В. Ф. Панов

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ТВОРЦЫ

Под редакцией В. С. Зарубина

ИЗДАТЕЛЬСТВО МГТУ им. Н.Э. Баумана

Москва 2011

УДК 51(091)
ББК 22.1г
П16

Рецензенты:

зав. кафедрой математики Военной академии РВСН имени Петра Великого,
д-р техн. наук, проф. *В.В. Блаженков*;
канд. физ.-мат. наук, доц. *А.Н. Канатников*

Панов В. Ф.

П16 Современная математика и ее творцы / В. Ф. Панов; под ред. В. С. Зарубина. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 646, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-3536-4

В доступной форме рассказано о развитии традиционных разделов математики второй половины XIX – начала XXI в., создании новых разделов математики. Представлены основные вехи жизненного и творческого пути многих отечественных и зарубежных математиков. Отражена взаимосвязь математики и философии.

Рекомендовано студентам, аспирантам, учителям математики, а также всем, кто интересуется историей науки.

УДК 51(091)
ББК 22.1г

ISBN 978-5-7038-3536-4

© Панов В.Ф., 2011
© Оформление. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

Часть I. **МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ** 13

Глава 1. Особенности современной математики 15

Приоритеты в математике XX в. 15

Аксиоматизация и систематизация математики 23

Споры сторонников абстрактной и прикладной математики 26

«Архитектура» современной математики 31

Глава 2. Роль международных математических конгрессов в развитии математики 37

Первые международные контакты 37

Первый Международный конгресс математиков 38

Второй Международный конгресс математиков 38

Доклад Гильберта «Математические проблемы» 39

Международные математические конгрессы в XX и XXI вв. 42

Нерешенные (открытые) математические проблемы 46

Глава 3. Профессиональные награды математиков 50

Международные награды по математике 50

Международные награды, в которых одной из номинаций является «математика» 61

Часть II. **СТАНОВЛЕНИЕ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ** 67

Глава 4. Как начиналась современная математика 69

Об истории пятого постулата Евклида 69

Сущность неевклидовой геометрии 70

Н.И. Лобачевский 72

Янош Больяй 75

Алгебраизация математики и математическая логика 76

Эварист Галуа 78

Джордж Буль 83

Создание теории бесконечных множеств 85

Георг Кантор 92

Глава 5. Споры относительно оснований математики 96

Интуиция и логика в математике 96

Логицизм, интуиционизм, формализм 98

Алфред Уайтхед 109

Бертран Рассел 111

Лейтзен Брауэр 112

Открытия Курта Гёделя и Пола Коэна. Создание конструктивной математики 115

А.А. Марков-младший 120

Курт Гёдель 123

Пол Коэн 127

Глава 6. Петербургская математическая школа 128

Основание петербургской математической школы 128

П.Л. Чебышёв 129

А.А. Марков 132
А.М. Ляпунов 135
В.А. Стеклов 137
Н.М. Гюнтер 139
В.И. Смирнов 140
Глава 7. Немецкая математическая школа 143
Система обучения в университетах Германии в XIX в. 143
Карл Вейерштрасс 145
Бернхард Риман 146
Юлиус Дедекинд 149
Феликс Клейн 149
Давид Гильберт 152
Герман Минковский 159
Герман Вейль 161
Рихард Курант 165
Разгром немецкой математической школы нацистами 168
Глава 8. Французская математическая школа 172
Система образования во Франции 172
Анри Пуанкаре 174
Жак Адамар 181
Эмиль Борель 183
Анри Лебег 186
Глава 9. Московская математическая школа 189
Организация математических исследований до 1941 г. 189
Н.Е. Жуковский 194
Д.Ф. Егоров 197
Н.Н. Лузин 199
А.Н. Колмогоров 203
«Лузитания» 209
Внедрение диалектики в математику 213
Организация математических исследований в годы войны и послевоенное время 218
Глава 10. Американская математическая школа 222
Система образования в США 222
Джордж Биркгоф 225
Соломон Лефшец 226
Джеймс Александер 228
Марстон Морс 229
Джон фон Нейман 231
Хасслер Уитни 237
Сондерс Маклейн 238

***Часть III.* РАЗВИТИЕ ТРАДИЦИОННЫХ РАЗДЕЛОВ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ** 241
Глава 11. Математическая статистика и теория вероятностей 243
Математическая статистика 244
Карл Пирсон 246
Уильям Госсет (Стьюдент) 248
Е.Е. Слуцкий 249

Роналд Фишер 251
Ежи Нейман 253
Эгон Пирсон 254
Теория вероятностей 255
А.Я. Хинчин 259
Б.В. Гнеденко 262
Киёши Ито 265
Шриниваса Варадхан 266
Венделин Вернер 267
Глава 12. Топология первой половины XX в. 268
Чем занимается топология 268
Феликс Хаусдорф 273
П.С. Урысон 275
П.С. Александров 277
Хейнц Хопф 280
Л.В. Келдыш 281
Шэншэнь Чжэнь (Черн) 283
Глава 13. Вычислительная математика 285
Численные и аналитические методы 285
А.Н. Крылов 288
Б.Г. Галёркин 290
А.Н. Тихонов 293
А.А. Дородницын 296
Г.И. Марчук 298
А.А. Самарский 301
Глава 14. Теория дифференциальных уравнений 303
Обыкновенные дифференциальные уравнения 303
Дифференциальные уравнения с частными производными 307
С.Н. Бернштейн 309
И.А. Лаппо-Данилевский 312
М.А. Лаврентьев 313
И.Г. Петровский 316
М.В. Келдыш 319
Ларс Хёрмандер 322
Седрик Виллани 323
Глава 15. Теория функций и функциональный анализ 325
Теория функций 325
Функциональный анализ 327
Гёста Миттаг-Лёффлер 330
Константин Каратеодори 331
Харальд Бор 333
Стефан Банах 334
Д.Е. Меньшов 336
М.Я. Суслин 338
Н.К. Бари 341
Рольф Неванлинна 342
Л.А. Люстерник 343
П.С. Новиков 344
Ларс Альфорс 346

С.Л. Соболев 347
И.М. Гельфанд 352
Чарльз Фефферман 355
Ален Конн 356
С.К. Смирнов 357
Глава 16. Абстрактная алгебра 359
Развитие алгебры в Европе 359
Фердинанд Фробениус 362
Эмми Нётер 363
Эмиль Артин 365
Бартел Ван-дер-Варден 367
Джон Томпсон 369
Развитие алгебры в СССР 370
Д.А. Граве 374
О.Ю. Шмидт 375
Н.Г. Чеботарёв 377
А.И. Мальцев 379
И.Р. Шафаревич 380
Г.А. Маргулис 382
Е.И. Зельманов 383
Глава 17. Геометрия в России в XX – начале XXI в. 384
Очерк развития современной геометрии 384
С.П. Фиников 387
Б.Н. Делоне 389
А.Д. Александров 391
А.В. Погорелов 395
М.Л. Громов 397

Часть IV. **КОРЕННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ ПОСЛЕ ВТОРОЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ** 399
Глава 18. Николя Бурбаки – коллективный псевдоним группы математиков 401
Возникновение объединения французских математиков 401
Бурбаки и реформа математического образования 408
Анри Картан 411
Андре Вейль 412
Клод Шевалле 414
Лоран Шварц 415
Жан-Пьер Серр 416
Джон Тейт 418
Александр Гротендик 419
Жак Титс 422
Глава 19. Теоретическая физика и математика 424
О проблемах теоретической физики 424
Стандартная модель физики элементарных частиц 425
Теория суперструн 430
Н.Н. Боголюбов 436
Ричард Фейнман 440
Роджер Пенроуз 443
Л.Д. Фаддеев 445

Шинтан Яу 448
Эдвард Виттен 449
Воган Джонс 450
М.Л. Концевич 451
Глава 20. Топология второй половины XX в. 454
Новые идеи в топологии 454
В.А. Рохлин 458
Рене Том 461
Стивен Смейл 462
Джон Милнор 463
Майкл Атья 464
С.П. Новиков 466
Гипотеза Пуанкаре 469
Уильям Тёрстон 471
Майкл Фридман 472
Саймон Доналдсон 473
Г.Я. Перельман 474
Глава 21. Алгебраическая геометрия 478
Очерк развития алгебраической геометрии 478
Кунихико Кодаира 481
Хейсуке Хиронака 482
Дэвид Мамфорд 483
Пьер Делинь 484
Герд Фалтингс 485
Сигефуми Мори 485
В.А. Воеводский 486
Глава 22. Теория чисел 489
Основные направления исследований 489
Годфри Харди 493
Шриниваса Рамануджан 495
И.М. Виноградов 498
Л.Г. Шнирельман 500
А.О. Гельфонд 502
Атле Сельберг 504
Клаус Рот 505
Алан Бейкер 506
Энрико Бомбьери 507
Ю.В. Матиясевич 508
Теренс Тао 509
Глава 23. Великая теорема Ферма 511
Предыстория Великой теоремы Ферма 511
Гипотеза Таниямы – Шимуры 514
Завершающие атаки на Великую теорему Ферма 517
Эндрю Уайлс 518
Роберт Ленглендс 521
В.Г. Дринфельд 523
Лоран Лаффорг 524
А.Ю. Окуньков 525
Бао Чау Нго 526

Часть V. **РАЗВИТИЕ НОВЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ ПОСЛЕ ВТОРОЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ** 527
Глава 24. Теория алгоритмов, кибернетика, вычислительная техника 529
Из предыстории вычислительной техники 529
Теория алгоритмов 530
Кибернетика 533
Математика и вычислительная техника 537
Ада Лавлейс 538
Норберт Винер 539
Алан Тьюринг 541
Клод Шеннон 543
В.М. Глушков 545
Глава 25. Исследование операций и теория управления 548
Исследование операций и круг рассматриваемых задач 548
Агнер Эрланг 553
Л.С. Понтрягин 554
Ричард Беллман 558
Л.В. Канторович 559
Н.Н. Моисеев 563
Джон Форбс Нэш-младший 565
Лотфи Заде 566
Глава 26. Нестандартные методы анализа 571
Расхождение современных физических представлений с идеями математического анализа 571
Нестандартный (инфинитезимальный) анализ 572
Бесконечно малые величины в трактовке Лейбница 580
Отношение ученых к идее бесконечно малых величин 580
Булевозначный анализ 584
Туральф Сколем 585
Абрахам Робинсон 586
Петр Вопенка 587
Глава 27. Динамические системы. Порядок и хаос. Создание фрактальной геометрии 589
Поиск единых законов эволюции 589
Ключевые понятия качественной теории сложных нелинейных систем 590
Варианты качественной теории сложных нелинейных систем 593
Фракталы 601
А.С. Безикович 607
И.Р. Пригожин 609
Эдвард Лоренц 611
Бенуа Мандельброт 614
Юрген Мозер 616
В.И. Арнольд 617
Жан-Кристоф Йоккоз 620
Элон Линденштраусс 621
Заключение 622
Литература 626
Именной указатель 629

Никакая иная наука не обладает таким совершенным представлением об истинности и ложности суждений, как математика… Математическое творчество требует абсолютно точного соблюдения законов мышления, дисциплинирует и формирует личность, помогая ей выработать систему ценностей высокой пробы.

А.В. Архангельский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика является обязательным предметом при обучении в школах и преподается во всех технических вузах. Но это лишь знакомство с элементарной математикой и несколькими классическими разделами высшей математики.

Грандиозный «город» современной математики с его «небоскребами» различных разделов, иногда стоящих особняком, но чаще связанных общей инфраструктурой, для подавляющего большинства выпускников технических вузов – «терра инкогнита». Даже для профессионалов-математиков многое остается непознанным, так как в настоящее время наблюдается тенденция к сужению диапазона математических интересов.

Раньше была такая специальность – «математик», потом удобнее стало говорить о профессиональном математике «геометр» или «алгебраист», или «аналитик», а сегодня и такое деление представляется крупным. Ибо основные математические дисциплины – геометрия и алгебра, арифметика (теория чисел) и математический анализ – распались на ряд школ и направлений, каждое из которых характеризуется своим подходом, своим специфическим «языком». И вот уже, кажется, специалисты по геометрии «в малом» разучились понимать специалистов по геометрии «в целом»; специалисты по алгебраической теории чисел – специалистов по аналитической теории чисел; ученые, разрабатывающие математический аппарат теории относительности, – специалистов по математическим методам квантовой механики.

В одной из своих статей выдающийся математик-универсал XX в. Джон фон Нейман писал, что если хороший физик-теоретик может активно ориентироваться практически в половине своего предмета, то сомнительно, что кто-нибудь из математиков обладает хотя бы четвертью математических знаний.

В большинстве современных учебников математика излагается как вневременная и безликая совокупность более или менее согласованных определений, понятий, идей и методов. Это затрудняет понимание внутренней логи-

ки развития науки, движущих пружин этого развития и необходимости введения того или иного понятия.

Данная книга продолжает развитие идей, представленных автором в книге «Математика древняя и юная», вышедшей в свет в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2004 г. Относительно краткая информация о современной математике, изложенная в предыдущей книге, здесь значительно расширена. В работу включены биографии известных математиков, внесших заметный вклад в ее развитие периода XIX – начала XXI в. К сожалению, о математиках, работающих в настоящее время, информации очень мало. Во-первых, это связано с этическими соображениями, а во-вторых, со сложностью оценивания заслуг современников. В подтверждение сказанному хотелось бы процитировать С.А. Есенина: «Лицом к лицу лица не увидать. // Большое видится на расстоянье». Поэтому о первых двух третях XX в. рассказано более подробно, чем о последней.

Подбор персоналий, о жизни и творчестве которых рассказывается в книге, является субъективным выбором автора. Вследствие этого книга является отражением представления автора о величине вклада того или иного ученого в развитие математики. Из ныне живущих математиков выбраны те, которые получили мировое признание, были удостоены международных наград.

Периодизация истории математики остается спорным вопросом. А.Н. Колмогоров предложил считать современной математику с момента появления новых математических теорий в XIX в. до наших дней. В связи с этим, началом современной математики считают появление неевклидовой геометрии.

Современная математика многогранна, и ее терминология необычайно сложна. При работе над книгой автору приходилось выбирать между доступностью изложения и точностью. Предпочтение отдавалось доступности. Читателями книги автор видит в основном студентов технических вузов и инженеров, которые изучали высшую математику, но не знакомы с историей многих ее разделов. Однако книга будет полезна и гуманитариям, интересующимся историей науки.

Хотя в книге описан процесс становления современной математики, она не является учебником, поэтому автор старался избегать формул. Существует мнение, что каждая формула уменьшает вдвое число потенциальных читателей.

Книга состоит из пяти частей, в которые входят 27 глав. Первая часть включает в себя три главы. Эта часть знакомит читателя с особенностями современной математики, альтернативными точками зрения ученых на цели исследований и связь результатов исследований с реальной жизнью; основными идеями, давшими начало современной математике и теми учеными XIX в., которые оказали заметное влияние на ее становление; рассказывает о международных связях математиков и международных математических конгрессах, а также о профессиональных наградах математиков, отмеченных за наиболее выдающиеся результаты исследований.

Во второй части рассказывается об истоках современной математики, двух российских математических школах (петербургской и московской), двух

крупнейших математических школах Западной Европы (немецкой и французской), американской математической школе и о философских спорах относительно оснований математики первой трети XX в.

Третья часть книги знакомит читателя с творцами тех разделов математики, которые были достаточно развиты уже в начале XX в. и продолжают развиваться в настоящее время.

Четвертая часть повествует об авторах исследований тех разделов математики, которые после Второй мировой войны развивались гораздо интенсивнее, чем до ее начала.

В пятой части рассказано о разделах математики, которые в начале XX в. находились в стадии становления или не существовали вовсе.

Диапазон интересов выдающихся творцов математики XX в. колебался от увлеченности в течение всей жизни одним разделом математики, до получения важнейших результатов во многих ее разделах. Универсальными математиками были А. Пуанкаре, Д. Гильберт, Г. Вейль, А.Н. Колмогоров, Дж. фон Нейман, Ф. Клейн, С.Л. Соболев, Н. Винер. Это вызывало большие трудности у автора данной книги при выборе главы, в которой хотелось бы рассказать о конкретном математике. Многие ученые проводили исследования в определенных разделах математики. Например, С. Банах занимался только функциональным анализом, Э. Нётер – алгеброй, Ш. Рамануджан – теорией чисел.

