за тысячу миль. Наконец, ураган начинает стихать, шар уже не мчится, а просто летит очень быстро, и снизился настолько, что можно даже слышать, что происходит внизу.

Внизу идёт какой-то человек; воздухоплаватели кричат ему:

— Э-эй! Где мы находимся?

Человек внизу после краткого раздумья отвечает:

— Вы находитесь на воздушном шаре.

Больше сказать они ничего не успевают, шар несёт дальше. Один из воздухоплавателей говорит другому:

— По-моему, это был математик.

— А почему ты так думаешь?

— По трём причинам. Во-первых, он немного подумал, прежде чем ответить. Во-вторых, его ответ был абсолютно правильным. А в-третьих, совершенно непонятно, зачем такой ответ нужен.

И всё же (эту притчу приводил Станислав Лем в своей знаменитой «Сумме технологии»), если вы сшили множество разных костюмов (с тремя рукавами, с восемью штанинами и так далее), то у вас возникает неплохой шанс найти кого-нибудь, кому один из ваших костюмов подойдёт. Может быть, стрекозе или осьминогу, а может — глубоководной рыбе, которую ещё никто не видел. Так было в истории математики много раз. Знаменитый немецкий математик Эдмунд Ландау (которого не надо путать со знаменитым советским физиком Львом Ландау) на вопрос о том, зачем нужна теория чисел, иронически отвечал:

— Как зачем? А диссертации?

Это был принципиальный ответ: математика не должна заниматься только тем, что «нужно»[1]. Но с другой стороны, в наши дни выяснилось, что Ландау был неправ: теория чисел оказалась совершенно необходима для построения надёжных кодов.

Другой классический пример — матричное и тензорное исчисление: их придумали «просто так», а они оказались совершенно необходимыми для создания общей теории относительности и квантовой механики.

Доказательство

Чему должна учить математика? Поставим вопрос несколько уже: чему должна учить человека школьная математика?

[1] О том же на много веков раньше говорил Евклид. Когда некий молодой человек спросил его, какая польза от геометрии, Евклид подозвал своего раба и презрительно сказал ему:

— Он ищет пользы. Дай ему медный грош.

Прежде всего, разумеется — умению *думать* и *доказывать*.

То, что человеку необходимо умение доказывать — факт, очевидный не для всех, и к этому я вернусь чуть ниже. То, что необходимо умение думать — вероятно, можно принять без аргументации, но зато надо объяснить, почему речь идёт именно о математике.

Ответ: просто потому, что математика даёт в этом смысле самый благодарный материал.

Само собой разумеется, что учитель физики или другой точной науки также может и должен учить думать. И то же самое можно сказать даже об учителе литературы. Но в других науках гораздо больший акцент делается на других (тоже, разумеется, весьма полезных) качествах: память, фантазия. К примеру, в географии надо знать целый ряд фактов, которые ниоткуда не вытекают. То, что Джомолунгма — высочайшая из вершин мира, и что её высота составляет столько-то метров — нельзя ни понять, ни объяснить. Можно только выучить.

В математике тоже есть факты, которые надо запомнить без объяснения (к примеру, ряд фактов из истории математики). Но мыслить надо всё время, постоянно. Притом задачи есть на любой вкус, от совсем лёгких до трансцендентно трудных. Только трудись! Каждая наука развивает умение думать, но математика даёт для этого самые лучшие возможности.

Что же касается умения доказывать, тут, понятное дело математика вне конкуренции. Но действительно ли человеку так это важно?

Разумеется, для 99,99 % людей совершенно не обязательно знать, как именно доказывается, к примеру, формула Стирлинга. Но всякому нужно — хотя бы для того, чтобы не быть игрушкой в руках демагогов — понимать, что такое доказательство, и чем доказательство отличается от правдоподобного аргумента, а аргумент — от голословного утверждения, или демагогии.

И так как ничему нельзя научиться, не попробовав самому — так нельзя понять, что такое доказательство, не проведя его самостоятельно, пусть хотя бы на таком примитивном материале, как «в равнобедренном треугольнике высота и биссектриса совпадают»...

Да. Чтобы понять, что такое доказательство, надо самому научиться доказывать. Это лучше всего сделать в школе. Потом можно это умение забыть; без него большинство может обойтись. Но это тот самый случай, когда надо «научиться, чтобы потом забыть».

