Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Методическое обеспечение учебного процесса студентов
с ограниченными возможностями здоровья

З.Ф. Столярова

Метод подстановки (замены переменной) в определенном интеграле

Рабочая тетрадь № 1

Под редакцией А. Г. Станевского

BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2015

УДК 517.38
ББК 22.161
С81

Издание доступно в электронном виде на портале ebooks.bmstu.ru
по адресу: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/95/book1350.html

Факультет «Головной учебно-исследовательский и методический центр»
Кафедра «Реабилитация инвалидов»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве методических указаний*

Столярова, З. Ф.

С81 Метод подстановки (замены переменной) в определенном интеграле : рабочая тетрадь № 1 / З. Ф. Столярова ; под ред. А. Г. Станевского. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 19, [1] с. — (Методическое обеспечение учебного процесса студентов с ограниченными возможностями здоровья).

ISBN 978-5-7038-4309-3

Рабочая тетрадь предназначена для самостоятельной работы студентов. Дается краткое изложение теории в виде пооперационного плана анализа и решения задач.

Для студентов 1-го курса ГУИМЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 517.38
ББК 22.161

Учебное издание

Столярова Зухра Фейзулаевна

Метод подстановки (замены переменной) в определенном интеграле

Рабочая тетрадь

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 16.11.2015. Формат 60 × 90/8.
Усл. печ. л. 2,5. Тираж 100 экз. Изд. № 535-2015. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com

ISBN 978-5-7038-4309-3

Предисловие

Целью настоящего издания является помощь студентам в освоении темы «Замена переменной в определенном интеграле». Задачей интегрального исчисления является создание математического аппарата для изучения и разработки многих дисциплин.

Для изучения метода подстановки в определенном интеграле необходимо знать:

- теорему о существовании определенного интеграла;
- область определения и область изменения (область значений) основных элементарных функций;
- условие существования сложной функции;
- условие существования обратной функции;
- таблицу производных;
- таблицу интегралов;
- изученные подстановки в неопределенном интеграле;
- четность и нечетность функций;
- интегрирование по частям.

Предполагается, что представленная работа поможет студентам укрепить знание правил замены переменной в определенном интеграле и привить умения находить (выбирать) нужную подстановку.

Как пользоваться рабочей тетрадью

1. Ознакомьтесь с указанным в Предисловии теоретическим материалом, знание которого необходимо для изучения материала, изложенного в рабочей тетради. Если вы забыли некоторые темы, то повторите их по лекциям и учебникам.
2. Материал рабочей тетради не заменяет курса лекций, а служит для самостоятельной работы по заданной теме и более осознанной опоры на теорию при решении задач.
3. Теоретический материал представлен в сжатом виде. После него даются план и образец выполнения задач.
4. Некоторые слова пропущены и заменены линиями. Вы должны вписать нужные слова, следуя плану решения задач.
5. После образцов даются задачи для самостоятельного решения.

Введение

При изучении техники интегрирования вы познакомились с методом замены переменной в неопределенном интеграле и с некоторыми часто встречающимися подстановками. Так как первообразная и определенный интеграл связаны между собой формулой Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ (то есть $F'(x) = f(x)$), ясно, что все изученные ранее подстановки пригодятся и для вычисления определенных интегралов. Но есть две особенности:

- при взятии неопределенного интеграла с помощью замены переменной требовалось в ответе вернуться к старой переменной; при вычислении определенного интеграла этого делать не нужно;
- подстановка, пригодная для взятия неопределенного интеграла, может оказаться неприменимой для вычисления определенного интеграла.

Об этих случаях («подводных камнях») будет сказано ниже.

I. Вычисление определенного интеграла при помощи подстановки

- Требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

1. Подбираем подстановку:

$$x=\xi(t).$$

2. В данном интеграле $x\in[a,b]$. Проверяем, что множество значений функции $x=\xi(t)$ содержит отрезок $[a,b]$, или $\{x=\xi(t)\}\supset[a,b]$.