Хотя автору пришлось ознакомиться с большим количеством книг и журналов, не обошлось без интернет-источников. Огромную помощь в подборе материала оказали студенты факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающиеся по специальности «Прикладная математика», которым автор очень признателен. Автор также благодарит коллектив кафедры «Прикладная математика» за помощь в поиске информации и коллектив Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана, особенно Буравлёву В.С., за высокий профессионализм и терпение.

Автор надеется, что прочитавший книгу будет лучше понимать историю развития современной математики и захочет ближе познакомиться с этой замечательной наукой, чтобы успешно применять полученные знания в повседневной жизни.

В.Ф. Панов

Часть I

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

В физике, инженерном деле, экономике, психологии, медицине, биологии, всюду, где есть необходимость точно описать происходящее и точно выразить закон, управляющий тем или иным явлением, всюду на помощь приходят понятия, конструкции и методы математики.

А.В. Архангельский

Для людей, чья деятельность не связана с математикой и имеющих гуманитарный склад мышления, математика воспринимается не как наука, а как наиболее формализованная, а, следовательно, и наиболее скучная школьная и вузовская дисциплина. По их мнению, в математике все давно уже сделано, просто готовые формулы используют в решении прикладных задач, а тот факт, что математика продолжает развиваться и в ней происходят открытия, вызывает искреннее удивление.

В средствах массовой информации о математике пишут намного меньше, чем о физике, химии и биологии. Это преимущественно объясняется сложностью понятийно-категориального аппарата, отсутствием приложений и нежеланием профессиональных математиков популярно рассказывать о достижениях в этой науке. В действительности современная математика — это фундаментальные проблемы, непрекращающиеся теоретические и экспериментальные исследования, в том числе с помощью компьютеров.

Еще в конце XVII в. Лейбниц считал, что математика должна изучать все, что в области воображения поддается точному определению. Важной задачей математики является изучение соотношений между математическими объектами. Коренные изменения в математике, придавшие ей современный вид, начались преимущественно в XIX в.

В соответствии с предложением А.Н. Колмогорова, в истории математики условно выделяют четыре основных периода:

— зарождения математики (до VI—V вв. до н. э.);

— элементарной математики (математики постоянных величин) (VI—V вв. до н. э. — XVI в.);

— создания математики переменных величин (XVI в. — сер. XIX в.);

— период современной математики.

Началом современной математики принято считать появление новых математических теорий в XIX в. Если ранее аксиомы считались истинами, не требующими доказательства в силу своей очевидности, то постепенно пришло понимание, что аксиомы скорее являются гипотезами и могут существовать различные мнения о том, насколько построенные с их помощью модели соответствуют материальному миру.

Если в предыдущие периоды евклидова геометрия претендовала на «абсолютную истинность», то появление непротиворечивой неевклидовой геометрии и дальнейшие исследования Б. Римана показали, что существует неограниченное разнообразие геометрических пространств, отличающихся друг от друга размерностью, формулами вычисления расстояний и т. д.

Ранее алгебра занималась в основном решением уравнений и систем уравнений, а также правилами преобразований буквенных выражений. В период современной математики начали исследовать общие свойства алгебраических операций в произвольных множествах и изучать новые алгебраические структуры (группы, кольца, поля, решетки и т. д.), возникшие из конкретных задач алгебры и геометрии.

Появляются новые разделы математики, расширяются направления исследований, меняются приоритеты. В математике теперь изучаются не только понятия, возникшие при рассмотрении реальных объектов, но и свойства «мыслимых объектов», (например, шаров или спиралей в бесконечномерном пространстве), логически возможные чистые формы, системы отношений.

Развитие математики не сводится лишь к росту количественных изменений, а включает глубокие качественные изменения. Она переживает период бурного развития, диктуемого быстрым расширением сфер ее применения к различным областям знания и техники. Развитие математики происходит в борьбе переплетающихся в ней противоположностей: конкретного и абстрактного, частного и общего, формального и содержательного, аксиоматического и конструктивного, конечного и бесконечного, дискретного и непрерывного [84].

Математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки. Каждые четыре года собираются международные математические конгрессы, ежегодно проводятся международные симпозиумы и конференции, посвященные различным разделам математики. Об изменениях, произошедших в XX в., свидетельствует перечень секций на международных математических конгрессах. Если на II конгрессе в 1900 г. работали шесть секций, то на современных конгрессах их насчитывается почти два десятка. Подробнее об этом рассказано в гл. 2.

Существуют различные международные профессиональные награды, которыми отмечаются наиболее выдающиеся результаты исследований. Хотя по математике не присуждают Нобелевскую премию, имеются уже четыре престижные премии, которыми отмечаются выдающиеся исследования математиков только на международных математических конгрессах (медаль Филдса, премия Неванлинны, премия Гаусса, медаль Черна). Кроме того, существуют престижные международные награды, в которых одной из номинаций является «математика».

Глава 1

ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

> Не следует забывать о том, что математика всегда была подспорьем для философского осмысления мира.
>
> *В.М. Тихомиров*

Приоритеты в математике XX в.

Четкой границы, разделяющей математику XIX и XX вв., не существует, но появились качественные отличия в математике в целом. Их точно охарактеризовал один из ведущих современных математиков Майкл Атья в лекции, прочитанной на Международном математическом симпозиуме в июне 2000 г. в Торонто.

Первое отличие заключается в переходе от локального к глобальному. В XIX в. ученые предпочитали работать с малыми масштабами, изучать локальное поведение объектов. В XX в. ученые интересовались крупными масштабами, глобальным поведением объектов. Поскольку сложность изучаемых явлений резко возросла, повысился интерес к исследованиям на качественном уровне, важными стали топологические идеи во всех разделах математики. Оправдались предсказания Пуанкаре о возрастании роли топологии. Эта особенность явно просматривалась во многих разделах математики: теории функций, теории дифференциальных уравнений, теории чисел, теоретической физике.

Второе отличие – повышение размерности, т. е. переход от одно- и двумерных объектов к n-мерным. Например, если в прошлом в дифференциальной геометрии изучали кривые и поверхности, то теперь стали изучать n-мерные многообразия. От классической теории функций комплексного переменного, подробно изучавшей функции одного переменного, перешли к изучению теории функций n комплексных переменных. От анализа конечномерных линейных пространств перешли к бесконечномерным гильбертовым пространствам и т. п.

Следующее отличие – переход от коммутативного аспекта математики вообще, и алгебры в частности, к некоммутативному. Предпосылкой к этому в XIX в. стали работы Галуа, открытие кватернионов Гамильтоном, работы Грассмана по внешним алгебрам, работы Кэли по матрицам. Важнейшим разделом математики стала теория групп. В теоретической физике переход к некоммутативным аспектам совпал с созданием квантовой теории и привел к появлению коммутационных соотношений Гейзенберга, развитых фон Нейманом в теорию операторных алгебр.

Еще одним отличием является переход от линейных аспектов разделов математики к более сложным нелинейным. Нелинейные явления мало изучались в XIX столетии и только в XX в. началась серьезная работа над ними. Примерами являются переход от евклидовой геометрии к римановым геометриям, изучение солитонов и хаоса в теории дифференциальных уравнений, переход от уравнений Максвелла к уравнениям Янга – Миллса в теоретической физике.

Рассмотрим принципиальные изменения, произошедшие в XX в. в основных разделах математики.

Математический анализ. Ученым пришлось критически пересмотреть основные понятия математического анализа, начиная с понятия действительного числа. Во второй половине XIX в. это понятие оказалось «арифметизировано», т. е. сведено к понятию натурального числа. В конце XIX в. после работ Ю. Дедекинда, Г. Кантора и К. Вейерштрасса у большинства математиков XX в. сложилось впечатление, что теория действительного числа разработана полностью и проблем действительных чисел больше не существует. Но именно в этом вопросе были обнаружены трудности, приведшие к возникновению новых научных направлений, связанных с вопросами обоснования математики. Увеличение интереса к философским и методологическим проблемам, различные подходы к их решению свидетельствовали о приближении очередного «кризиса основ» математики.

В начале XX в. большое внимание уделялось обоснованию фундаментальных понятий, установлению единства в многообразии математических методов, анализу строгости доказательства теорем и проблеме непротиворечивости. Это привело к большим спорам относительно обоснования математики, суть которых рассмотрена в гл. 10.

Из новых направлений, родившихся в начале XX в., следует назвать три ветви – теорию функций, топологию и функциональный анализ [73].

Теория функций. В теории функций (сейчас ее чаще называют комплексным анализом) в XIX в. исследовались функции одного комплексного переменного, причем функции задавались в явном виде. Теперь интерес представляют глобальные свойства функций: расположение особенностей, области определения и области значений.

На первый план выдвинулась теория функций действительного переменного. Она сформировалась во второй половине XIX в., главным образом, в связи с вопросами теории тригонометрических рядов и работами Георга Кантора по теории множеств. В конце XIX в. теория функций действительного переменного обогатилась понятиями и методами теории множеств. Это привело к созданию теории точечных множеств, введению понятия измеримой функции, существенному обобщению понятия интеграла, классификации функций действительного переменного.

Мера множества по Лебегу, измеримые множества Бореля, классы функций Бэра, интеграл Лебега – все эти понятия входят сейчас в университетские курсы математики, а появились в науке в первые годы XX в. Важными для развития математики оказались работы Пеано, издавшего в 1895–1908 гг. пять томов «Математического формуляра» – комментированного изложения

всей математики на основе системы обозначений, используемых в математической логике.

В начале века Лебег завершил построение теории меры и интегрирования. Для составления интегральной суммы он разбивал на отрезки не ось абсцисс, а ось ординат, чтобы удобно было интегрировать разрывные функции. В этом случае для построения теории интегрирования необходимо было, в первую очередь, построить теорию меры. Это было сделано Борелем и Лебегом.

Трансформировалась и теория множеств. Французские ученые Борель, Бэр и Лебег заложили основы дескриптивной теории множеств. Это теория изучает строение сложных, причудливо устроенных числовых множеств. В 20-е годы XX в. ведущая роль в теории функций перешла к московской математической школе, возглавляемой Н.Н. Лузиным [75].

Исследования Кантора, Бореля, Лебега, Лузина и их учеников по теории интеграла и рядов Фурье привели к детальному изучению разрывных функций, а позднее – к появлению теории точечных множеств, т. е. множеств, состоящих из точек координатной прямой или плоскости. Дальнейшее развитие теории множеств показало эффективность ее применения в различных разделах математики: алгебре и геометрии, математическом анализе и теории вероятностей. Общие методы и понятия теории множеств позволили охватить области математики, казавшиеся ранее удаленными друг от друга, дали возможность сравнивать мощности различных множеств, т. е. как бы «градуировать бесконечность».

В начале XX в. продолжал развиваться ведущий раздел математики конца XIX в. – теория аналитических функций. Значительные успехи были достигнуты в теории конформных отображений, многое было сделано для изучения в комплексной области различных классов специальных функций.

В 20–30-е годы XX в. достигло апогея увлечение теоретико-множественными конструкциями, связанными с развитым аналитическим аппаратом теории функций действительного переменного и теории функций комплексного переменного. Самым важным во всей математике представлялось понятие непрерывности. Анри Лебег считал, что значительно уменьшилось и сходит на нет практическое значение вычислений, не связанных с непрерывными функциями и бесконечными процессами.

Топология. Одной из новых областей математики стала топология, состоящая из двух разделов. Один раздел, родоначальником которого был Пуанкаре, долгое время называли комбинаторной топологией, а теперь называют просто топологией. Другой раздел, истоками которого являются исследования Кантора, называют общей или теоретико-множественной топологией. Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основании математики. В XX в. основы общей топологии были заложены немецким ученым Ф. Хаусдорфом, польским математиком К. Куратовским, российскими учеными П.С. Урысоном и П.С. Александровым.

Комбинаторная топология является разделом геометрии. Она изучает свойства фигур, остающихся неизменными при взаимооднозначных и непрерывных отображениях.

Во втором десятилетии XX в. была создана теория размерности – раздел топологии, начало которому положили исследования французов Пуанкаре и Лебега, голландца Брауэра, австрийца Менгера и россиянина Урысона.

В конце 1930-х годов Уитни, Штифель, Понтрягин и Черн открыли важнейшие топологические инварианты гладких и комплексных многообразий – характеристические классы, связывающие воедино топологию, риманову геометрию и комплексный анализ.

Долгое время и комбинаторная топология воспринималась как «наука, далекая от жизни», призванная прославлять человеческий разум, но в наше время выяснилось, что она имеет самое непосредственное отношение к объяснению устройства мироздания. Помимо этого, топологические методы ныне пронизывают фактически все разделы математики – анализ, теорию дифференциальных уравнений и т. п. Сейчас топология – одна из центральных областей математики [75].

Функциональный анализ. Соединение идей и методов классического анализа, линейной алгебры и геометрии привело к созданию нового раздела математики – функционального анализа. В его основе лежит изучение не отдельных функций, а их классов. Отдельные функции рассматриваются как элементарные сущности, точки функционального пространства.

После того, как в 1900 г. Фредгольм догадался заменить интегральное уравнение системой линейных алгебраических уравнений, начала разрабатываться теория, сочетавшая в себе элементы алгебры и геометрии, но в бесконечномерных пространствах. Так родился линейный функциональный анализ. Нелинейный функциональный анализ был разработан спустя десятилетия.

Важным разделом функционального анализа явилась также теория квадратичных форм, начала которой были заложены Гильбертом в 1904–1906 гг. Теория квадратичных форм в гильбертовых пространствах явилась математической базой квантовой механики [75].

В знаменитой серии мемуаров 1904–1910 гг. Гильберт построил алгебру, элементами которой стали функции или бесконечные числовые последовательности по аналогии с линейной алгеброй и теорией квадратичных форм для конечного числа переменных. Наиболее важной заслугой Гильберта является то, что он сумел ввести в изученное им пространство (пространство Гильберта) топологические соотношения. Это позволило в новой, открытой им, области анализа воспользоваться языком и образами геометрии.

В развитии функционального анализа, в котором пересеклись идеи различных областей математики, принимали участие многие выдающиеся математики XX в., получившие основные научные результаты в других ее разделах. Начали изучаться пространства с комплексными координатами и пространства, элементами которых являются не точки, а прямые, окружности, сферы, функции и последовательности. Старейшей составной частью функционального анализа следует считать вариационное исчисление, которое является дифференциальным исчислением над функционалами.

Абстрактная алгебра. Если в XVI–XVIII вв. алгебра занималась в основном решением уравнений и систем уравнений, то к середине XIX в. алгебраические операции начали производить не только над числами, но и над

векторами, кватернионами, матрицами, логическими высказываниями и т. д. Правила таких действий отличались от привычных правил действий над числами. Это привело к необходимости исследования общих свойств алгебраических операций в произвольных множествах.

Изучение различных операций сочеталось с изучением таких алгебраических структур, как группы и кольца, а позднее – поля, решетки и т. д. Эти структуры первоначально возникли из конкретных задач алгебры и геометрии. Например, понятие группы было введено Э. Галуа в 30-е годы XIX в. в связи с задачей о разрешимости уравнений в радикалах.

Еще до того, как около 1870 г. было сформулировано абстрактное понятие группы, в работах математиков встречались не только разнообразные группы, но и некоторая часть теории групп, сформулированная лишь для отдельных случаев. Сама теория групп возникла как средство упорядочения этих частных результатов. Идея заключалась в том, что общие для всех групп свойства были сформулированы и названы аксиомами группы. Иногда шутят, что аксиомы групп позволяют облегчить жизнь математикам, объединяя различные вещи в единое целое.

В дальнейшем предметом алгебры становится изучение разного рода структур, порождаемых во множествах введением различных операций. Таким образом, значительно расширилась область приложения алгебраических методов. Одна и та же алгебраическая теория (например, теория групп, теория коммутативных групп, теория колец, теория полей и т. д.), описывающая определенный род алгебраических структур, может применяться к любой структуре этого рода, в какой бы предметной области она ни встретилась.