А теперь позвольте немного поговорить об обратной стороне доказательства: о теоремах существования.

Теоремы существования и контрпримеры

Доказательство утверждает: ВСЕГДА верно то-то (ну, скажем: диагонали ромба всегда перпендикулярны; не существует ромба, у которого угол между диагоналями равен 89°). Теорема существования (будь она верна) говорила бы, напротив: существует ромб с углом 89°; имеется контрпример, вот он...

Зачем это нужно?

Сегодня очень модно издеваться над формулой «я Пастернака не читал, но осуждаю...»

В принципе эти издёвки обоснованы. Но они (этого сейчас не желают понимать) обоснованы только в некоторых, довольно специальных обстоятельствах. А чаще всего подобная аналогия, напротив, доказывает лишь невысокий умственный уровень насмешника.

Отчего? Ну, я мог бы сослаться на ответную цитату. Из Михаила Булгакова:

«— А вам что же, мои стихи не нравятся?

— Ужасно не нравятся!

— А вы какие читали?

— Никаких я ваших стихов не читал! — нервно воскликнул посетитель.

— А как же вы говорите?» — не без оснований спрашивает Иван Бездомный. Но и у Мастера есть свои резоны:

«— Ну что ж тут такого, — ответил гость, — как будто я других не читал...»

(*М. Булгаков. «Мастер и Маргарита»*)

Этот аргумент многим покажется довольно убедительным. Но в действительности это — всего лишь цитата против цитаты.

Гораздо важнее то, что во многих обстоятельствах, действительно, мы ИМЕЕМ ПРАВО, не читая говорить: «Это чушь».

Отчего? Да именно оттого, что есть такая вещь, как теоремы существования.

Если вам доказывают, что $11 = 12$ (есть такие софизмы), или если автор, к примеру, приводит решение задачи о трисекции угла, то я могу НЕ ЧИТАЯ сказать, что в решении есть ошибка.

«Где? — спросят меня. — Найдите её и укажите!»

«Нет, — отвечаю я (и все математики поддержат меня безоговорочно). — Мне не нужно искать ошибку — я и так знаю, что она есть. У меня есть теорема о её существовании. И нет ни малейшего желания копаться на десяти (а бывает, что и тридцати) страницах, выискивая, где именно автор поставил минус вместо плюса».

Тут справедлива, так сказать, «теорема существования ошибки». Можно привести целый ряд других примеров, где достаточно ЗНАТЬ, что такой-то объект существует; но для простоты остановимся только на возможности ДОКАЗАТЬ наличие ошибки, доказать, что такое-то «доказательство», такой-то аргумент неверен даже не потому, что мы нашли в нём ошибку — он неверен априори, потому что быть верным он не может.

И попробуем эту аргументацию перенести из математики — в другие науки.

И мы увидим, что очень многие утверждения заведомо неверны.

Приведу пару примеров из истории.

Марк Твен в своём романе «Янки при дворе короля Артура» изображает средневековые темницы, в которых десятилетиями томятся узники.

Могло ли такое быть?

Нет. Ситуации, которую изобразил Марк Твен, быть не могло.

А почему? Казалось бы, во-первых, можно привести примеры подобных узников. И темницы были (а в старинных замках и сохранились). А во-вторых, даже если б не так — мой тезис голословный, ведь я не могу доказать, что ни одного такого случая не было.

То и другое верно. И тем не менее я настаиваю на своём тезисе: такого быть не могло. И вот почему.

Если вы держите узника в тюрьме 10, 20 (не говорю уж: больше) лет... А за какие шиши?

Узники, изображённые в романе, — бедные люди. И, что ещё важнее, — дело происходит в бедные времена. Кто же это будет хотя бы год кормить дармоеда; содержать тюремщика, который должен, хотя бы, принести ему еду; наконец, просто держать человека в клетке или камере, которую можно было бы использовать с толком?

Но ведь такие случаи были? — Да, и немало. Но все — не такие.

Часто случалось, к примеру, что знатного пленника держали — может быть, и долгие годы — ради выкупа. Бывало и так, что на выкуп не рассчитывали, а человека всё-таки держали много лет в тюрьме: к примеру, французский король Людовик XI был сильно разгневан на своего бывшего любимого советника кардинала Балю, но пролить кровь прелата боялся — и засадил его в тюрьму на долгие годы. Но это уж случай особый.