3. Убеждаемся в том, что существует дифференциал

$$dx=\xi'(t)dt.$$

4. Вычисляем пределы интегрирования для новой переменной:

$$x=a\Rightarrow\xi(t)=a\Rightarrow \text{решение: } t=t_{\text{нач}};$$

$$x=b\Rightarrow\xi(t)=b\Rightarrow \text{решение: } t=t_{\text{кон}}.$$

5. Оформляем преобразование данного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{l} x=\xi(t) \\ dx=\xi'(t)dt \\ x=a\Rightarrow t=t_{\text{нач}} \\ x=b\Rightarrow t=t_{\text{кон}} \end{array}\right|=\int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}}\underbrace{f(\xi(t)\xi'(t)}_{\text{обозначим } g(t)}\,dt=$$

$$=\int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} g(t)dt=\left|\begin{array}{l} \textit{проверяем} \\ \textit{непрерывность} \\ g(t) \end{array}\right|=G(t)\Big|_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}}=G(t_{\text{кон}})-G(t_{\text{нач}}).$$

Здесь $G(t)$ — первообразная для $g(t)$.

6. Ответ: $\int_a^b f(x)dx=G(t_{\text{кон}})-G(t_{\text{нач}})$. Интеграл вычислен, возвращаться к старой переменной не нужно.

Образец. Вычислить интеграл

$$\int_3^{29}\frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx.$$

Решение

1. Подбираем подстановку: $(x-2)^{1/3}=\sqrt[3]{x-2}=t\Rightarrow x-2=t^3\Rightarrow x=2+t^3$.

2. Проверяем, что $\{x=\xi(t)\}\supset[a,b]$: $\{x=2+t^3\}=IR\supset[3;29]$.

3. Убеждаемся в том, что существует дифференциал $dx=d(2+t^3)=3t^2dt$.

4. Вычисляем пределы интегрирования для новой переменной:

при $x = 3$ имеем $t_{\text{нач}}=\sqrt[3]{3-2}=1$,

при $x = 29$ имеем $t_{\text{кон}}=\sqrt[3]{29-2}=3$.

5. Оформляем преобразование данного интеграла:

$$\int_3^{29}\frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx=\left|\begin{array}{l}x=2+t^3\\ dx=3t^2dt\\ x=3\to t_{\text{нач}}=1\\ x=29\to t_{\text{кон}}=3\end{array}\right|=\int_1^3\frac{t^2}{t^2+3}3t^2dt=3\int_1^3\frac{t^4}{t^2+3}dt=$$

$$=3\int_1^3\frac{(t^4-9)+9}{t^2+3}\,dt=3\int_1^3\left(t^2-3+\frac{9}{t^2+3}\right)dt=3\left(\frac{t^3}{3}-3t+\frac{9}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt3}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=3\left(\left(\frac{27}{3}-9+\frac{9}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\sqrt3\right)-\left(\frac13-3+\frac{9}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt3}\right)\right)=$$

$$=\frac{27}{\sqrt3}\frac{\pi}{3}+8-\frac{27}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{6}=8+\frac{27}{\sqrt3}\frac{\pi}{6}=8+9\sqrt3\frac{\pi}{6}=8+3\sqrt3\frac{\pi}{2}.$$

6. Ответ: $\displaystyle\int_3^{29}\frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\,dx=8+3\sqrt3\,\frac{\pi}{2}$.

Примечание. Не всегда удается сразу подобрать удобную подстановку. Например, если в разобранном выше примере применить подстановку $(x-2)^{2/3}=t$, то иррациональность не исчезнет и потребуется еще одна подстановка, чтобы устранить иррациональность.

Вычислите интегралы:

№ 1. $\displaystyle\int_1^5\frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$. Ответ: $\displaystyle\frac23\left(3+\ln\frac25\right)$.

№ 2. $\int_{1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$.

№ 3. $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

№ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.   Ответ: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

№ 5. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$. *Указание*: примените подстановку $e^x - 1 = t^2$. Ответ: $2 - \frac{\pi}{2}$.

I. $\int\limits_a^b f(x)dx = ?$

1. ____ $x = \xi(t)$.
2. ____ $\{x = \xi(t)\} \supset [a, b]$.
3. ____ $dx = \xi'(t)dt$.
4. ___________________________________ $x = a \Rightarrow \xi(t) = a \Rightarrow$ решение: $t = t_{\text{нач}}$;

$x = b \Rightarrow \xi(t) = b \Rightarrow$ решение: $t = t_{\text{кон}}$.

5. ____

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \xi(t) \\ dx = \xi'(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = t_{\text{нач}} \\ x = b \Rightarrow t = t_{\text{кон}} \end{matrix} \right| = \int\limits_a^b f(\xi(t))\xi'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} g(t)dt = \left| \begin{matrix} \textit{проверяем} \\ \textit{непрерывность} \\ g(t) \end{matrix} \right| = G(t)\Big|_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} = G(t_{\text{кон}}) - G(t_{\text{нач}}).$$

№ 6. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^5 \sqrt[3]{4 - x^2}\,dx$ сделать подстановку $x = 2\sin t$?