Первыми областями математики, аксиоматизированными после геометрии, оказались алгебра и топология. Множества точек евклидова пространства, римановых поверхностей, многообразий и множества функций были объединены вначале в метрические, а затем в топологические пространства. Если абстрактная алгебра еще питалась понятиями старой алгебры, то в топологии возникли свои фундаментальные понятия, которых не было в прежних специальных подходах. Это такие понятия, как полнота, компактность, сепарабельность, а также такие, которые можно правильно понять лишь с обобщенной точки зрения, – связность, размерность, произведение пространств и т. д.

Можно считать, что абстрактная алгебра началась в 1910 г., когда Э. Штейниц ввел понятие поля. В 1914 г. было введено понятие линейного пространства, охватившее многочисленные примеры ранее известных функциональных пространств. В 30-е годы XX в. это понятие под названием векторного пространства было использовано для изложения аналитической геометрии.

Дифференциальные уравнения. Проблемой номер один для математиков XIX в. было интегрирование дифференциальных уравнений. Ее решения ждали представители всего точного естествознания, так как дифференциальные уравнения были единственной математической формой описания естественных процессов. Построить физическую теорию для ученых означало найти дифференциальные уравнения, описывающие движение всех частей

исследуемой системы. Умение их интегрировать являлось насущной потребностью времени. В работах Коши и Вейерштрасса было показано, что многие свойства дифференциальных уравнений проясняются, если входящим в уравнения переменным придавать не только вещественные, но и комплексные значения. Это привело к развитию теории аналитических функций, частью которой была многообещающая теория эллиптических функций.

До XX в. математика обладала слишком скудным запасом функций для описания решений рассматриваемых дифференциальных уравнений. К хорошо известным элементарным функциям были добавлены и изучены новые, такие как гамма-функция, дзета-функция, цилиндрические и эллиптические функции. Исследования Ф. Клейна и А. Пуанкаре добавили к ним автоморфные (фуксовы) функции.

А. Пуанкаре разрабатывал качественную теорию дифференциальных уравнений в абстрактной форме и в применении к небесной механике, а А.М. Ляпунов исследовал сходные вопросы при создании теории устойчивости.

В XIX в. в теории дифференциальных уравнений искали явное локальное решение. Теперь интересуются в основном неявными решениями и сингулярностями решений.

Геометрия. Исследования Римана 1850-х годов показали неограниченное разнообразие геометрических пространств, отличающихся друг от друга размерностью, формулами для вычисления расстояний и т. д. В конце XIX в. в геометрии стали применяться идеи теории групп, сформулированные Галуа при исследовании вопроса о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Этот подход в геометрии был впервые рассмотрен в 1872 г. немецким математиком Ф. Клейном в его знаменитой Эрлангенской программе. Геометрия рассматривается Клейном как наука, изучающая свойства фигур, не изменяющихся при преобразованиях из той или иной группы. Выбирая различные группы геометрических преобразований (группы перемещений, подобий, афинную, проективную, конформную и т. д.), можно получить различные геометрии. А поскольку отыскание инвариантов данной группы является алгебраической задачей, то была установлена новая связь между алгеброй и геометрией.

Геометрия в XX в. распалась на множество геометрий, и каждая из них накопила большое количество важных результатов. Например, возникла кватернионная проективная геометрия. Эйнштейн при построении общей теории относительности ввел в физику риманову дифференциальную геометрию, пользуясь исчислением, которое он назвал тензорным. Опубликованные в 1899 г. «Основания геометрии» Гильберта продолжают и завершают кропотливую работу над уточнением аксиоматики геометрии XIX в. и начинают новую главу в истории аксиоматического метода.

В XIX в. в дифференциальной геометрии исследовались малые части пространства, малые доли кривизны и локальных уравнений, описывающих локальную геометрию. В XX в. перешли к большим масштабам, исследуют глобальную картину искривленной поверхности в целом.

Математика и физика. Специальная теория относительности была создана в 1904–1906 гг. усилиями А. Пуанкаре и А. Эйнштейна. Устройство

физического мира, описываемого этой теорией, было очень непривычно. Оно противоречило физической интуиции, выработанной на протяжении последних трех веков, и вызвало шок у физиков.

Математические аспекты специальной теории относительности были исследованы немецким математиком Германом Минковским. Им была установлена поразительная связь специальной теории относительности с геометрией Лобачевского. При этом выяснилось, что время и пространство нельзя рассматривать изолированно, что наш мир четырехмерен. В итоге многомерная геометрия приобрела физический смысл.

Через десять лет Эйнштейн создает общую теорию относительности, где рушит представления о «плоском» мире. Геометрия мира оказывается «искривленной» и связанной с тяготением. Все это повлекло за собой интенсивнейшее развитие геометрии в 1920–1930-е годы и топологии – в наше время.

Еще одним заметным событием в физике в 20-е годы XX в. стало рождение квантовой механики. Ее математические основания созданы Гильбертом и его последователями незадолго до рождения самой науки. Уменьшилась уверенность в возможности предсказания будущего по прошлому. Выяснилось, что микромир принципиально непредсказуем. Можно лишь определить вероятность появления электрона на определенном месте экрана, расположенного за отверстием, через которое этот электрон пропускается. Это казалось невероятным даже для Эйнштейна, одного из основоположников квантовой теории.

Гейзенбергом был сформулирован принцип неопределенности, в соответствии с которым мы не можем точно знать одновременно и положение материальной частицы, и ее импульс. Рухнула надежда на детерминизм и познаваемость микромира [75].

Теория чисел и теория вероятностей. Новые главы были вписаны и в теорию чисел. Выдающиеся результаты в начале XX в. получены в аналитической теории чисел Гильбертом, Г. Вейлем, Харди, Литлвудом, Рамануджаном. Успешно развивалась русская школа теории чисел, начало которой положили П.Л. Чебышёв, А.А. Марков, Е.И. Золотарёв, А.Н. Коркин, Г.Ф. Вороной. В XX в. замечательные результаты в теории чисел были получены И.М. Виноградовым и его учениками.

Основой исследований в области теории вероятностей оставались работы учеников Чебышёва в России – А.А. Маркова и А.М. Ляпунова. В СССР их преемниками стали С.Н. Бернштейн, А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров и их ученики. Физика, техника, экономика ставят все более разнообразные задачи перед теорией вероятностей и математической статистикой. После разработки Колмогоровым аксиоматики теории вероятностей произошел переход от элементарной теории вероятностей, основанной на комбинаторике, к современной, использующей мощный аппарат других разделов математики.

Математика и решение оборонных задач. Вопросы национальной безопасности России всегда стояли остро. В них слиты воедино проблемы геополитические и демографические, этнические и конфессиональные, языковые и общекультурные, проблемы здоровья и благосостояния нации, национального самосознания и многие другие. Весь этот конгломерат проблем

цементирует воедино современная наука, абстрактная и конкретная, фундаментальная и прикладная.

Когда-то физики обходились без математиков. Но создание атомного, а тем более – термоядерного оружия потребовало построения сложнейших математических моделей и больших расчетов. В создании бомбы в той или иной мере приняли участие многие выдающиеся математики. В итоге были переосмыслены принципы вычислительной математики и созданы мощнейшие вычислительные машины.

Потребности авиации способствовали рождению аэродинамики, что вызвало развитие теории функций комплексного переменного. Рождение радио стимулировало развитие теории нелинейных колебаний. Управление артиллерийским огнем и проблемы бомбометания оказали влияние на развитие многих разделов теории вероятностей. Проблемы шифровки секретных сообщений и их эффективной передачи по каналам связи привели к рождению теории информации и развитию теории кодирования [75].

Внедрение автоматического управления в промышленности и появление космической навигации стимулировали развитие оптимального управления и динамического программирования [75].

Дискретная математика. С появлением исследований в области кибернетики в 1940-е годы резко возрос интерес к дискретной математике. Важную роль сыграло появление электронных цифровых вычислительных машин дискретного действия. Математики заинтересовались дискретной природой явлений в биологии, химии и физике.

В середине XX в. был разработан целый ряд фундаментальных понятий современной математики, неожиданных новых схем математического рассуждения. Создан стройный, чрезвычайно разветвленный аппарат, позволяющий с единой точки зрения находить подходы и решать трудные проблемы в самых различных областях математики, например, дифференциальной геометрии и динамических систем, вариационного исчисления и теории уравнений в частных производных, групп Ли, алгебры и алгебраической геометрии, теории чисел и теории функций многих комплексных переменных.

Создание быстродействующих вычислительных машин сделало «прикладными» некоторые разделы математики, ранее считавшиеся весьма далекими от практики. В частности, важной для приложений оказалась математическая логика, возникли новые разделы математики – теория кодирования, теория информации, теория алгоритмов, теория автоматов. Бурное развитие получила конечная математика, связанная с изучением конечных множеств, почти заново была создана вычислительная математика.

Синергетика и фрактальная геометрия. В последние десятилетия внимание многих ученых, в том числе и математиков, привлекает синергетика – новая междисциплинарная область исследований, одна из самых молодых и интересных для изучения. Основанная на идеях термодинамики, синергетика пытается с точки зрения химии, физики, математики и теории хаоса объяснить взаимодействие любых систем, имеющих развитие, в том числе и эволюцию человечества. С развитием синергетики ученые обратились к исследованию необратимых процессов, в научный обиход пришло понятие стрелы

времени. Основой синергетики являются термодинамика неравновесных процессов, теория случайных процессов, теория нелинейных колебаний и волн.

Выяснилось, что принцип обратимости и детерминированности процессов, господствующий в науке со времен Ньютона, выполняется лишь в отдельных простейших случаях, а в природе господствуют необратимость и случайность.

Близкой синергетике является возникшая около трех десятилетий назад новая область математики – фрактальная геометрия. Основным понятием фрактальной геометрии является «фрактал», который создатель фрактальной геометрии Бенуа Мандельброт определил как структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Фрактальную геометрию он определил как морфологию бесформенного, изучающую математические объекты, лишенные гладкости, графически являющиеся шероховатыми, зазубренными, изъеденными ходами и отверстиями. Такие объекты ранее не исследовались, хотя в природе они встречаются чаще, чем рассматриваемые в геометрии усредненные, сглаженные, отполированные.

Аксиоматизация и систематизация математики

Аксиоматический метод открыт древнегреческими математиками. В Древней Греции аксиомы или постулаты геометрии принимали без доказательства, а остальные предложения выводили из этих аксиом. Истинность аксиом автоматически обеспечивала истинность всех теорем и их совместимость. Аксиоматическое изложение геометрии в глазах многих поколений ученых представлялось образцом научного знания. До недавнего времени геометрию считали единственной областью математики, построенной на аксиоматической базе.

Открытие неевклидовой геометрии в 20-е годы XIX в. потребовало отказа от понимания аксиом как истин, не требующих доказательства в силу своей очевидности. Оказалось, что аксиомы скорее являются гипотезами, поэтому требуется проверка моделей, построенных с использованием этих аксиом, на соответствие материальному миру. Это послужило стимулом для глубоких исследований в области оснований математики, заставило анализировать требования к системам аксиом и привело к дальнейшему развитию аксиоматического метода, ставшего одним из ведущих методов построения математических теорий.

Примерно в 1870 г. началось создание не только теории множеств, но и современной аксиоматики. Первым разделом математики, в котором появилась современная аксиоматика, была геометрия. В геометрии наиболее просто можно было решить проблему дедуктивного построения теории из основных положений – аксиом, что и было сделано Евклидом. Аксиоматику проективной и комплексной проективной геометрии пытался создать Штаудт в 40–50-е годы XIX в. Первую действительно полную аксиоматику евклидовой геометрии предложил Мориц Паш. Он показал математикам, как следует формулировать аксиомы. Вскоре, однако, более глубокие «Основания геометрии» Гильберта (1899) затмили работы Паша.

Первыми разделами математики, аксиоматизированными после геометрии, оказались алгебра и топология. Множества точек евклидова пространства, римановых поверхностей, многообразий и множества функций были объединены вначале в метрические, а затем в топологические пространства.

Если в абстрактной алгебре еще использовали понятия старой алгебры, то в топологии возникли свои фундаментальные понятия: полнота, компактность, сепарабельность и т. д. Примерно до конца 1920-х годов аксиоматические устремления в алгебре, топологии и анализе развивались более или менее независимо друг от друга. Анализ, включавший в себя аксиоматические элементы алгебры и топологии, дал толчок к комбинированию структур. Стало возможным образовывать слияние двух или более структур, которые при уточнении описания не должны противоречить друг другу. Например, поле действительных чисел можно рассматривать в качестве топологического поля, или в качестве упорядоченного поля, или в качестве метрического поля.

В 1930-е годы, к которым относится начало самостоятельного существования теории структур, были найдены связи понятия структуры с другими разделами математики. Так, например, теория проективных геометрий оказалась просто частью дедекиндовых структур.

В развитии теории структур можно отметить три периода. После опубликования в 1847 г. «Математического анализа логики» Буля некоторые математики-логики подвергли сомнению постулаты булевой алгебры и алгебры отношений. Основные результаты их анализа изложены в «Алгебре логики» Шрёдера.

Второй период в развитии теории структур наступил спустя два года после выхода в свет «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена. Статьи, опубликованные в 1933–1937 гг. Г. Биркгофом, Дж. фон Нейманом и Л.В. Канторовичем, показали, что обобщение булевой алгебры до подходящей «структуры» имеет фундаментальное значение для современной алгебры, проективной геометрии, теории точечных множеств и функционального анализа, равно как и для логики, и теории вероятностей. В результате теория структур стала существенной отраслью современной алгебры. В русском языке словом «структура» называли введенный Г. Биркгофом в 1933 г. термин *lattice*. В настоящее время вместо этого слова используют термин «решетка», впервые введенный в математику Дедекиндом в 1894 г.

В дальнейшем предметом алгебры становится изучение разного рода алгебраических структур, порождаемых во множествах введением различных операций. Таким образом значительно расширилось поле приложения алгебраических методов.

Сложилась концепция математики, которую А.Н. Колмогоров характеризовал следующими тезисами:

1) в основе всей математики лежит чистая теория множеств;

2) специальные разделы математики занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным специальным родам структур. Каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом. Математика интересуется только теми свойствами структур, которые вытекают из принятой системы аксиом, т. е. изучает структуры только с точностью до изоморфизма.

Данная точка зрения получила наиболее полное отражение в работах группы современных французских математиков (А. Вейля, Ж. Дьёдонне и других), публиковавших свои труды под общим псевдонимом Николя Бурбаки. Поэтому такую точку зрения часто называют бурбакистской.

В распоряжении математиков появились рычаги управления, предоставленные теорией структур. В тех разделах математики, которые не были достаточно структурированы, появились области, унифицированные аксиоматикой. Вместо четко разграниченных разделов алгебры, анализа, теории чисел и геометрии обнаружились связи теории простых чисел с теорией алгебраических кривых, в евклидовой геометрии обнаружилось сходство с интегральными уравнениями. Такие разделы классической математики, как анализ функций действительного и комплексного переменного, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, теория чисел стали утрачивать автономность и превращаться в «перекрестки», на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие наиболее общий характер.

Это, конечно, упрощенная картина, и реальность намного сложнее. Но она позволяет «лучше понять внутреннюю жизнь математики, понять то, что создает ее единство и вносит в нее разнообразие, понять этот большой город, чьи предместья не перестают разрастаться хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз более и более ясному плану и стремясь к более и более величественному расположению, когда сносятся старые кварталы с их лабиринтом переулков для того, чтобы проложить к периферии улицы все более прямые, все более широкие, все более удобные» [84].

Систематическое применение аксиоматического метода позволило выявить связи между областями математики, казавшимися очень далекими друг от друга, найти пути преодоления тенденции к расщеплению математики на почти независимые области и укрепить тем самым единство математической науки. Оно дало ряд важных результатов благодаря возможности применять методы, выработанные в одних областях математики, к иным областям, связанным с ними единством структуры.

Выявилась роль таких математических понятий, как эквивалентность, порядок, близость и т. д. При этом стало ясно, что они могут встретиться в разных разделах. В математике сейчас изучаются не только понятия, возникшие при рассмотрении реальных объектов, но и свойства «мыслимых объектов» (например, шаров или спиралей в бесконечномерном пространстве), математика изучает логически возможные чистые формы, системы отношений.