А бедняка... Если он сильно проштрафился — его попросту вешали, или казнили более изощрённым способом — но не держали в тюрьме. Если проштрафился не очень сильно — его можно было выпороть, или посадить в колодки. Это *дешёвый* способ наказания — в отличие от тюрьмы.

После того, как европейцы обзавелись галерным флотом, казнить кого ни попадя перестали: к чему такой непроизводительный расход человеческого материала, когда можно его (этот материал) послать грести на галерах? Но и тут экономический смысл очевиден.

А что, простых людей так-таки и не сажали? — Сажали, а как же. Но ненадолго, и с практической целью: взять деньги (своего рода рэкет прошлых столетий). Если какой-то крестьянин — как предполагалось, зажиточный — не платил подать феодалу и ссылался на то, что денег нет ни гроша, — его сажали на неделю-другую в сырой подвал (я сам видел такие подвалы). Дня через три он обычно вспоминал, что деньги у него есть...

Думаю, из сказанного понятно, почему я, не имея под рукой решительно никаких исторических трудов, берусь утверждать: ситуация, описанная в романе, не могла иметь место.

Но то же можно сказать и о других ситуациях.

К примеру, сейчас очень популярно утверждение, что «в начале войны советские люди не имели особой охоты воевать, и только когда они увидели, чтó представляет собой Гитлер — ну, тут уже пошла иная, народная война...».

И здесь я, точно так же, без всяких материалов берусь утверждать, что это неверно. Мне не нужно искать ошибки в данных, которые собрали историки. Достаточно того, что в утверждении есть явная логическая ошибка.

Можно ли допустить, что перелом в ходе войны был связан целиком, или хотя бы в основном с тем, что вначале люди воевать не хотели, а потом увидели истинное лицо нацизма?

Рассуждаем от противного: примем пока что этот тезис, как верный, и посмотрим, что из него вытекает.

А следствие очевидно. Кто именно увидел истинное лицо нацизма? Может быть, солдаты сибирских дивизий, переброшенные под Москву в декабре 1941-го?

А что именно они могли увидеть? Они знали о Гитлере только то, что им говорила советская пропаганда. Была ли эта пропаганда истинной или лживой — в контексте обсуждаемого вопроса не имеет ровно никакого значения. Либо они верили этой пропаганде — но тогда они должны были бы верить ей в июне 1941-го так же точно, как в ноябре. Либо они советской пропаганде раньше не доверяли — но тогда у них не было особых причин довериться ей осенью.

А вот жители оккупированной территории, напротив, видели и знали, каков новый порядок, уже не из сообщений радио, а непосредственно. Согласно этой логике, именно они должны были стать основной силой сопротивления нацизму.

Было так? Не было.

Партизанские отряды сыграли определённую роль в войне. Но (никто этого не оспаривает) роль эта была всё-таки второстепенной. Кстати сказать, в истории случалось и иначе: когда Наполеон воевал в Испании, основной силой сопротивления стали именно испанские партизаны, и именно из-за них, а не из-за британского корпуса, Испания стала незаживающей язвой наполеоновской империи.

Но к войне 1941—1945 гг. это никак не подойдёт. Здесь решающую роль сыграла регулярная армия, состоявшая из тех, кто, собственно говоря, нацистских зверств и не видел — по крайней мере, до тех пор, пока не началось масштабное контрнаступление. Но это масштабное контрнаступление началось уже в связи с переломом в ходе войны, т. е. после того, как произошло то, чего (по принятой нами теории) быть не должно.

Следовательно, теория неверна.

* * *

Контрпример — важнейшее понятие математической культуры, которое, кстати сказать, катастрофически недооценивается не только нематематиками, но также и профессиональными математиками.

В любой книге, в любом школьном или университетском курсе излагаются теоремы «то-то верно» (подразумевается: «верно всегда, без исключений»). Но крайне редко вы встретите в книге утверждение «то-то верно не всегда — вот вам контрпример».

Приведу простенький пример.

• **Задача 1.** Выпуклое тело плавает в воде, причём 90 % его объёма находится под водой. Докажите, что не менее 60 % его поверхности также находится под водой.

Ответ. Задача неверна. Контрпримером является плоская коробка, плавающая таким образом, что над водой выступает только крышка и минимальная часть боковых поверхностей (согласно условию — менее 10 % высоты). Если при этом высота намного меньше длины и ширины, условие задачи не выполнено, над водой находится почти 50 % поверхности.