Решение. Данный интеграл существует, так как подынтегральная функция $\sqrt[3]{4 - x^2}$ непрерывна при $x \in IR \supset [0;\, 5]$. Проверяем второй пункт плана решения: область значений $\{x = 2\sin t\} = [-2;\, 2]$ не содержит внутри себя весь отрезок [0; 5]. Следовательно, данную подстановку для $x \in [0;\, 5]$ применить нельзя.

№ 7. Можно ли в интеграле $\int\limits_{-1}^{7} f(x)dx$, где $f(x) \in C[-1;\, 7]$ применить подстановку $x = \cos t^{-1}$?

№ 8. Можно ли в интеграле $\int\limits_{-3}^{-2} f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ (то есть $f(x) \in C[-3;\,-2]$) применить подстановку x = arctg t?

Вычислите интегралы:

№ 9. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. *Указание*: примените подстановку $x = \frac{1}{\cos t}$. Ответ: $\sqrt{3-\frac{\pi}{3}}$.

№ 10. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$. *Указание*: примените подстановку $x = \operatorname{tg} t$. Ответ: $2-\sqrt{2}-\frac{\ln 3}{2}$.

II. Некоторые свойства определенного интеграла

- Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots .$$

- Разбиение отрезка интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

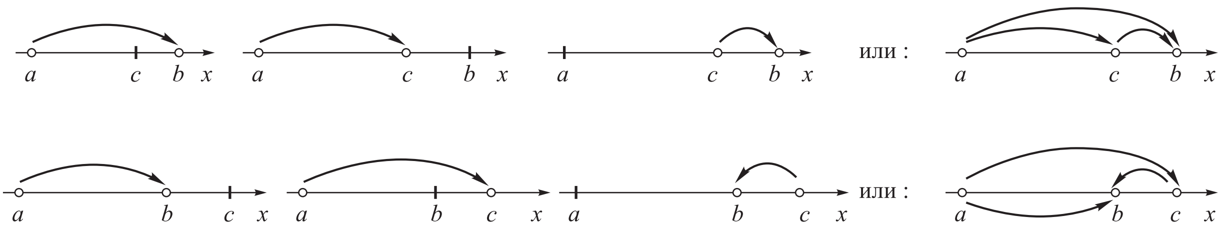

Рис. 1. Разбиение отрезка интегрирования

- Перестановка пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

№ 11. Интеграл $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ от четной функции $f(x)$ преобразуйте при помощи подстановки $x = -t$.

№ 12. Докажите, что если $f(x)$ — четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

№ 13. Интеграл $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$ от нечетной функции $f(x)$ преобразуйте при помощи подстановки $x = -t$.

№ 14. Докажите, что если $f(x)$ — нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

I. $$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \xi(t), \{\xi(t)\} \supset [a;b] \\ dx = \xi'(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = t_{\text{нач}} \\ x = b \Rightarrow t = t_{\text{кон}} \end{array} \right| = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} f(\xi(t))\xi'(t)dt = \ldots .$$

II. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c + \int_c^b ; \quad \int_a^b = -\int_b^a .$$

III.

- Для четной функции:

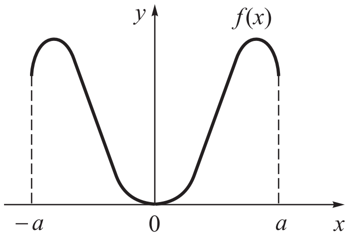

Рис. 2. Интеграл на симметричном отрезке от четной функции

$$f(-x) \equiv f(x);$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Интеграл на симметричном отрезке $\int_{-a}^{a}$ от четной функции равен удвоенному интегралу на отрезке [0; a] (рис. 2).

- Для нечетной функции:

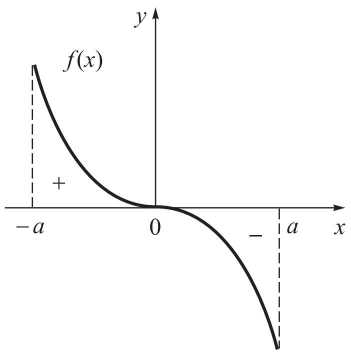

Рис. 3. Интеграл на симметричном отрезке от нечетной функции

$$f(-x) \equiv -f(x);$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 .$$

Интеграл на симметричном отрезке от нечетной функции равен нулю (рис. 3).