Математика есть учение об общих формах, свойственных реальному бытию, она создает постоянно развивающиеся теории, пригодные для самых различных запросов естествознания и техники. Именно это позволяет применять математические методы, разработанные при решении задач одной области науки, к совершенно непохожим на них задачам, относящимся к совсем иным областям знания.

В течение двух последних столетий аксиоматический метод стал применяться более широко и интенсивно. Для многих разделов математики были сформулированы системы аксиом. Укоренилось убеждение, что для любой математической дисциплины можно указать перечень аксиом, достаточный для систематического построения ее истинных предложений.

Исследования К. Гёделя показали, что возможности аксиоматического метода ограничены. Выяснилось, что для весьма широкого класса дедуктивных теорий нельзя доказать их непротиворечивость, не пользуясь более сильными методами, непротиворечивость которых еще более сомнительна, чем у доказываемых теорий. Следовательно, нельзя окончательно систематизировать многие разделы математики, и нет гарантий, что они свободны от внутренних противоречий.

Споры сторонников абстрактной и прикладной математики

Долгое время математику считали прикладной наукой, которая решает практические задачи естествознания. Первым показал красоту и значимость абстрактной математики (ее часто называют «чистой» математикой) Гаусс. Ранее ей отводилась роль своего рода отдохновения от гораздо более важных проблем естественных наук.

После Гаусса в XIX в. для нескольких поколений ученых абстрактная и прикладная математика успешно сосуществовали. Чисто теоретические исследования находили применение на практике, а попытки решить прикладные задачи приводили к развитию абстрактной математики.

Доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, в частности впервые предпринятое Коши, должно было отмести все сомнения в том, что физические проблемы, сформулированные на языке математики, допускают решение, и тем самым вселить уверенность, что поиск этих решений будет результативным. Стимулом для работ Кантора по теории бесконечных множеств было стремление ответить на некоторые вопросы теории рядов Фурье, используемых в приложениях. Гигантская работа по перестройке основ математики, производимая в интересах самой этой науки, несомненно, явилась откликом на насущные проблемы не только абстрактной, но и прикладной математики. Математика была одновременно и царицей и служанкой естественных наук. Многие ведущие математики, работая в области астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили здесь несравненно более важные результаты, чем в собственно математике.

По поводу противоречий между сторонниками абстрактной и прикладной математики Ф. Клейн писал, что все еще встречаются университетские преподаватели, не жалеющие презрительных слов по адресу всякого занятия приложениями, что любое дельное достижение, следовало бы ценить одинаково высоко, предоставляя каждому возможность заниматься теми вещами, к которым он чувствует наибольшую склонность, тогда каждый проявит себя тем более разносторонним образом, чем большим числом талантов он обла-

дает: величайшие гении, каковыми являются Архимед, Ньютон, Гаусс, всегда охватывали равномерно и теорию и практику.

Среди математиков нет единого мнения относительно того, что в настоящее время должно являться предметом исследования. В XX в. разногласия между сторонниками абстрактной и прикладной математики обострились.

Для некоторых математиков приоритетными являются абстрактные задачи. Они считают, что математикой нужно называть лишь чисто дедуктивные построения, связанные с изучением математических абстракций самих по себе и что прикладными вопросами занимаются лишь те, кто не может внести лепту в теорию. По их мнению, прикладная математика – это часть математики, существующая в виде логически недоработанного и несовершенного набора некоторых приемов и правил.

Одним из тех, кто отстаивал первую точку зрения, был Ж. Дьёдонне. Он считал, что современная математика в основе своей не имеет какой-либо утилитарной цели, что она представляет собой интеллектуальную дисциплину, практическая польза которой сводится к нулю, а математик в своих исследованиях никогда не руководствуется мыслью о степени полезности полученных результатов в будущем, скорее он руководствуется желанием проникнуть в понимание математического явления, заканчивающегося на себе самом и что, наконец, математика – не более чем «роскошь», которую может позволить себе цивилизация.

Приоритету абстрактной математики способствовали следующие обстоятельства. Во-первых, осознание того, что математика не является сводом незыблемых истин о природе. Во-вторых, уяснение того, что и абстрактная математика рано или поздно окажется полезной для практики, что заниматься частными проблемами не обязательно. В-третьих, усложнение стоящих перед естественными науками проблем, которые не всем были по плечу (например, «задача трех тел» – проблема описания движения трех тел, каждое из которых притягивается двумя другими). В-четвертых, давление на математиков со стороны учреждений, где они работали, выражающееся в требовании публиковать результаты исследований.

Сторонники этой точки зрения видят необходимость исследований в четырех направлениях. Первое направление – *абстракция.* После введения Гамильтоном кватернионов математики занялись поиском всех возможных алгебр. Второе направление – *обобщение*. Математики стремятся получить результаты для *n*-го порядка там, где известны результаты для второго, третьего порядков. Третье направление – *специализация*, стремление решать частные задачи внутри одного раздела математики. Четвертое направление – *аксиоматизация*. Математики стремятся модифицировать существующие аксиоматические системы, пытаясь сформулировать существующие аксиомы проще или заменить их другими.

По мнению других ученых, предметом исследования математики должно быть решение насущных практических задач, а теоретические результаты должны получаться путем обобщения закономерностей, открываемых при решении конкретных задач. Джон Л. Синг, специалист по математической физике, был не согласен с Дьёдонне. Он считал, что природа по-прежнему

продолжает подкидывать глубокие проблемы, но они уже не доходят до математиков, в ожидании противника они сидят в своей башне из слоновой кости, вооруженные до зубов, но противник так и не появляется, что природа не ставит перед математиками четко сформулированных проблем, а добыть ясно поставленную задачу можно, лишь вооружившись киркой и лопатой, и тот, кто боится испачкать руки, никогда ни одной сколько-нибудь стоящей задачи не найдет.

Однако эта позиция также слишком категорична. Многие открытия математиков десятилетиями, а то и тысячелетиями дожидались своего практического применения. Аполлоний изучал свойства эллипса более чем за тысячу лет до того, как Кеплер использовал его идеи для определения траекторий планет. Тензорный анализ был создан за 30–50 лет до того, как Эйнштейн нашел для него применение в теории относительности.

Любой математик знает о существовании теоретических результатов, которые до сих пор не нашли практического применения, но интуиция подсказывает, что они являются очень важной частью математики. Работа над ними свидетельствует не об отходе от главного направления, а как раз об обратном – о борьбе за развитие математики. Когда-нибудь эти теории, подобно эллипсу, найдут своего Кеплера и, подобно тензорному анализу, своего Эйнштейна. Знаменитый кораблестроитель, механик и математик академик Алексей Николаевич Крылов говорил, что рано или поздно всякая правильная математическая идея находила применение в том или ином деле.

Джон фон Нейман считал самой важной особенностью математики ее связь с естественными науками. Согласно его мнению, математические идеи берут свое начало в эмпирике, но после возникновения приобретают независимое, самостоятельное существование. Когда математическая дисциплина «отходит» достаточно далеко от своего эмпирического источника, над ней нависает серьезная опасность. Она может начать развиваться по пути наименьшего сопротивления. Соответствующий математический раздел обращается в беспорядочное нагромождение деталей и различного рода сложностей. При угрозе вырождения единственным способом «исцеления» является возвращение к источнику и эмпирическим идеям. Это необходимо для сохранения «свежести» и жизнеспособности математической теории.

У прикладной математики много общего с абстрактной математикой, но есть и различия. По этому поводу Курант писал, что на самом деле между «чистой» и «прикладной» математикой невозможно провести четкую грань, поэтому в математике не должно быть разделения на касту верховных жрецов, поклоняющихся непогрешимой математической красоте и внимающих только своим склонностям, и на работников, обслуживающих их.

Такие споры имели место и за рубежом, и в нашей стране. Иногда они выплескивались на страницы газет и журналов. В «Известиях» от 17 января 1971 г. Ю.В. Новожилов писал: «К сожалению, теоретик до сих пор нередко рассматривает “прикладника” как математика второго сорта, как ученого, который не способен работать предельно строго, разменивается на частности в ущерб общности. Легко обнаруживая у “прикладников” промахи в строгости рассуждений, теоретик часто остается равнодушным к их основному

достоинству – умению с достаточной для практических целей точностью решать такие актуальные задачи, которые он сам строгими методами решить не может».

В «Литературной газете» № 43 за 1979 г. была опубликована статья А. Китайгородского «Дело о разводе», в которой шла речь о необходимости «развода» математики с естествознанием и техникой. Статья вызвала большой общественный резонанс. Споры завершились статьей Е. Вентцель, Л. Гурина, А. Мышкиса, Л. Садовского «Компьютер – это еще не все!», помещенной в «Литературной газете» № 11 за 1980 г.

Статья заканчивается такими словами: «Итак, “развода” нет и не будет! Не за “развод” естествознания и техники с математикой надо ратовать, а за их еще более тесный союз на базе использования ЭВМ; не за отделение чистой математики от прикладной “китайской стеной”, а за дальнейшее претворение “чистых” результатов математического творчества в столь же творческие прикладные исследования в интересах общего развития науки и техники».

В защиту связи теории с практикой писал академик С.Л. Соболев: «Раньше каждое новое изделие проходило длинную стадию моделирования и испытания. Прежде чем сделать окончательную конструкцию, нужно было перерабатывать много разных неудачных вариантов. Опытная доработка и доводка была главным способом создания хороших машин. В новой технике этот путь становился непригодным. Нельзя было бы вести пристрелку по Луне, выпуская сотни и тысячи ракет. Слишком это было бы дорого, как слишком дорого и долго было бы испытывать один неудачный реактор за другим. Опытную отработку устройств заменил математический расчет. Этот расчет бывает иногда очень сложным. Он требует миллионов арифметических действий, которые нужно к тому же выполнить в короткий промежуток времени. Для того чтобы это осуществить, и были изобретены математические машины, работающие уже во много миллионов раз быстрее человека» [68].

При решении задач абстрактной математики требуется бескомпромиссное совершенство. Результат должен быть следствием неразрывной цепи непротиворечивых рассуждений. В случае затруднений допустимо упрощение задачи, но эта упрощенная задача должна быть решена безупречно.

При решении задач прикладной математики их обычно нельзя видоизменять, так как требуется дать правильный ответ на конкретную задачу. В случае необходимости возможен компромисс: внесение некоторых догадок в цепь рассуждений и погрешность в числовых значениях.

Математик-прикладник обязан вникнуть в суть реальной задачи, суметь выбрать адекватный математический аппарат, а если такового не существует, то разработать его, построить разумную математическую модель изучаемого процесса, вывести из нее необходимые следствия, найти их прикладное истолкование и оценить соответствие модели реальному процессу.

Иногда математику-прикладнику приходится отказываться от полной математической строгости. В прикладной математике используют «размытые» понятия, категории не качественного, но и не количественного характера. Приемы, которыми пользуется современная прикладная математика (метод экспертной оценки, эвристические методы и т. п.) настолько отличаются

от классических, что у профессионального математика «строгой» школы могут вызвать недопонимание.

Случается, что в абстрактной и прикладной математике возникают принципиальные различия при решении задач, требующих применения числовых рядов. Для абстрактной математики скорость сходимости числового ряда не имеет принципиального значения. Так ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ является сходящимся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$ – расходящимся. При неограниченном количестве членов ряда это бесспорно. При практических расчетах, когда берется относительно малое количество членов ряда, первый ряд можно считать расходящимся, так как его первые 1000 членов возрастают, а второй ряд – сходящимся, потому что первые 1000 членов убывают и вначале это убывание весьма быстрое. Этот пример приводил Анри Пуанкаре. Далее он подчеркивал, что оба воззрения законны: первое – в исследованиях теоретических, второе – в численных приложениях. Оба воззрения должны господствовать, но в двух различных областях, которые важно четко разграничить.

Кроме того, в прикладных задачах принципиально недостижима доказательность того же уровня, как и в чисто математических исследованиях, хотя бы потому, что математическая модель реального объекта может описывать лишь существенные, в том или ином смысле, черты этого объекта, но никогда не претендует и не должна претендовать на его полное описание. С другой стороны, к решению прикладных задач предъявляются требования, которые в чисто математических исследованиях считаются второстепенными. Прикладная задача должна быть решена не только правильно, но и своевременно, экономно по затраченным усилиям. Решение должно быть доступным для существующих вычислительных средств и пригодным для фактического использования, точность решения должна соответствовать задаче и т. п. Найти удовлетворительное решение задачи в срок более предпочтительно, чем полное решение к тому времени, когда оно станет бесполезным. Современная прикладная математика включает в себя математический эксперимент, использует аналогии.

Поэтому прикладную математику можно определить как науку об оптимальных (чаще просто приемлемых) методах решения математических задач, возникающих вне математики. Существует афоризм: «Чистая математика делает то, что можно, так, как нужно, а прикладная – то, что нужно, так, как можно».

В настоящее время прикладная математика завоевывает свое место под солнцем. Помимо физики, механики, техники, математика проникла в экономику, социологию, психологию, лингвистику, биологию, медицину и т. д. Математические методы стали использовать в гуманитарных науках позже, чем в точных, поскольку предмет их изучения очень сложен.

Для точных наук свойственны четкая постановка задач, количественный характер выводов, формально-логический характер рассуждений, для гуманитарных наук – преимущественно словесный способ построения

исследования, широкое применение аналогий, использование терминов (точное содержание которых нередко сложно сформулировать), апелляцией к чувствам, воображению.

Математики начали заниматься такими вопросами, которыми раньше занимались ученые только гуманитарных специальностей (конфликтными ситуациями, иерархическими отношениями и т. п.). Математика со своим понятийно-категориальным аппаратом и методологией проникает повсюду, поэтому стирается граница между точными и гуманитарными науками.

Р. Курант считал, что математикам необходимо в непосредственно обозримом будущем установить еще раз органическую связь между чистым и прикладным знанием, здоровое равновесие между абстрактной общностью и полнокровной конкретностью и есть задача математики.

«Архитектура» современной математики

Сравним чтение этой книги с участием в виртуальной тематической экскурсии «Современная математика и ее творцы». Мы посетим небоскребы «Математика», находящиеся в квартале «Точные науки», в микрорайоне «Культура». Вначале небольшая информация об особенностях кварталов микрорайона. Та часть микрорайона, которая называется «Искусство», значительно отличается по внешнему виду от кварталов «Точных наук». Она представляет собой индивидуальную застройку, где есть изумительные по своей красоте виллы и невзрачные постройки массовой культуры. Особенностью является то, что почти каждый из объектов строится одним человеком. Новый житель, пришедший в этот квартал, строит свое жилище, а не достраивает то, что сделано до него другими. Он может что-то заимствовать из приемов, применяемых теми, кто обосновался в квартале раньше, но строит свое жилище сам от начала до конца. В зависимости от таланта, строение может стать шедевром, которым будут любоваться потомки, а может стать трущобой, на которую никто не обратит внимания. Характерно, что постройки не подлежат ремонту и не достраиваются другими. И это понятно, ведь нельзя, пусть даже самому выдающемуся художнику XXI в., дорисовывать полотна Рафаэля или Леонардо да Винчи, также как нельзя, даже самому талантливому композитору, дополнять творения Бетховена или Моцарта.

По-другому выглядят кварталы «Точных наук». Здесь господствуют многоэтажные здания. На общем фундаменте идет постоянное строительство. Один талантливый человек может выстроить целый этаж, другой только положит один кирпич, но и этот кирпич увеличивает строение. Известно, что в науке все идет по нарастающей. Время от времени здания перестраиваются, подвергаются капитальному ремонту. Однако здесь господствует накопительный принцип, и старательный труженик, даже не обладающий большим талантом, может своим «рацпредложением» улучшить сделанное гением предыдущей эпохи. Именно поэтому изменения в кварталах «Точных наук», произошедшие за последнее столетие, выглядят несравненно более внушительными, чем изменения в кварталах «Искусства».