Заодно уж замечу: приведённый пример можно модифицировать так, чтобы над водой находилось даже больше 50 % поверхности.

А вот вам совершенно иной пример контрпримера.

• **Утверждение.** *Многие математические теории — такие, например, как теория чисел — представляют интерес только для самих математиков, но не имеют и не могут иметь практических приложений.*

Контрпример. В XX веке оказалось, что теория кодирования — и, главное, практика кодирования — требует, к примеру, умения находить очень большие (порядка 10^{100}) простые числа. Это как раз одна из классических задач теории чисел.

Ждать приложений пришлось долго, но они появились.

Третий случай.

• Выше я говорил, что невозможно себе представить, чтобы простолюдина долго держали в тюрьме; что это бессмысленно.

А может быть, я всё-таки ошибаюсь?

Ведь есть контрпример. Согласно Библии, Иосифа довольно долго держали в темнице, при том, что он был простым рабом, и не было никаких причин, почему бы его, как сказано, не казнить (или выпороть, или просто отпустить).

Конечно, я могу сослаться на то, что это — явная сказка, легенда.

Но ведь в легендах, как правило, реалии жизни отражаются правильно — если нет причин для противного.

Не знаю.

А вот ещё один пример контрпримера.

• Дело было давно, лет 50, а может, и 60 тому назад. В Киеве проходил какой-то очередной диспут по генетике: генетики против лысенковцев.

Выступал один из сторонников Лысенко. Объясняя, почему приобретённые признаки могут и должны наследоваться, он привёл примерно такой пример:

«Допустим, что на некой делянке у ёлок систематически обрубают ветви. Такой опыт, конечно, трудно поставить — но если бы на протяжении ряда поколений так делали, то, несомненно, в конце концов ёлки стали бы иными: с короткими ветвями...»

На этом месте выступающего прервала реплика из зала. Известный киевский физик П. заявил: «Такой эксперимент был поставлен. На протяжении многих поколений все женщины рождаются девственными».

Последовало полторы секунды молчания — пока слушатели соображали, что имел в виду П. — а затем взрыв хохота.

И напоследок — пример «доказательства существования».

• **Задача 2.** Фома и Ерёма делят кучу из 25 монет в 1, 2, 3, ..., 25 алтынов. На каждом ходу один из них выбирает монету из кучи, а другой говорит, кому её отдать. Первый раз выбирает Фома, далее тот, у кого сейчас больше алтынов, при равенстве — тот же, кто в прошлый раз. Кто выиграет (получит больше денег, чем другой), если оба играют наилучшим образом?

Найти наилучший способ игры («выигрышную стратегию») в этой игре достаточно сложно; по-видимому, даже и невозможно без применения компьютеров. Тем не менее ответить на вопрос задачи не так уж сложно.

Ответ: выигрывает Ерёма.

В самом деле, после первого хода один из игроков получил несколько алтынов, и он же выбирает монету. Обозначим этого игрока A, а другого B. Поскольку в игре нет ничьей (суммарное число денег нечётно), в этот момент либо у A, либо у B есть выигрышная стратегия. Но первым своим действием Ерёма решает, кому из них быть в роли A, а кому — в роли B. Следовательно, у Ерёмы есть выигрышная стратегия.

Чистое «доказательство существования». Оно никак не помогает найти выигрышную стратегию.

Нужно ли среднему человеку (условно говоря — «балерине») знать приведённые мной примеры? — Конечно, нет. Нужно ли понимать, о чём шла речь в предыдущих абзацах? Непременно.

Математика и этические принципы

Понятно, что решение математических задач полезно всякому, просто потому, что ум требует упражнений — независимо от того, чем вы собираетесь заниматься. Достаточно часто говорят и о чёткости мысли, о том, что математика «ум в порядок приводит» (М. В. Ломоносов). Но крайне редко говорят об этическом аспекте.

А между тем в науке вообще, и в математике прежде всего, очень силён этический элемент. Он состоит не в том, что наука проповедует какие-то этические нормы. Во-первых, не проповедует, а во-вторых, подобная проповедь редко приносит какой-то эффект. Она делает гораздо более важную вещь; заставляет быть честным.