IV.

- $$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Образец. Вычислить интеграл

$$\int_{-4}^{4} (\operatorname{arctg}\ x)^5 e^{x^2} dx.$$

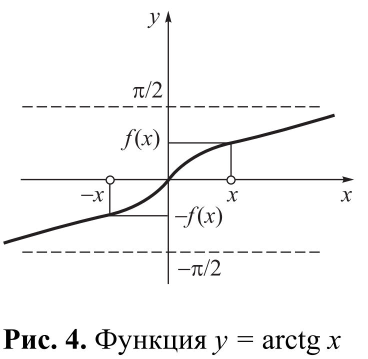

Рис. 4. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

Решение. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ — нечетная, $(\operatorname{arctg} x)^5$ — нечетная, e^{x^2} — четная, $(\operatorname{arctg} x)^5 e^{x^2}$ — нечетная (рис. 4). Интеграл от нечетной функции на симметричном отрезке равен і

Ответ: $\int_{-4}^{4} (\operatorname{arctg} x)^5\, e^{x^2} dx = 0.$

Вычислите интегралы:

№ 15. $\int\limits_{-4}^{4} \left(x^2 + 5\mathrm{tg}^3 x + 1\right) dx$.

Указание. Разбейте данный интеграл на два, по отдельности от четной функции и от нечетной. В какую из этих функций вы включите слагаемое 1?

В задачах № 15–17 вычислите интегралы, предварительно упростив их.

№ 16. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{x^2} \sin 3x + \frac{2\mathrm{tg}^3 x}{1+x^2} - \frac{\pi}{4+x^2} + 10\right) dx$. Ответ: 9π.

№ 17. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} (\sin 5x \cos x + \sin 3x \cos 2x + x \cos 3x + \cos 2x)\, dx.$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

№ 18. $\int\limits_{-5}^{5} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+11}} + \sqrt[3]{x+2x^3} + 2 \right) dx.$ Ответ: $20 + 3\ln 11$.

Примечание. При замене переменной в определенном интеграле может оказаться, что он превратится в несобственный сходящийся интеграл. И наоборот, сходящийся несобственный интеграл при помощи замены переменной можно преобразовать в определенный. Например:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{4+\cos x} = \left| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad t \in [0;\ +\infty] \right| =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{5+3t^2} = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\dfrac{5}{3}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left.\frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}.$$

№ 19. Вычислите интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$.

Ответ: $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

V.

- Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv(x)} = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\underbrace{u'(x)dx}_{du(x)}.$$

Вычислите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

№ 20. $\int_5^{25} \log_5 x dx$.

№ 21. $\int_{-1}^{1} 3^x x^2 dx$.

№ 22. $\int_{-1}^{0} \operatorname{arcctg} x dx$.

VI.

- Вывод *формулы понижения степени* для интеграла $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx;\ \ n \in IN$

методом интегрирования по частям.

$$J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx = \left| \begin{matrix} u = \sin^{n-1} x; du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos xdx \\ dv = \sin xdx; v = \int \sin xdx = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x}_{=0} \Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos xdx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} xdx = (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2} xdx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^{n-2} x - \sin^n x)dx = (n-1)\left(\underbrace{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} xdx}_{J_{n-2}} - \underbrace{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx}_{J_n} \right).$$

Итак, получено уравнение $J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)\,J_n$. Отсюда

$$J_n(1+(n-1)) = (n-1)J_{n-2};$$

$$nJ_n = (n-1)J_{n-2};$$

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

Образец. Вычислите интеграл, пользуясь формулой понижения.

$$J_6 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = |n=6| = \frac{5}{6}J_4 = |n=4| = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}J_2 = |n=2| =$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $J_6 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$

№ 23. Выведите формулу понижения для интеграла $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ методом интегрирования по частям.

Вычислите интегралы при помощи формулы понижения:

№ 24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^7 x\right) dx$. Ответ: $\frac{16}{35}$.

№ 25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^5 x+\cos^4 x\right)dx$. Ответ: $\frac{8}{15}+\frac{3}{16}\pi$.

Литература

Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Астрель, 2003. 472 с.

Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 528 с.

Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 408 с.

Столярова З.Ф. Техника интегрирования. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 78 с.