Приблизимся к небоскребам с названием «Математика». В них трудятся профессионалы. Вход строго по пропускам. Чтобы остаться в этих небоскребах надолго, требуется предварительное обучение в двух наполненных тренажерами-учебниками и находящихся перед небоскребами небольших зданиях, на фасадах которых тоже присутствует слово «математика».

Через одно из них, называемое «Школьная математика», проходит практически каждый человек, не только стремящийся попасть в небоскребы, но и питающий не самые теплые чувства по отношению к математике. Там все получают тот необходимый объем математических знаний, который требуется для полноценного существования в современном мире. У тех же людей, кто в изучении математики ограничивается школьным курсом, создается впечатление, что математика состоит из алгебры, геометрии, тригонометрии и, быть может, высшей математики. Арифметику к математике обычно не относят. Ее связывают с периодом раннего детства, так же как азбуку и ряд «детских» заболеваний. Математика представляется завершенной, окостенелой и древней наукой, в которой все давно известно. Это связано с тем, что большая часть материала, изучаемого в школьном курсе математики, была известна еще Евклиду. Между тем элементарная математика непрерывно развивалась последние две тысячи лет, но в школьный курс новые результаты не включались из-за сложности понимания.

Другое здание, с громким названием «Высшая математика», – обитель студентов университетов и технических вузов. Будущие инженеры знакомятся с относительно небольшой частью этого здания, в отличие от будущих сотрудников небоскреба, обучающихся на математических отделениях. Созданные в конце XVII в. дифференциальное и интегральное исчисления являются основным математическим аппаратом класической физики. Их развитие привело к разработке дифференциальных и интегральных уравнений математической физики. Эти новые разделы математики, изучаемые в технических вузах, способствовали развитию физики, механики, химии и смежных с ними дисциплин, а также завоевать так много побед, что перечислить все просто невозможно. Это и полеты космических кораблей и самолетов, и радио, и телевидение и др.

А теперь приблизимся к самим небоскребам. При описании их внутреннего строения автор пользовался идеями, изложенными в [1, 60]. Удивительно то, что их внешний облик постоянно подвергается изменениям, в основном малозаметным, но иногда значительным. В чем-то они похожи на библейскую вавилонскую башню, так как даже самые знаменитые строители этих небоскребов часто не понимали языка других строителей.

Современная математика поражает крайней узконаправленностью исследований. Создаются международные журналы, посвященные даже не разделу математики, а малой его части. Специализация многих математиков часто очень узка.

По этому поводу группа французских математиков, выступающая под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки, писала, что каждый год математическая наука обогащается массой новых результатов, приобретает все более разнообразное содержание и постоянно дает ответвления в виде теорий, ко-

торые беспрестанно видоизменяются, перестраиваются, сопоставляются и комбинируются друг с другом, что ни один математик не может проследить это развитие во всех подробностях, даже если он посвятит этому свою деятельность полностью.

Рассмотрим лишь некоторые принципы внутреннего устройства небоскребов, потому что знать все их помещения не дано никому. Наиболее общий вид небоскребов «Математика» схематически изображен на рис. 1.

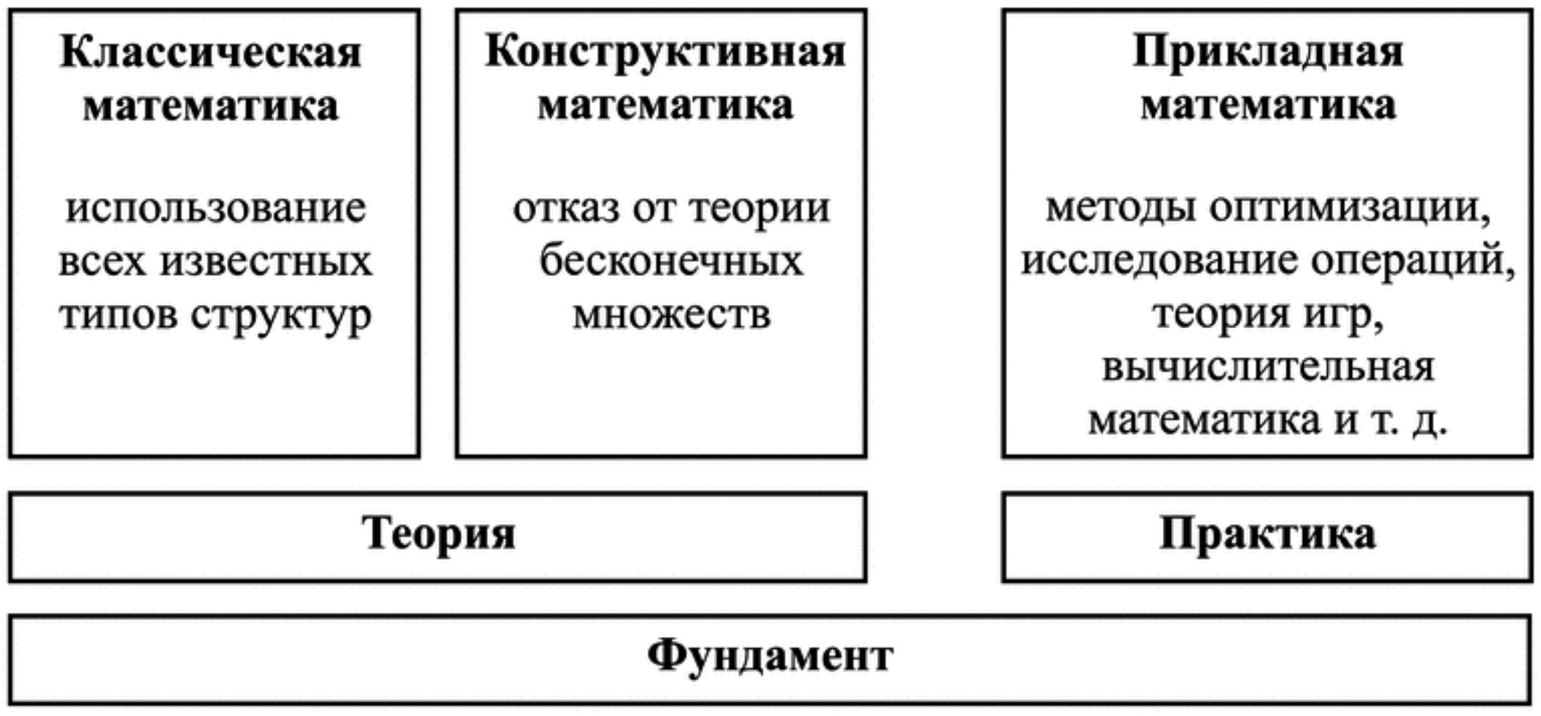


Рис. 1. «Архиитектура» современной математики

В подвалах небоскребов мощные колонны первичных логических теорий опираются на фундамент научного и производственного опыта людей.

Наземная часть небоскребов напоминает сооружения, возводимые детьми из блоков разного размера, взятых из различных «конструкторов». Их архитектура причудлива и запутана, но одна особенность бросается в глаза. На первом этаже располагаются два огромных блока, у входа в которые можно прочитать названия «топология» и «алгебра». На втором этаже видно уже несколько кубов поменьше, соединенных переходами и с блоками первого этажа, и между собой. На верхних этажах можно увидеть различные названия, такие как «линейная алгебра», «теория групп», «функциональный анализ», «дифференциальные уравнения». Каждый следующий этаж содержит все большее количество все меньших по размеру блоков. Растет и усложняется система переходов из блока в блок. Все рассмотренные в книге названия разделов математики, а также многие другие встречаются на табличках. Конструкции уходят вверх и теряются в небесах.

Во всех блоках работают люди. Одни все время сидят в своем блоке, другие постоянно передвигаются в горизонтальном и вертикальном направлениях. Немногие время от времени спускаются в подвал и внимательно осматривают колонны – нет ли на них трещинки. Чем выше этаж, тем реже спускаются вниз работающие там люди. Их мало интересует, на чем держится все сооружение. Прикладники обитают на самых верхних этажах. Им не нужна строгая теория множеств и метаматематика, а вполне хватает

полуинтуитивных представлений о логике и множествах. Спускаются в подвал только специалисты по кибернетике, системам управления, экспертным системам, системам искусственного интеллекта и те, кто имеет дело с компьютерами. Чем выше этаж, тем больше на нем компьютеров, тем чаще их меняют на более мощные.

С повышением мощности компьютеров возрастает интерес к конечной математике, и на верхних этажах появляются новые таблички: «системный анализ», «оптимальное планирование», «теория автоматов», «линейное программирование» и т. п. Часть верхних этажей может объединяться в одну структуру, и появляется название «математическое моделирование». Но это название можно повесить и на главных воротах дворца, потому что вся математика – математическое моделирование реального мира [60]. О наиболее известных строителях некоторых этажей небоскребов рассказывает эта книга.

Попытаемся изобразить архитектуру здания классической математики (см. рис. 1), взяв за основу [21]. Следует иметь в виду, что предлагаемая схема отражает субъективное мнение автора, и читатель может предложить свой вариант.

Бурбаки положили в основу всего понятие «математическая структура». Согласно [55], математическая структура – это родовое название, объединяющее понятия, общей чертой которых является то, что они применимы ко множествам, природа элементов которых не определена. Чтобы определить структуру, задают отношения, в которых находятся элементы множества, а затем постулируют, что данные отношения удовлетворяют условиям – аксиомам структуры.

Когда аксиомы структур досконально проработаны, то можно внедрять аксиоматику в любые разделы математики и находить общее между разделами, ранее между собой не связанными. Группа Бурбаки пишет: «Структуры являются орудиями математика; каждый раз, когда он замечает, что между элементами, изучаемыми им, имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он был бы должен трудиться, выковывая сам средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему» [21]. Так получается, что стали соседствовать, казалось бы, весьма различные разделы.

Вместо точно разграниченных разделов алгебры, анализа, теории чисел и геометрии мы увидим, например, теорию простых чисел по соседству с теорией алгебраических кривых или евклидову геометрию рядом с интегральными уравнениями, и упорядочивающим принципом будет концепция иерархии структур, идущей от простого к сложному, от общего к частному.

В центре схемы, представленной на рис. 2, находятся основные типы структур, так сказать, порождающие структуры. За пределами этого ядра появляются структуры, которые можно было бы назвать сложными и в которые входят одновременно одна или несколько порождающих структур, но не просто совмещенные друг с другом, а органически скомбинированные при

Рис. 2. «Архитектура» классической математики

помощи одной или нескольких связывающих их аксиом. Так появляются разделы, находящиеся на втором и более высоких «этажах» математики, причем следует отличать, например, топологическую алгебру от алгебраической топологии.

Далее следуют собственно частные теории, в которых элементы рассматриваемых множеств получают бóльшую индивидуальность. Именно таким образом получают теории классической математики: анализ функций действительного и комплексного переменного, дифференциальную геометрию, алгебраическую геометрию, теорию чисел. Но они утрачивают свою автономность.

Следует отметить, что систематизация математики, проведенная Бурбаки на основе структур, не является единственно возможной. Еще до того, как Бурбаки провели упорядочение математики, было открыто значение категорий. Категории являются инструментом нового порядка, и математика может быть систематизирована на их основе. Эта систематизация будет в корне отличаться от той, что провели Бурбаки.

Классификацию разделов современной математики можно проводить также по названиям секций математических конгрессов.

В математической науке появляется новый тип ученого. Математика теперь представлена не только академиками (преобладающий тип в XVIII в.) и профессорами университетов (преобладающий тип в XIX в.), но и работниками исследовательских институтов и лабораторий. Это связано с новыми формами организации научной работы. Имеются теперь математики-инженеры, математики-экономисты. И это не единичные фигуры, как было в прошлом, а значительные группы людей, активно участвующие в решении теоретических проблем.

Глава 2

РОЛЬ МЕЖДУНАРОДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОНГРЕССОВ В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ

> Национальной науки нет, как нет национальной таблицы умножения.
>
> *А.П. Чехов*

Первые международные контакты

Во второй половине XIX в. многие математики ощутили необходимость расширить формы научного общения в условиях все возрастающего числа математиков и математических работ. В середине XIX в. были организованы специальные математические общества. Почти одновременно образовались Московское математическое (1864) и Лондонское математическое (1865) общества. Оба они довольно скоро начали играть роль общенациональных. Позже возникают национальные математические ассоциации: Французское математическое общество (1872), Американское математическое общество (1888) и Немецкое математическое объединение (1891).

Начало XX столетия в математике – продолжение и развитие тех тенденций, которые достаточно ясно обозначились в течение последней четверти предшествующего столетия. В то время наука была еще преимущественно европейской. Вне Европы заметная группа ученых-математиков сформировалась только в Соединенных Штатах Америки. В Европе первое место по числу активно работающих ученых занимали математики Германии и Франции. На подъеме была итальянская математика. В России на пике творческой деятельности находились математики чебышевской школы. В Англии, после смерти Кэли и Сильвестра, в математике не появились такие же блестящие ученые. В целом «география» математики соответствовала степени индустриализации страны.

Возникла необходимость создания международной организации. Первая попытка была предпринята в 1893 г., когда в Чикаго проводилась международная выставка. В ее программу включили научные конгрессы и конференции. В их числе был и математический конгресс, но на нем, кроме американских ученых (около 40 человек), присутствовало всего несколько европейцев. 16 докладов немецких математиков привез Феликс Клейн, а другие европейские страны заявили о трех докладах французских и одном докладе итальянских математиков. Всего было представлено 39 докладов, ровно треть из них – американскими учеными.

Клейн был также одним из инициаторов издания «Энциклопедии математических наук», печатавшейся на немецком языке в 1898–1904 гг. Первые три тома были отведены чистой математике, следующие три – механике,

математической физике, астрономии, геодезии, геофизике. Среди авторов статей, кроме немецких математиков, были ученые из Австрии, Америки, Англии, Бельгии, Голландии, Норвегии, России, Франции, Швеции. С 1904 г. была переиздана эта же энциклопедия на французском языке, причем каждая статья дополнялась или полностью перерабатывалась.

Первый Международный конгресс математиков

С 9 по 11 августа 1897 г. в Цюрихе по инициативе Георга Кантора состоялся Первый (I) Международный конгресс математиков, собравший 208 участников. В оргкомитет конгресса входили Феликс Клейн, Андрей Андреевич Марков, Анри Пуанкаре. В центре внимания находились следующие разделы математики: теория множеств (доклад Г. Кантора, Германия), теория аналитических функций (доклад А. Гурвица, Швейцария), функциональный анализ (доклад В. Вольтерры, Италия), математическая логика (доклад Дж. Пеано, Италия), связь между чистым анализом и математической физикой (доклад А. Пуанкаре, Франция), новая геометрия, теория функций комплексного переменного и теория групп (доклад Ф. Клейна, Германия). С докладами выступили также Жак Адамар, Эмиль Пикар и другие известные математики. По мнению Гильберта, наибольшее впечатление произвели доклады Гурвица и Пуанкаре.

Участник Конгресса профессор Московского университета Н.В. Бугаев (отец поэта Андрея Белого) читал на конгрессе произведения сына.

Второй Международный конгресс математиков

Состоявшийся на рубеже XIX и XX вв. Второй (II) Международный конгресс математиков имел для науки колоссальное значение, поэтому заслуживает более подробного рассмотрения. Проходил Конгресс с 6 по 12 августа 1900 г. в Париже. В то время в столице Франции проходила Всемирная выставка, и участникам конгресса было предоставлено право бесплатного посещения этой выставки.

Количественный состав делегаций был следующим: Франция – 90 человек, Германия – 25, США – 17, Италия – 15, Бельгия – 13, Россия – 9, Австрия – 8, Швейцария – 8, Англия – 7, Швеция – 7, Дания – 4, Голландия – 3, Испания – 3, Румыния – 3, Сербия – 2, Португалия – 2, Южная Америка – 4, по одному человеку от Турции, Греции, Норвегии, Канады, Японии и Мексики. Всего – 226 участников.

Председателем был Анри Пуанкаре, почетным председателем – Шарль Эрмит (фактически отсутствовал).

Во время проведения Конгресса работало шесть секций:

1) арифметики, алгебры (председатель Давид Гильберт);
2) анализа (председатель Поль Пенлеве);
3) геометрии (председатель Жан Дарбу);
4) механики и математической физики (председатель Джозеф Лармор);
5) истории и библиографии математики (председатель принц Роланд Бонапарт);
6) преподавания и методологии математики (председатель Мориц Кантор).