Всякому человеку следует быть честным. Можно проповедовать честность (дело малополезное, в особенности потому, что чаще всего проповедники сами не без греха). Можно подавать пример честности; это несколько полезнее, но тоже не самое лучшее.

А можно принуждать к честности: не угрозами, а силой необходимости. Математика именно это и делает: она принуждает быть честным. И это много лучше рассказов о хороших и плохих детях, или даже личного примера.

В классической математике, если ты утверждаешь, что получил такой-то результат, ты обязан предъявить доказательство. Если оно у тебя есть — значит, ты сказал правду. Если у тебя его нет — тебя просто не будут слушать. Дело не в том, что врать опасно — врать *бессмысленно*, врать невозможно: журнал не опубликует результат без доказательства.

Сверх того, математика учит самоцензуре, а точнее, требует от каждого жёсткой самоцензуры.

Делая столь провокационное утверждение, я, конечно же, вызываю на себя шквал возмущённых возгласов: ведь сегодня принято без всяких доказательств и без всяких аргументов утверждать, что цензура вообще крайне вредна, а уж самоцензура — едва ли не самый опасный вид цензуры.

Тем не менее, я настаиваю на своём утверждении: математика учит всякого самоцензуре, и это одно из важнейших её достоинств.

Что получается из свободы без самоцензуры — это все видят на заборах и на интернет-форумах. А в математике — пишете ли вы текст для публикации, или, пока что, просто набросок своих идей — вы всё равно считаетесь, не можете не считаться с тем, что в какой-то момент сказанное придётся доказывать... или отказаться от своих слов, как необоснованных.

Но самоцензура важна ещё и по другой причине. Да, она необходима, чтобы быть ответственным человеком; необходима, чтобы быть честным и не болтать что в голову взбредёт, не заботясь об аргументах. Но сверх того, она крайне полезна ещё и тем, что она развивает фантазию.

Та мысль, что математика развивает фантазию, далеко не оригинальна. Я могу сослаться на авторитет одного из величайших математиков XIX—XX вв. Давида Гильберта: «Ах, вы про этого моего бывшего ученика? Вы знаете, он стал поэтом. Для математика у него недоставало воображения».

Так оно и есть.

Поэту, писателю-фантасту чересчур богатое воображение иметь не обязательно — что и демонстрируют современные фантастические романы[1]. Всякий может написать что-то вроде: «я сел в машину времени, перелетел на миллион лет назад, оказался в другой галактике и охотился там на огненных драконов». Но подобное нагромождение никак друг с другом не связанных допущений — явное доказательство отсутствия воображения.

А как ведёт себя человек, наделённый воображением?

Вспомним для примера Уэллса. Он вводит совершенно фантастическое предположение: человека можно сделать невидимым. Но

[1] Есть, конечно, исключения вроде Станислава Лема, которого уж никак не обвинишь в бедности фантазии, — но как мало таких исключений!

никаких других нелепых предположений он уже не делает; он выжимает из своей идеи всё. Это и есть фантазия.

Неплохое описание такого фантазёра (или, если угодно, лжеца) даёт Джером К. Джером.

Его герой рассуждает о рыболовах. Все они врут. Но ведь врать — это тоже искусство. Каждый, мол, может войти в пивную и сказать: я вчера поймал пять дюжин рыб. Это свидетельствует только о наглости. Настоящий рыболов ведёт себя не так. — И далее герой Джерома рассказывает, как настоящий рыболов (врун, фантазёр) приходит в пивную, не спеша садится, слушает других, потом вскользь замечает: «Н-да... о том, что я поймал вчера, пожалуй, и рассказывать не стоит... поскольку мне всё равно никто не поверит», — и начинает обстоятельный рассказ, как он за весь день практически ничего не поймал — «десятка два щучек и две дюжины подлещиков не в счёт», и наконец, уже под вечер, леса натянулась, «я понял, что клюнуло что-то стоящее»... — ну, и так далее. Фантазия — не в количестве идей, а в умении выжать из своей идеи всё, что возможно.

Если говорить о современной литературе, то в качестве «контрпримера» к моему утверждению можно привести хотя бы роман Хайнлайна «Пасынки Вселенной». Хайнлайн не просто строит роман о путешествии в огромном космическом корабле — этот корабль за несколько столетий стал обществом, культурой со своими священными текстами, своей мифологией: роль бога-творца играет некий Джордан (на самом деле, как выясняется по ходу романа, Джордан — просто меценат, создатель Фонда Джордана, который отправил корабль), Хафф — в роли дьявола, виновного в Грехопадении и пр., и так далее. Хайнлайн не просто придумал идею; он сумел интересно её развернуть. Но это, повторяю, исключение. Как правило же, автор просто выстреливает идеями — одной за другой. Это не фантазия, это вещь, прямо ей противоположная.