В день открытия Конгресса на пленарном заседании состоялись два часовых доклада: М. Кантора «Об историографии математики» и В. Вольтерры о научной деятельности итальянских математиков Э. Бетти, Ф. Бриоски и Ф. Казорати. Затем начались секционные заседания, на которых было сделано 46 сообщений [63].

На совместном заседании 5-й и 6-й секций 8 августа 38-летний Давид Гильберт выступил с докладом «Математические проблемы».

Доклад Гильберта «Математические проблемы»

Доклад Гильберта – уникальное явление в истории математики и математической литературе. В нем сила математической мысли соединялась с широтой и разносторонностью анализа состояния математики. Гильберт делал упор на то, что математика едина, различные ее части находятся в постоянном взаимодействии и между собой, и с естественными науками. В этом – ключ к пониманию самой сущности математики и лучшее средство против дробления ее на отдельные, не связанные друг с другом части.

Во время выступления в целях экономии времени Гильберт озвучил только десять проблем. При публикации доклада, когда число проблем было увеличено до двадцати трех, эти десять проблем стали иметь другие порядковые номера. В докладе Гильберт разбил их на три группы. К первой группе он отнес проблемы оснований математики: 1-я, 2-я и 6-я проблемы Гильберта. Четыре проблемы (7-я, 8-я, 13-я и 16-я) взяты из арифметики и алгебры (вторая группа). К теории функций относятся 19-я, 21-я и 22-я проблемы (третья группа). Гильберт назвал эти десять проблем образцами, демонстрирующими богатство, широту и многообразие математической науки.

Чтение доклада началось с общей части, в которой не только говорится о значении для математики «хорошо поставленной» проблемы, но и высказываются суждения о математической строгости.

Далее Гильберт говорил о том, что каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону как бесплодные, чтобы заменить их новыми, что всякая научная область жизнеспособна, пока в ней есть избыток новых проблем. По мнению ученого, математическая проблема должна быть настолько трудной, чтобы привлекать исследователя, и в то же время не совсем недоступной, чтобы не делать безнадежными все усилия.

Гильберт считал, что решение должно быть таким, чтобы можно было убедиться в правильности ответа с помощью конечного числа предпосылок, которые кладутся в основу каждой задачи и которые должны быть в каждом случае точно сформулированы. Это требование логической дедукции с помощью конечного числа заключений есть не что иное, как требование строгости проведенных доказательств.

Причины неудач при решении проблем, по мнению Гилберта, часто заключаются в том, что человек не овладел в достаточной мере общей точкой зрения, с позиции которой рассматриваемая проблема представляется лишь отдельным звеном в цепи родственных проблем. После отыскания этой точки зрения разрешимой становится как рассматриваемая проблема, так и дру-

гие родственные ей проблемы. Каждая определенная математическая проблема должна быть доступна общему решению в том смысле, что удается получить ответ на поставленный вопрос, или же в том смысле, что будет установлена невозможность ее решения и вместе с тем доказана неизбежность неудачи всех попыток ее решить [63].

Гильберт с поражающей силой убеждения высказал основной тезис своего доклада, аксиому о разрешимости (в широком смысле) всякой математической задачи – тезис о неограниченном могуществе человеческого познания.

Далее речь шла о постановке самих проблем. По своему характеру они очень разнородны. Иногда это конкретно поставленный вопрос, на который должен быть дан однозначный утвердительный или отрицательный ответ. Иногда проблема в действительности содержит различные, тесно связанные между собой задачи. Сейчас, когда прошло более ста лет с момента оглашения Гильбертом математических проблем, можно сказать, что они были поставлены хорошо и оказались подходящим объектом для того, чтобы сосредоточить творческие усилия математиков различных научных направлений и школ. Проблемы начинаются с теории множеств (континуум-проблема) и обоснования математики, далее переходят к основаниям геометрии, теории непрерывных групп, к теории чисел, алгебре и алгебраической геометрии и заканчиваются анализом. В табл. 1 отражено состояние проблем, сформулированных Гильбертом, на момент написания книги.

Таблица 1. Проблемы, сформулированные Гильбертом

№	Название, данное Гильбертом	Состояние проблемы
1	Проблема Кантора о мощности континуума	В 1963 г. П. Коэн показал, что проблема неразрешима: гипотезу Кантора можно взять за аксиому, а можно взять за аксиому ее отрицание
2	Непротиворечивость арифметических аксиом	В 1931 г. К. Гёдель доказал неразрешимость проблемы
3	Равенство объемов двух тетраэдров с равновеликими основаниями и равными высотами	Доказана учеником Гильберта 22-летним М. Деном в 1900 г.
4	Проблема о прямой как о кратчайшем соединении двух точек	Доказана Г. Гамелем в 1901 г.
5	Понятие непрерывной группы преобразований Ли, без предположения дифференцируемости функций, определяющих группу[1]	Частично доказана в 1933 г. Дж. фон Нейманом и в 1934 г. Л.С. Понтрягиным. Окончательно доказана в 1952 г. Г. Глисоном, Д. Монтгомери, Л. Циппином
6	Математическое изложение аксиом физики	Аксиомы теории вероятностей сформулированы в 1933 г. А.Н. Колмогоровым, аксиом физики нет до сих пор

Продолжение табл. 1

№	Название, данное Гильбертом	Состояние проблемы
7	Иррациональность и трансцендентность некоторых чисел	Доказана А.О. Гельфондом в 1934 г.
8	Проблема простых чисел	Не решена
9	Доказательство наиболее общего закона взаимности в любом числовом поле	Решена И.Р. Шафаревичем в 1948 г.
10	Задача о разрешимости диофантова уравнения	В 1970 г. Ю. Матиясевич доказал неразрешимость проблемы
11	Квадратичные формы с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами	Решена Г. Хассе в 1923 г.
12	Распространение теоремы Кронекера об абелевых полях на произвольную алгебраическую область рациональности	Окончательное решение в работах Г. Шимуры и Ю. Таниямы в 1955 г.
13	Невозможность решения общего уравнения седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух аргументов	А.Н. Колмогоров и В.И. Арнольд в 1956–1957 гг. доказали ошибочность гипотезы Гильберта
14	Доказательство конечности некоторой полной системы функций	В 1956 г. М. Нагата доказал, что гипотеза не верна
15	Строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта	Обоснование всей теории алгебраических многообразий осуществляли: Ван-дер-Варден (1930), В. Чжоу (1937), Г. Вейль (1946) и другие
16	Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей	Результатов много, полностью проблема пока не решена
17	Представление определенных форм в виде суммы квадратов	Проблему решил в 1927 г. Э. Артин
18	Построение пространства из конгруэнтных многогранников	Первая задача проблемы решена Л. Бибербахом в 1910 г., на вторую задачу отрицательный ответ дал К. Рейнгардт в 1928 г., для шаров задача не решена
19	Являются ли решения регулярной вариационной задачи необходимо аналитическими?	Результаты по 19-й и 20-й проблемам сомкнулись. Результаты по ним получены в 1903 г. С.Н. Бернштейном, в 1940 г. И.Г. Петровским
20	Общая задача о граничных условиях	

Окончание табл. 1

№	Название, данное Гильбертом	Состояние проблемы
21	Доказательство существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии	В 1908 г. И. Племель решил проблему, в 1913 г. Г. Биркгоф получил результат другим методом
22	Униформизация аналитических зависимостей с помощью автоморфных функций	Для двух переменных проблему решили в 1907 г. А. Пуанкаре и П. Кёбе
23	Развитие методов вариационного исчисления	Развитие методов вариационного исчисления привело к созданию функционального анализа и теории оптимального управления

[1] С развитием теории топологических групп и теории групп Ли отношение математиков к трактовке 5-й проблемы Гильберта изменилось. Традиционной стала следующая формулировка: является ли группой Ли любая локально евклидова топологическая группа (при подходящем выборе локальных координат)? [63].

Международные математические конгрессы в XX и XXI вв.

До Первой мировой войны конгрессы проводились каждые четыре года.

На III Международном конгрессе, состоявшемся в Гейдельберге в 1904 г., была организована специальная секция истории математики. В пленарных докладах (их было четыре, как в Париже) историческая тема была одной из центральных. Математик А.Дж. Гринхил сделал доклад на тему «Математическая теория гироскопа в историческом аспекте». Выдающийся немецкий алгебраист Г. Вебер, открывая конгресс, сказал: «Вряд ли было такое время, когда философская сторона нашей науки, вопрос о последних основах наших математических убеждений вызывал бы столь общий интерес, как сейчас». Д. Гильберт выступил с докладом, в котором убеждал математиков избавиться от парадоксов, только что открытых в теории множеств. Он настаивал на том, что само понятие целого числа может и должно иметь обоснование. По его мнению, само доказательство должно стать объектом математического исследования.

На IV Международном конгрессе в Риме в 1908 г. А. Пуанкаре выступил с докладом на тему «Будущее математики». Он намечал не столько конкретные задачи, как Гильберт в 1900 г., сколько общие, стоящие перед различными математическими дисциплинами, и пытался спрогнозировать пути их дальнейшего развития.

На V Международном конгрессе, состоявшемся в Кембридже в 1912 г., один из пленарных докладов был сделан итальянским ученым Ф. Энрикесом на тему «Значение критики основ в развитии математики». Из восьми докладов только три были собственно математическими (доклады А. Бореля,

С. Бохнера и Э. Ландау). Эдмунд Ландау сформулировал четыре проблемы по теории чисел, которые необходимо решить математикам. Ни одна из этих проблем до сих пор не решена.

Первая мировая война надолго прервала нормальное течение научной жизни. Некоторые международные работы не удалось возобновить и после войны: осталось незаконченным французское издание математической энциклопедии, не состоялся назначенный на 1916 г. международный математический конгресс. В 1919 г. был основан Международный математический союз, членами которого стали только математики стран-победительниц. На Международный математический конгресс в Страсбурге, созванный Союзом в 1920 г., немецкие ученые даже не были приглашены. Если на конгрессе в Кембридже в 1912 г. присутствовали 600 математиков, то в Страсбурге их было около 200. Следующий Международный математический конгресс состоялся в 1924 г. в канадском городе Торонто. Немецкие математики отказались признавать те международные математические конгрессы, в работе которых они не принимали участия, поэтому конгрессы перестали нумеровать и стали различать по году проведения.

Важной вехой в истории мирового математического сообщества стал конгресс 1928 г. в Болонье. Приглашение получили все немецкие математические школы и математические организации. Многие в Германии отказались принять приглашение. Их вдохновителем был профессор Берлинского университета Людвиг Бибербах. Кстати, позже он активно сотрудничал с нацистами. Бибербаха поддержал голландец Брауэр, который был ярым немецким националистом. Против такой позиции активно выступил Гильберт, возглавивший немецкую делегацию из 67 человек. На церемонии открытия конгресса он сказал: «Давайте считать, что мы, математики, стоим на высочайшей вершине развития точных наук. Мы не должны забывать про это место, потому что любые рамки, в особенности национального характера, противоречат духу математики. Только абсолютно не понимая нашей науки, можно создавать различие между людьми и расами, а причины, по которым это делалось, являются крайне ничтожными. Математика не знает рас… Для математики весь культурный мир представляет собой единую страну» [66].

В работе конгресса активное участие принимала делегация советских математиков. Костяк ее составляли молодые члены «Лузитании»: П.С. Александров, А.Я. Хинчин, М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник, Н.К. Бари и другие.

Затем конгрессы проходили в Цюрихе (1932), Осло (1936). На конгрессе в Цюрихе приняли решение о ликвидации Международного математического союза. Была образована комиссия по созданию новой международной организации математиков. К конгрессу в Осло эта комиссия не смогла выработать приемлемых предложений.

В период между Первой и Второй мировыми войнами важными событиями в международной математической жизни становятся региональные математические съезды ученых из скандинавских и славянских стран. Не меньшее значение имели всесоюзные математические съезды: первый (Харьков, 1930) и второй (Ленинград, 1936). Новым явлением были международ-

ные конференции по отдельным областям и проблемам математики. Одними из первых конференций такого рода были московские: в 1934 г. по тензорной и многомерной геометрии и в 1935 г. по топологии.

По причине Второй мировой войны очередного конгресса пришлось ждать до 1950 г. И вновь он собрался вне Европы – в США, в Гарварде. В работе этого конгресса математики социалистических стран не участвовали. По приказу Сталина в противовес ему был организован Первый Венгерский Международный конгресс в Будапеште. В 1950 г. возобновил свою деятельность и Международный математический союз. С тех пор конгрессы собираются регулярно – раз в четыре года. В гл. 3 рассказано о наградах математиков, лауреатах премии и медали Филдса, годах и местах проведения конгрессов.

С 1 по 28 августа 1966 г. Международный математический конгресс проходил в Москве. Число его участников из 54 стран превысило 5000 человек, а число прочитанных докладов и сообщений – 2000. Из 15 докладов продолжительностью в один час 5 прочитали советские ученые: И.М. Виноградов и А.Г. Постников – «О развитии за последние годы аналитической теории чисел», Н.В. Ефимов – «Гиперболические задачи теории поверхностей», М.Г. Крейн – «Аналитические проблемы и результаты в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве», А.И. Мальцев – «О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики», И.И. Пятецкий-Шапиро – «Автоморфные функции и арифметические группы». Из 67 получасовых докладов советскими учеными было прочитано 26 [40].

Более 4000 участников присутствовало на Международном конгрессе математиков в Мадриде, состоявшемся в августе 2006 г. Последний конгресс прошел в августе 2010 г. в индийском городе Хайдарабаде.

Организационные вопросы проведения современных конгрессов подробно описаны В.И. Арнольдом в [10]. Организатором конгрессов является Международный математический союз, в который входили (2009) 72 национальные математические организации. Генеральная ассамблея собирается перед началом каждого такого форума в городе, расположенном недалеко от места проведения очередного конгресса.

Генеральная ассамблея – это своего рода Организация Объединенных Наций математиков, в которой каждая страна представлена определенным числом делегатов. Первоначально считалось, что число делегатов приблизительно соответствует числу математиков мирового класса в стране. Поэтому все страны были поделены на категории – от первой до пятой. В пятую (высшую) до недавнего времени входили США, Россия, Франция, Англия, Германия, Япония и Китай (причем все три китайских математических общества, представляющие КНР, Тайвань и Гонконг, выступают здесь совместно). В самое последнее время к ним присоединились Италия, Канада и Израиля.

Страны пятой категории имеют в ассамблее по пять голосов, но и платят больший членский взнос, чем другие страны. Размеры членских взносов стран не пропорциональны номеру категории, а растут, как числа Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8.

Генеральная ассамблея выбирает Исполнительный комитет из 10 человек. Собираясь один раз в год, они осуществляют текущее руководство подготовкой к предстоящему конгрессу.

Исполнительный комитет союза выбирает Программный комитет, членство в котором до открытия конгресса является секретным.

Программный комитет определяет научное содержание предстоящего конгресса. Основную его часть составляют доклады по приглашению – пленарные (продолжительность 60 мин) и секционные (продолжительность 45 мин). Чтение пленарных докладов (около 20) проходит утром в залах, рассчитанных на несколько тысяч слушателей. Причем в это время на конгрессе не бывает параллельных чтений. В отличие от пленарных, секционные доклады проходят в нескольких секциях одновременно, в меньших аудиториях. Количество секций на конгрессах различно, обычно их около 20. Перечень секций примерно таков:

1. Математическая логика и основания математики.
2. Теория чисел.
3. Геометрия.
4. Топология.
5. Алгебра.
6. Алгебраическая геометрия.
7. Комплексный анализ.
8. Группы Ли и теория представлений.
9. Вещественный и функциональный анализ.
10. Теория вероятностей и математическая статистика.
11. Дифференциальные уравнения с частными производными.
12. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
13. Математическая физика.
14. Численные методы и теория вычислений.
15. Дискретная математика и комбинаторика.
16. Математические аспекты информатики.
17. Приложения математики к нефизическим наукам.
18. История математики.
19. Математическое образование.

Отбор докладчиков для секций конгресса производится «панелями» из полдюжины специалистов, назначенных Программным комитетом. «Панель» должна отобрать примерно 10 лучших из 20–30 кандидатов в каждой области. Строгие правила предписывают, что пленарный доклад можно сделать лишь один раз в жизни, а секционные – только на двух не следующих друг за другом конгрессах (т. е. с интервалом в 8 лет и более). Несмотря на эти ограничения, борьба за места приглашенных докладчиков, особенно пленарных, чрезвычайно ожесточенная.

Наряду с Программным комитетом, Исполком союза создает Филдсовский комитет, который присуждает премию и медаль Филдса. Его состав, как и состав Программного комитета, держится в секрете до открытия конгресса.

На долю советских математиков на нескольких конгрессах приходилось до 50 из 150–170 секционных докладов и до 4 из 15–17 пленарных. На Меж-

дународном математическом конгрессе в Киото в 1990 г. было четыре советских приглашенных пленарных докладчика, в Цюрихе в 1994 г. – три. В 1998 г. в Берлине от России был представлен только один секционный доклад [10].

В XXI в. положение постепенно начинает меняться. На Международном математическом конгрессе в Мадриде в 2006 г. премии и медали Филдса присуждены Г.Я. Перельману и А.Ю. Окунькову, а В.А. Васильев переизбран на второй четырехлетний срок в Исполнительный комитет Международного математического союза, присуждающего премию и медаль Филдса.

В 2010 г. на Международном математическом конгрессе в Хайдарабаде от России были представлены один пленарный и три секционных доклада. Медалью Филдса был награжден российский ученый С.К. Смирнов.

Нерешенные (открытые) математические проблемы

В научном мире популярна практика составления известными учеными или организациями списков нерешенных проблем, актуальных на текущий момент. До сих пор существует много открытых вопросов относительно простых чисел, четыре наиболее известных из которых были перечислены немецким математиком Эдмундом Ландау на V Международном математическом конгрессе в 1912 г.:

1. Проблема Гольдбаха: каждое нечетное число, большее 2, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел, а каждое нечетное число, большее 5, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел;

2. Бесконечно ли множество «простых близнецов» – простых чисел, разность между которыми равна 2?

3. Гипотеза Лежандра: верно ли, что между n^2 и $(n + 1)^2$ всегда найдется простое число?

4. Бесконечно ли множество простых чисел вида $n^2 + 1$?

Ни одна из этих задач пока не решена.

По примеру Гильберта в конце прошлого века ученые и целые организации пытались сформулировать стратегические задачи математики на XXI в. В 1998 г. на средства американского миллиардера Лэндона Клэя в Кембридже (Массачусетс, США) был основан математический институт Клэя и установлены премии за решение ряда важнейших проблем современной математики. В 2000 г. Американское математическое общество провело конференцию «Важнейшие математические проблемы XXI века», куда были приглашены 30 всемирноизвестных ученых.

Л. Клэй выделил на премии семь миллионов долларов. 24 мая 2000 г. были сформулированы семь проблем, список которых получил название «Millenium Prize Problems». Две из них сформулированы еще в XIX в., но до сих пор не решены, остальные пять – в XX в.

По правилам Научного консультативного совета института решение проблемы должно быть опубликовано в специализированном журнале, имеющем международную признание. Кроме того, решение о выдаче приза принимает математическое сообщество: доказательство не должно быть опровергнуто

в течение двух лет после публикации. Проверкой каждого доказательства занимаются математики в разных странах мира. Через два года создается специальный комитет, в который должны войти, как минимум, один представитель Института Клэя и два незаинтересованных эксперта. Не исключена ситуация, когда приз делится между несколькими учеными, решившими задачу в группе или по отдельности. Если в течение отведенного срока кто-то опровергнет соискателя, то оппонент тоже получит часть суммы. Перечислим эти проблемы.

1. ***Проблема Кука (равенство классов P и NP)***. Проблему сформулировал в 1971 г. американский ученый в области теории вычислительных систем Стивен Артур Кук следующим образом: может ли проверка правильности решения задачи быть более длительной, чем само получение решения, независимо от его алгоритма. Проблема равенства классов *P* и *NP* состоит в следующем: если положительный ответ на какой-то вопрос можно быстро проверить, то правда ли, что ответ на этот вопрос можно быстро найти? Проще говоря, действительно ли задачу легче проверить, чем решить?

Эта проблема остается также нерешенной в логике и информатике. Ее разрешение могло бы кардинально изменить основы криптографии, используемой при передаче и хранении данных. В августе 2010 г. индийский математик Винэй Деолаликар представил 100-страничную статью, в которой сделан вывод, что классы сложности *P* и *NP* не равны. Однако другими математиками доказательство не было признано корректным.

2. ***Гипотеза Римана***. В 1859 г. Георг Фридрих Бернхард Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих заданное число, выражается через распределение нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Он сформулировал гипотезу о том, что все нетривиальные нули дзета-функции лежат на прямой линии. За полтора столетия гипотеза не доказана и не опровергнута. Она является частью восьмой проблемы Гильберта. В настоящее время считается, что в окрестности любого целого числа среднее расстояние между последовательными простыми числами пропорционально логарифму этого числа. В то же время известны парные простые числа (числа-близнецы), разность между которыми равна двум: 11 и 13, 29 и 31, 59 и 61 и т. д. Иногда простые числа образуют целые скопления близко стоящих чисел, например: 97, 101, 103, 107, 109, 113. Имеются догадки, что такие скопления существуют и в области очень больших простых чисел. Если это так, то стойкость криптографических ключей, используемых в настоящее время, может оказаться под сомнением. Простые числа играют большую роль в криптографии и интересуют не только математиков, но и военных, разведку, контрразведку. Если гипотеза Римана будет доказана, то это приведет к изменению наших знаний в области криптографии и прорыву в области безопасности Интернета. В настоящее время в гипотезу Римана верят большинство математиков.

3. ***Гипотеза Бёрча и Свиннертон-Дайера***. В 1960 г. Брайан Бёрч и Питер Свиннертон-Дайер сформулировали гипотезу относительно рациональных точек алгебраических многообразий, т. е. относительно рациональных решений полиномиальных уравнений.

В 1970 г. Ю.В. Матиясевич доказал, что 10-я проблема Гильберта не имеет положительного решения, т. е. не существует никакого алгоритма, с помощью которого можно было бы узнать, разрешимо уравнение в целых числах или нет. Но в частном случае при образовании абелева многообразия решений, по предположению Бёрча и Свиннертона-Дайера, можно узнать, когда имеется конечное, а когда бесконечное число решений.

Важнейшей характеристикой полиномиальных уравнений с двумя переменными является род. Популярно выражаясь, род ориентируемой поверхности – это количество замкнутых кривых, по которым ее можно разрезать так, чтобы она не распалась на отдельные части. Сферу или плоскость так разрезать нельзя, поэтому у них род равен нулю. Тор можно разрезать один раз, следовательно, его род равен единице. Все ориентируемые поверхности похожи на сферу «с ручками»: сколько у сферы «ручек», столько разрезов можно сделать, таков род поверхности. Кривые рода один – это эллиптические кривые, их и рассматривали Бёрч и Свиннертон-Дайер. Пока математики не умеют находить рациональные точки алгебраических многообразий, а доказательство гипотезы Бёрча – Свиннертон-Дайера могло бы дать ученым новые методы к их поиску.

4. *Гипотеза Ходжа*. Одним из эффективных методов исследования формы сложных объектов является метод аппроксимации, когда приближение к данному объекту получают склеиванием вместе более простых тел. Этот эффективный метод не имеет четкого геометрического обоснования, так как в некоторых случаях к модели объекта необходимо добавлять части, не имеющие никакого геометрического истолкования. В 1941 г. шотландский математик Вильям Ходж выдвинул гипотезу о том, что для проективных алгебраических многообразий циклы Ходжа являются комбинациями объектов, имеющих геометрическую интерпретацию.

В алгебраической геометрии одними из простейших инвариантов являются размерность и связность рассматриваемого множества. По равенству двух инвариантов ничего нельзя заключить о равенстве исходных объектов. Но иногда бывает, что избранный набор инвариантов однозначно определяет исходный объект. Если гипотеза Ходжа верна, то изучение большого сложного класса алгебраических многообразий сведется к изучению гораздо более простых объектов.

Для ряда частных случаев гипотеза Ходжа доказана. В целом в ее справедливости в последнее время многие математики стали сомневаться, но контрпримеров построить пока никому не удалось.

5. *Уравнения Навье – Стокса*. В 1822 г. французский физик Луи Навье и британский математик Джордж Стокс составили систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение вязкой жидкости. Эти уравнения применяются в математическом моделировании многих природных явлений, например в турбулентности. Одним из параметров уравнений является число Рейнольдса. Когда оно достигает некоторого критического значения, аналитическое точное решение для потока становится хаотичным, т. е. имеет место исключительная чувствительность к изменению коэффициентов уравнения.

Аналитические решения уравнений Навье – Стокса до сих пор найдены лишь в частных случаях. В остальных случаях используется численное моделирование. За решение уравнений в общем виде, кроме премии Клэя в миллион долларов, назначены также премии ряда коммерческих фирм, в том числе компании «Боинг».

Вариации уравнений Навье – Стокса используются для описания движения воздушных масс атмосферы при составлении прогнозов погоды. Ими описываются течения в мантии Земли.

В единственность решения уравнений Навье – Стокса верят многие математики.

6. *Гипотеза Пуанкаре*. Единственной решенной математической проблемой тысячелетия в настоящее время считается гипотеза Пуанкаре. В 2006 г. за ее решение Г.Я. Перельману была присуждена медаль Филдса, от получения которой ученый отказался.

Гипотеза Пуанкаре была сформулирована в 1904 г. Подробнее об этом рассказано в ч. IV.

7. *Уравнения Янга – Миллса*. До второй половины XX в. существующего математического аппарата хватало для описания новых физических теорий. В середине XX столетия положение изменилось. Физики требуют от математиков теорию, которая описала бы накопленные ими идеи и соотношения, а математика пока не может дать подходящего аппарата. Требуется математический язык, позволяющий описывать все четыре физических взаимодействия. В 1954 г. китайско-американский физик Чжэньнин Янг и американский физик Роберт Миллс опубликовали небольшую статью, которая легла в основу квантовой теории поля. В статье содержались уравнения, связывающие геометрию с физикой элементарных частиц. Таким образом, был найден путь к объединению теорий электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий. Из уравнений Янга – Миллса следовало существование частиц, которые действительно наблюдались в экспериментах, поэтому калибровочная теория Янга – Миллса принята большинством физиков. Требуется дальнейшее развитие математического аппарата для теоретической физики.

Отношение математиков к «Millenium Prize Problems» различное. Во-первых, многие сомневаются, что решение конкретных задач более важно, чем открытие новых областей и связей между ними, постановка новых проблем, разработка и совершенствование математического аппарата. Во-вторых, подобный способ привлечения внимания к математике ущербный и неприемлемый. Он не популяризирует науку, а просто вызывает недоумение или исключительно материальный интерес.

Свой перечень из 18 проблем представил в 2000 г. американский математик Стивен Смейл. Он составил этот список по просьбе В.И. Арнольда, занимавшего тогда пост президента Международного математического союза. К 2010 г. две из них решены полностью и одна – частично.

Глава 3

ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ НАГРАДЫ МАТЕМАТИКОВ

> Любая премия – это отчасти номенклатурное решение, принимаемое в результате борьбы различных научных фракций... Победа, как и решение задачи, меняет человека. Он уже становится другим.
>
> *Ф.А. Богомолов*

Международные награды по математике

Лауреат Нобелевской премии по физике Юджин Вигнер сказал, что великий математик полностью владеет всем арсеналом допустимых приемов мышления и, действуя подчас весьма рискованно, балансирует на самой грани допустимого. Труд ученого-математика приносит величайшее удовлетворение, но, как и любой человек, ищущий истину, математик нуждается в моральной, а часто и в материальной поддержке. Одна из форм такой поддержки – медали и премии за выдающиеся результаты.

К сожалению, Нобелевскую премию по математике не присуждают. Существуют публикации, посвященные выяснению причин того, почему математика не была включена в завещание Нобеля. Наиболее популярным является следующее объяснение. Альфред Нобель не мог допустить, чтобы премию его имени имел возможность получить известный шведский математик Магнус Миттаг-Лёффлер. Ведь за того вышла замуж красавица Сигне Юлия Эмилия, к которой сватался Нобель. Он вычеркнул из своего завещания премии за работы по математике. Однако такая версия всего лишь привлекательна для общественности и не подкреплена достоверными фактами. Кстати, в России благодарны Миттаг-Лёффлеру за привлечение Софьи Ковалевской к работе на кафедре Стокгольмского университета. Миттаг-Лёффлер и его жена все свое имущество завещали организованному ими Математическому институту, существующему и в настоящее время.

Правда, иногда математики получают Нобелевские премии, но за выдающийся вклад в развитие других наук. Так в 1950 г. Бертран Рассел получил Нобелевскую премию по литературе, в 1975 г. Л.В. Канторович и в 1994 г. Джон Нэш-мл. – по экономике.

Существовала учрежденная Венгерской академией наук математическая премия им. Яноша Больяй. Но она была присуждена всего дважды выдающимся математикам: в 1905 г. Анри Пуанкаре, в 1910 г. – Давиду Гильберту. По причине Первой мировой войны эта премия больше не присуждалась.

Математиков часто награждают орденами и медалями, их избирают в национальные академии и академии иностранных государств. Но есть награды, которые математикам присуждают… математики. Особенно престижны международные награды. Пожалуй, самой желанной для математиков является медаль Филдса.

Медаль Филдса. Учредитель медали Джон Чарльз Филдс родился в 1863 г. в Канаде. Окончил университет в Торонто. Долгое время жил в Европе. При активном участии Филдса в 1924 г. состоялся Международный математический конгресс в Торонто. На этом конгрессе Филдс выступил с большим обзорным докладом по теории идеалов и внес предложение учредить международную премию и медаль по математике. Филдс умер в 1932 г. В своем завещании он сформулировал статут новой премии и увеличил предназначенный для награждения фонд. Вместе с медалью стали вручать премию. Первоначально ее размер составлял 1500 канадских долл. С 1966 г., благодаря анонимному вкладу в филдсовский фонд, число присуждаемых на каждом конгрессе медалей могло быть увеличено до четырех, и размер премии сейчас составляет 15 000 канадских долл.

Впервые эта награда была вручена на Международном конгрессе в Осло в 1936 г. Филдсовская медаль изготовляется из золота (14 карат). На лицевой стороне медали имеется приписываемая Архимеду следующая надпись на латыни: «Transire suum pectus mundoque poltri» («Превзойти свою человеческую ограниченность и покорить Вселенную») и изображение Архимеда. А на обороте: «Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere» («Математики, собравшиеся со всего света, чествуют замечательный вклад в познания»). С тех пор на каждом международном конгрессе медаль Филдса присуждают самым выдающимся молодым математикам. На медали выгравированы только фамилия лауреата и год присуждения премии. Хотя на медали нет никакого упоминания о Филдсе, эту награду называют его именем. Филдсовская премия задумана как «чисто международная и, насколько это возможно, беспристрастная». Сумма денежной премии относительно невелика, важен ее престиж. Она присуждается раз в четыре года двум математикам не старше сорока лет, и предназначена не только для того, чтобы отдать дань выдающимся ученым в связи с их прежними заслугами, но и для стимулирования будущих исследований.

Филдсовская премия не является аналогом Нобелевской премии. Между ними существуют, по крайней мере, четыре важнейших отличия. Нобелевская премия присуждается ежегодно, медаль Филдса – раз в четыре года, но награждают одновременно до четырех математиков. При присуждении Нобелевской премии возрастных ограничений для лауреата не существует. Она может быть вручена за дела давно минувших дней, а филдсовскую награду математик может получить только за открытие, сделанное после вручения предыдущей медали Филдса. Наконец, хотя вручение медали и сопровождается денежной премией, ее сумма в несколько десятков раз меньше Нобелевской премии.

Ниже приведена таблица лауреатов медали Филдса (табл. 2).