Столь же бедна фантазия нынешних авторов детективов. И опять-таки бедность их фантазии видна из того, сколько параллельных линий они нагромождают в одной книге.

В «Лунном камне» Уилки Коллинза (я привожу его как положительный пример, для контраста) всё вертится вокруг одного-единственного вопроса. И автору хватило фантазии, чтобы написать вокруг этого довольно толстый роман.

А нынешние авторы на это не способны, и потому накручивают пять, шесть разных сюжетов в один роман. Тут одно убийство, там второе (никак с первым не связанное), а тут ещё ограбление, тоже чисто случайно произошедшее здесь же и в то же время. И все они намечены лишь пунктиром, потому что развить сюжет как следует у автора не хватает умения, не хватает фантазии.

Но вернёмся к математике.

Математик вынужден быть фантазёром: без фантазии не придумать никакого доказательства. При этом он не может просто бросить в мир какую-нибудь идею.

Идея должна, во-первых, «проходить»: я нафантазировал какой-то факт, но я теперь обязан доказать, что он верен, что моя идея проходит. А во-вторых, это ещё должно быть кому-то нужно. Второй критерий трудно чётко сформулировать, но на математических семинарах любят по окончании доклада говорить примерно такую фразу:

— Очень интересно... Но я не понял, какая от этого польза может быть для народного хозяйства.

Слова «народное хозяйство» надо, разумеется, понимать в переносном или уж, во всяком случае, в предельно расширительном смысле. Тем не менее это не просто шутка. Подразумевается, что действительно, от предложенной теории должен быть какой-то прок, пусть не «для народного хозяйства». Если вводится новый метод, новая идея, то весьма желательно, к примеру, чтобы она годилась не только для данной задачи.

Но главное всё-таки — что надо не просто вообразить себе какую-то идею, а суметь придумать такую идею, которую ещё и доказать можно. А это, конечно, гораздо более сильное требование к фантазии, чем те требования, которые предъявляются к поэту.

Математика и истина

Математика вводит и ещё один запрет. Вам запрещается сомневаться в установленных истинах.

Здесь я опять иду против течения. Ибо сегодня крайне модно, напротив, говорить об «альтернативных теориях», и издеваться над той школой, которая даёт истину в окончательном виде.

Разумеется, можно согласиться с тем, что после того, как молодой человек выучился и понял, что именно верно, а что неверно — ему не помешает понять также и то, что наука может далеко не всё, и что есть очень много вопросов (собственно говоря — большинство вопросов), где истина пока ещё не установлена; может быть, и никогда не будет установлена; где существуют разные версии, каждая из которых заслуживает внимания. Это верно, но... этому нужно учиться ПОТОМ. После того, как он понял, что окончательная, непреложно установленная истина существует (этому опять-таки учит математика), и именно такие истины надо знать в первую очередь. Тогда уже можно и полезно вносить антитезис, слегка корректирующий этот тезис.

Но начинать обучение с того, что истина, якобы, не окончательна, не абсолютна — в высшей степени вредно. Прежде всего потому, что это неверно.

А как же, — спросит кто-нибудь, — Эйнштейн, который поправил Ньютона? Ответ прост: этого не было.

Ньютон установил законы природы. Эйнштейн ничего в них не пересматривал; это невозможно. А в чём же он, в таком случае, поправил Ньютона?

Дело в том, что помимо законов, которые Ньютон чётко сформулировал (и в которых не требуется никаких «уточнений»), были ещё и некоторые утверждения, которые ни Ньютон, ни другие физики никогда не формулировали ввиду их полной очевидности. Прежде всего это принцип «время не зависит от выбора системы координат».

Вот эти-то само собой разумеющиеся принципы и оказались неверны (или не совсем точны) и потребовали изменений. Вполне вероятно, что и в дальнейшем будет замечено, что современная физика подразумевает некоторые «совершенно очевидные» вещи, которые, тем не менее, неверны; и новый Эйнштейн внесёт соответствующие поправки. Но это не будут поправки в установленные законы.

* * *

Незнание математики, в известном смысле (и если не гнаться за точностью выражения), равнозначно вере в абсолютную свободу. «Ну и что из того, — говорят невежественные люди, — что скорость света — предел всех скоростей? Вот наука чего-нибудь придумает, и мы будем летать быстрее...»

Точно так же ферматисты твёрдо уверены: что из того, что неразрешимость проблемы трисекции угла строго доказана, а невозможность найти мало-мальски элементарное (близкое к элементарному) решение проблемы Ферма продемонстрирована трудами десяти поколений великих? Надо просто не быть «научным сухарём», проявить кое-какую фантазию, свободу мысли, и задача как-нибудь решится. Потом они присылают эти решения в университеты, в горсовет, в ЦК партии... Впрочем, к чести советских чиновников я хочу сказать, что они, как правило, игнорировали ферматистов, хотя сочинять отписки на их жалобы всё-таки приходилось.

По той же причине люди, не знающие математики, любят говорить о «неевклидовом разуме». Они представляют себе дело примерно так: евклидова геометрия утверждает, что параллельные не могут пересечься, а мне это не нравится. Это ограничивает мою свободу. Так, наверно, можно придумать другую, неевклидову геометрию (геометрию Лобачевского), в которой они могут также и пересечься...

Прежде всего, это фактически неверно. Это знает каждый математик. Но я хотел бы подчеркнуть другое.

Я не разделяю мнения об евклидовой геометрии как о клетке, ограничивающей нашу свободу; но если бы разделял — то обязан был бы сказать о неевклидовой словами Ежи Леца: «Ну, пробил головой стену. И что ты будешь делать в соседней камере?»

Если Дания — тюрьма, то и весь мир тюрьма; если евклидова геометрия — клетка, из которой надо вырваться, то неевклидова геометрия — это другая клетка. А невежды верят не в то, что есть другая, неевклидова геометрия (это-то чистая правда), а в то, что в этой другой, «альтернативной» геометрии законы математики не обязательны.

Им хочется, чтобы параллельные где-нибудь пересеклись. Правда, в неевклидовой геометрии они не пересекаются тем более, но что им за дело? Им хочется свободы; а в математике (впрочем, как и во всех других сферах бытия) свобода должна идти рука об руку с необходимостью[1]. Той свободы, которой они хотят, в математике нет.

Мысль, которую я критикую, была в предельно абсурдной форме выражена в одном американском научно-фантастическом рассказе (*Джоунс Р.* Уровень шума // Библиотека современной фантастики. 1967. Т. 10). Содержание рассказа вкратце таково. Собирают группу выдающихся учёных; им сообщают, что недавно некий изобретатель продемонстрировал антигравитационный аппарат; к несчастью, в ходе эксперимента аппарат взорвался, изобретатель погиб, и теперь надо как-то восстановить его изобретение.

Учёные вначале несколько смущены: они ведь знают, что антигравитация невозможна. Однако поскольку им убедительно продемонстрировано, что она существует, они начинают искать решение, и через некоторое время его успешно находят. Изобретают антигравитацию. После этого им со-

---

[1] Тут уместно вспомнить формулу Энгельса о том, что свобода, мол, есть осознанная необходимость. Раньше этой формулой полагалось восхищаться, теперь положено над ней хихикать. Но разумный смысл ей, во всяком случае, придать можно. Он состоит в том, что всякий человек, да и всякое живое существо отчасти свободно, отчасти нет. Но ваша свобода будет тем больше, чем яснее вы понимаете, каковы наложенные на неё ограничения. Если же вы не хотите учиться, не хотите ничего знать об этих ограничениях — вы не станете от этого свободнее.

общают, что на самом деле никакого изобретения не было: это был просто-напросто психологический приём, чтобы «избавить их от мусора в голове», т. е. от знаний, что какая-то задача неразрешима.

«Всё, что необходимо сделать, — утверждает ничтоже сумняшеся герой рассказа в финале, — это избавиться от лишнего груза предрассудков, от окаменевшего мусора в голове... и тогда удастся найти *нужный* ответ на *любую* проблему...» (курсив мой — *А. Т.*).

Разумеется, это антинаучный бред. Наука (в отличие от журналистов) знает то, что следует знать каждому: что есть окончательно установленные научные истины, причём чаще всего эти истины выражены как раз в форме запрета. Невозможно построить «вечный двигатель». Параллельные прямые не могут пересечься. Не может быть скорости выше скорости света.

Впрочем, хочу оговориться. В той постановке вопроса, которая дана в рассказике, всё-таки есть некоторый смысл. Всякий математик знает: задачу много легче решать, если уверен, что решение существует; в противном случае всё время колеблешься, что, собственно, делать: решать или доказывать несуществование решения; доказывать теорему или строить к ней контрпример.

Но это относится к случаям, где истина в последней инстанции пока что не установлена.

А журналисты считают, что «если нельзя, но очень хочется, то можно». И наперебой издеваются над советской школой, которая, дескать, «учила единственно верной истине». Как, — говорят журналисты, — может быть «единственно верная»?

Между тем цель науки (любой точной науки, а прежде всего, разумеется, математики) именно в том, чтобы установить истину в последней инстанции, ту, которая уже не пересматривается.

А как же новое познание?

Не беспокойтесь!

Выдающийся российский филолог М. Гаспаров писал, что когда в университете один из преподавателей мимоходом сказал им: «по этому вопросу одни думают так-то, другие так-то, а общего мнения нет» — для студентов-филологов это было откровением, «это было ошеломляюще», поскольку до того им с кафедры объявляли только истины в последней инстанции.

Математикам это не грозило никогда. И не только потому, что в математике полагается не вещать, а доказывать, но ещё и потому, что математика, как никакая наука, переполнена нерешёнными проблемами. И чтение любой математической книги подобно блужданию в темноте по чулану, битком набитому мебелью с острыми углами: стоит вам чуть отклониться от своего пути или просто неосторожно выставить локоть — и вы тут же больно ушибётесь об острый угол очередной нерешённой проблемы.

Новое познание безгранично. Слишком много есть в мире неизвестного, такого, где мы пока что не знаем истину в последней инстанции (или вообще ничего не знаем). Пока что, во всяком случае, нет причин опасаться, что такие вопросы будут исчерпаны.

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

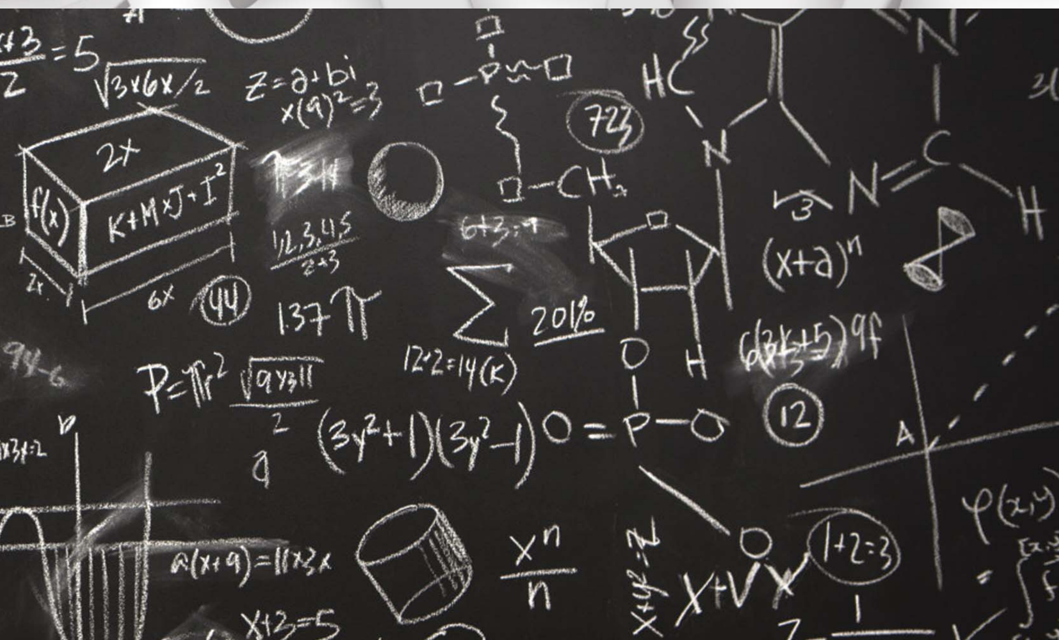
- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru



ISBN 978-5-4439-1145-8
9 785443 911458 >