Таблица 2. Лауреаты медали Филдса

Место и год проведения конгресса	Краткие сведения о лауреате	Основные научные интересы лауреата
Осло 1936	Альфорс Ларс Валериан (1907–1996) – финский математик, профессор Гарвардского университета (США) Дуглас Джессе (1897–1965) – американский математик. Работал в Нью-Йорке и Массачусетском технологическом институте	Работы по теории конформных и квазиконформных отображений Вариационное исчисление (обобщенная задача Плато)
Гарвард 1950	Шварц Лоран (1915–2002) – французский математик, профессор Парижского университета Сельберг Атле (1917–2007) – норвежский математик, профессор университета в Осло	Теория обобщенных функций, топология, гармонический и функциональный анализ, математическая физика Теория чисел и математический анализ
Амстердам 1954	Кодаира Кунихико (1915–1997) – японский математик, профессор Токийского университета. В 1949–1961 гг. работал в Принстоне (США) Серр Жан-Пьер (р. 1926) – французский математик, профессор Коллеж де Франс	Спектральная теория самосопряженных операторов, алгебраическая и дифференциальная геометрия, теория комплексных многообразий Алгебра, алгебраическая геометрия, топология многообразий
Эдинбург 1958	Рот Клаус Фридрих (1925–2002) – британский математик, профессор Лондонского университета Том Рене Фредерик (р. 1923) – французский математик, профессор Страсбургского университета	Теория чисел (проблема Туэ – Зигеля – Рота) Алгебраическая и дифференциальная топология, теория катастроф
Стокгольм 1962	Хёрмандер Ларс (р. 1935) – шведский математик, профессор Стокгольмского, Станфордского (США) и Лундского университетов Милнор Джон Уиллард (р. 1931) – американский математик, профессор Принстонского университета	Общая теория дифференциальных операторов и уравнений с частными производными Алгебраическая и дифференциальная топология
Москва 1966	Атья Майкл Фрэнсис (р. 1929) – английский математик арабского происхождения. В 1957–1969 гг. – профессор Оксфордского университета, с 1969 г. – в Институте перспективных исследований в Принстоне (США)	Труды на стыке алгебраической топологии и теории дифференциальных уравнений

Продолжение табл. 2

Место и год проведения конгресса	Краткие сведения о лауреате	Основные научные интересы лауреата
Москва 1966	Коэн Пол Джозеф (1934–2007) – американский математик, профессор Стэнфордского университета	Основания математики, теория множеств, математическая логика
	Гротендик Александр (р. 1928) – французский математик, профессор Парижского университета	Топология, гомологическая алгебра, алгебраическая геометрия
	Смейл Стивен (р. 1930) – американский математик, работал во многих университетах США	Топология и теория дифференциальных уравнений
Ницца 1970	Бейкер Алан (р. 1939) – британский математик, профессор Кембриджского университета	Теория трансцендентных чисел, диофантова геометрия
	Хиронака Хейсуке (р. 1931) – американский математик, профессор Гарвардского университета	Алгебраическая геометрия
	Новиков Сергей Петрович (р. 1938) – российский математик, старший научный сотрудник Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау, профессор университета в Мэриленде (США)	Геометрия, топология, теория солитонов, теория относительности
	Томпсон Джон Григс (р. 1932) – американский математик, член Национальной АН США	Теория групп
Ванкувер 1974	Бомбьери Энрико (р. 1940) – итальянский математик, профессор Пизанского университета	Теория чисел, комплексный анализ, теория дифференциальных уравнений
	Мамфорд Дэвид Брайант (р. 1937) – американский математик, профессор Гарвардского университета	Алгебраическая геометрия
Хельсинки 1978	Делинь Пьер Рене (р. 1944) – бельгийский математик, профессор Института перспективных исследований в Принстоне (США)	Алгебраическая теория чисел
	Фефферман Чарльз Луис (р. 1949) – американский математик, профессор Принстонского университета	Комплексный анализ
	Маргулис Григорий Александрович (р. 1946) – российский математик, профессор Йельского университета (США)	Теория групп Ли
	Квиллен Даниэль (1940–2011) – американский математик, профессор Массачусетского технологического института	Алгебра и алгебраическая топология

Продолжение табл. 2

Место и год проведения конгресса	Краткие сведения о лауреате	Основные научные интересы лауреата
Варшава 1983*	Конн Ален (р. 1947) – французский математик, профессор Коллеж де Франс и университета Вандербильда (США)	Функциональный анализ
	Тёрстон Уильям (р. 1946) – американский математик, профессор Корнелльского университета	Топология многообразий
	Яу Шинтан (р. 1949) – американский математик, профессор Гарвардского, Чжецзянского и Гонконгского университетов	Дифференциальные уравнения
Беркли 1986	Доналдсон Саймон Кёруан (р. 1957) – британский математик, профессор Оксфордского университета	Топология, алгебраические многообразия
	Фалтингс Герд (р. 1954) – немецкий математик, профессор Принстонского университета (США)	Диофантовы уравнения
	Фридман Майкл (р. 1951) – американский математик, профессор Калифорнийского университета	Алгебраическая топология
Киото 1990	Дринфельд Владимир Гершонович (р. 1954) – украинский математик, профессор Чикагского университета	Алгебраическая теория чисел, гипотезы Ленглендса
	Джонс Воган (р. 1952) – новозеландский математик, профессор Калифорнийского университета в Беркли (США)	Теория факторов
	Мори Сигефуми (р. 1951) – японский математик, профессор университета в Киото	Классификация комплексных многообразий
	Виттен Эдвард (р. 1951) – американский физик-теоретик, профессор Принстонского университета	Теория суперструн, *M*-теория (теория мембран)
Цюрих 1994	Бурген Жан (р. 1954) – бельгийский математик, профессор Института перспективных исследований в Принстоне (США)	Банаховы пространства, эргодическая теория, дифференциальные уравнения с частными производными
	Лионс Пьер Луи (р. 1956) – французский математик, профессор Парижского университета	Дифференциальные уравнения с частными производными
	Йоккоз Жан Кристоф – французский математик, профессор Коллеж де Франс	Теория динамических систем
	Зельманов Ефим Исаакович (р. 1955) – российский математик, профессор Калифорнийского университета в Сан-Диего (США)	Ограниченная проблема Бернсайда

Продолжение табл. 2

Место и год проведения конгресса	Краткие сведения о лауреате	Основные научные интересы лауреата
Берлин 1998	Борчердс Ричард (р. 1959) – британский математик, профессор Кембриджского университета	Теория представлений, вершинная (операторная) алгебра, квантовая теория поля
	Гоуэрс Уильям (р. 1963) – британский математик, профессор Кембриджского университета	Функциональный анализ, комбинаторика
	Концевич Максим Львович (р. 1964) – российский математик, профессор Института высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт (Франция)	Квантовая математика
	Макмуллен Кёртис (р. 1958) – американский математик, профессор Гарвардского университета	Теория динамических систем, гиперболическая геометрия, теория Тайхмюллера
	Серебряная медаль была присуждена Уайлсу Эндрю (р. 1953), профессору университета в Принстоне	Гипотеза Таниямы – Шимуры, теорема Ферма
Пекин 2002	Лаффорг Лоран (р. 1966) – французский математик, профессор Института высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт (Франция)	Алгебраическая геометрия
	Воеводский Владимир Александрович (р. 1966) – российский математик, профессор Института перспективных исследований в Принстоне (США)	Алгебраическая геометрия
Мадрид 2006	Окуньков Андрей Юрьевич (р. 1969) – российский математик, профессор Принстонского университета (США)	Теория вероятностей, теория представлений, алгебраическая геометрия
	Перельман Григорий Яковлевич (р. 1966) – российский математик (отказался от медали)	Гипотеза Пуанкаре
	Тао Теренс (р. 1975) – американский математик, профессор Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе	Теория дифференциальных уравнений, эргодическая теория, аналитическая теория чисел
	Вернер Венделин (р. 1968) – французский математик, профессор Парижского университета	Теория вероятностей, эволюция Шрамма – Лёвнера
Хайдарабад 2010	Виллани Седрик (р. 1973) – французский математик, директор института Анри Пуанкаре	Затухание волн в плазме, сходимость к равновесию в уравнении Больцмана
	Линденштраусс Элон (р. 1970) – израильский математик, профессор Принстонского университета	Эргодическая теория, теория чисел

Окончание табл. 2

Место и год проведения конгресса	Краткие сведения о лауреате	Основные научные интересы лауреата
Хайдарабад 2010	Нго Бао Чау (р. 1972) – вьетнамский математик, профессор Парижского университета VII в Орсэ	Теория автоморфных форм
	Смирнов Станислав Константинович (р. 1970) – российский математик, профессор Женевского университета	Комплексный анализ, статистическая физика

* Конгресс должен был состояться в 1982 г., но из-за введения в Польше военного положения был перенесен.

В 1936 г., когда первый раз присуждались медали Филдса, советская математическая школа была самой выдающейся в мире. Нацисты разгромили немецкую школу. Французская переживала период смены поколений. Математическая школа США только набирала обороты.

В нашей стране в 1930-е годы достигло расцвета творчество П.С. Александрова, А.О. Гельфонда, А.Н. Колмогорова, М.Г. Крейна, М.А. Лаврентьева, Л.А. Люстерника, Д.Е. Меньшова, П.С. Новикова, Л.С. Понтрягина, С.Л. Соболева, А.Я. Хинчина, Л.Г. Шнирельмана – список можно продолжать. Ни в одной другой математической школе того времени не было такого количества выдающихся ученых, каждый из которых мог бы стать лауреатом медали Филдса.

Но железный занавес уже опустился. Контакт с остальным миром был прерван до 1950 г. На конгресс в Осло были приглашены Гельфонд и Хинчин, но они не смогли поехать. Вообще заграничные командировки закончились в 1931 г. Этим в значительной мере и объясняется то, что среди лауреатов 1936 г. не было советских математиков [79].

За все время было присуждено только пятьдесят две золотые медали. В 2006 г. Г.Я. Перельман отказался от медали Филдса. Президент Международного математического союза специально прилетел в Санкт-Петербург, чтобы лично пригласить Перельмана посетить конгресс в Мадриде, запланированный на август 2006 г., и получить там медаль из рук короля Испании. Перельман остался непреклонен и на конгресс не поехал. Это был первый случай отказа от награды [81].

Проблемы и даже скандалы, сопровождавшие процедуры присуждения и вручения филдсовских медалей, возникали и раньше. С 1936 по 1950 г. не было ни конгрессов, ни присуждений. Все последующие проблемы были вызваны действиями властей СССР. Например, конгресс в Варшаве, намеченный на 1982 г., был перенесен на август 1983 г. из-за объявленного в Польше военного положения. В 1966 г. французский математик Александр Гротендик, один из крупнейших математиков XX в., в знак протеста против

политики СССР в Восточной Европе не приехал в Москву на очередной конгресс, где ему должны были вручить медаль. Церемония вручения проходила в Кремлевском дворце съездов. Вручавший медали президент Академии наук М.В. Келдыш скороговоркой огласил список лауреатов и всех сразу пригласил на сцену для получения медалей. Кто есть кто, понять из зала было невозможно [81].

В 1970 и 1978 гг. конгрессы состоялись, соответственно, в Ницце и Хельсинки. На них должны были получить свои медали два математика из СССР: в Ницце – Сергей Петрович Новиков, в Хельсинки – Григорий Александрович Маргулис. Их поездки были признаны, по советской бюрократической терминологии, «нецелесообразными», а сами они не были выпущены за пределы СССР. Маргулис был тогда кандидатом наук, и в газете «Московский комсомолец» (едва ли не единственном издании, откликнувшемся на присуждение ему высшей математической награды) появилась статья с замечательной фразой: «… и даже докторская диссертация на подходе» [81].

Владимир Игоревич Арнольд был номинирован Филдсовским комитетом на медаль Филдса в 1974 г. Окончательное решение должен был принять высший орган Международного математического союза – его Исполнительный комитет. В 1971–1974 гг. вице-президентом Исполнительного комитета был один из крупнейших советских (да и мировых) математиков академик Лев Семенович Понтрягин. Накануне своей поездки на заседание Исполкома Понтрягин пригласил Арнольда к себе домой на обед и на беседу о научных работах Арнольда. Понтрягин сообщил Арнольду, что он получил задание не допустить присуждение ему медали. В случае, если Исполком с этим не согласится и все же присудит Арнольду медаль, Понтрягин был уполномочен пригрозить отказом от поездки в Ванкувер на очередной Международный математический конгресс советской делегации, а то и выходом СССР из Международного математического союза. Чтобы суждения Понтрягина о работах Арнольда звучали убедительно, Понтрягин должен их знать очень хорошо. По словам Арнольда, задаваемые ему Понтрягиным вопросы были весьма содержательны, беседа с ним – интересна, а обед – хорош. Неизвестно, пришлось ли Понтрягину оглашать свою угрозу, но только медаль Филдса Арнольд тогда не получил – вместо намеченных трех медалей вручили две. На момент следующего присуждения медали Арнольду исполнился 41 год. В 1995 г. Арнольд уже сам стал вице-президентом Международного математического союза, и тогда он узнал, что в 1974 г. на членов Исполкома большое впечатление произвела глубина знакомства Понтрягина с работами Арнольда [81].

Эндрю Уайлс, доказавший Великую теорему Ферма, не успел до своего 40-летия получить медаль Филдса, поскольку в его доказательстве был обнаружен пробел, который он вовремя ликвидировать не успел. На следующем Международном математическом конгрессе в Берлине в 1998 г. ему была торжественно вручена специально для него изготовленная серебряная медаль.

По мнению В.И. Арнольда [10], на выбор лауреатов медали Филдса (как, вероятно, и нобелевских лауреатов) сильно влияют внешние, ненаучные сооб-

ражения. Тем не менее среди лауреатов медали Филдса слабые ученые не встречаются. Дело в том, что замечательных математиков в XX столетии было очень много, а медалей мало, и многие выдающиеся математики их так и не получили.

В 1998 г. Арнольд писал, что он составил список математиков, которые вполне могли бы быть награждены филдсовскими медалями – их оказалось около ста человек, а медалей к тому времени было присуждено всего 42. Из математиков старшего поколения не получили филдсовской медали (но, по мнению Арнольда, не уступают многим лауреатам) такие замечательные ученые, как Дж. фон Нейман, О. Зарисский, Х. Уитни, А.Н. Колмогоров, А.О. Гельфонд, И.М. Гельфанд, Л.С. Понтрягин, К. Шеннон, С. Черн, Ж. Лере, Л.Г. Шнирельман, И.Г. Петровский, С.Л. Соболев, А. Картан, А. Вейль, П.С. Новиков, С. Эйленберг, Дж. де Рам, М.Г. Крейн.

Арнольд считал, что медалью Филдса чаще отмечают решения знаменитых проблем, чем создание новых теорий, хотя Филдс предполагал поощрять и то, и другое. Однако ненаучные соображения трудно исключить, даже ограничиваясь лишь решениями классических проблем. Так, крупнейшие достижения последних лет – доказательство Великой теоремы Ферма (Э. Уайлс), доказательство «гипотез зеркальной симметрии» в физике (А. Гивенталь), доказательство гипотез Тома и Милнора о топологической экономии в алгебраической геометрии (П. Кронхаймер, Т. Мровка) – не отмечены филдсовскими медалями [10].

Анализ работ филдсовских лауреатов показывает, что математика – единая наука. Хотя в каждый конкретный год награждались авторы наиболее крупных достижений, полученных незадолго до очередного конгресса и иногда в далеких друг от друга разделах математики, между ними со временем обнаруживались совершенно удивительные связи.

Больше половины лауреатов медали Филдса работает в области алгебраической топологии, алгебраической геометрии и комплексного анализа. Эти области математики доминируют после Второй мировой войны. Они переплетаются между собой, и между ними трудно провести границу. Премия Филдса присуждается математикам в сравнительно молодом возрасте, и многие из них в дальнейшем меняют направление исследований [56].

Если лауреаты медалей Филдса являются выдающимися молодыми математиками, то члены Комитета по присуждению медалей Филдса – их более старшие, но не менее выдающиеся коллеги. Поэтому многие из математиков, получивших медали Филдса, позже становились членами комитета по их присуждению.

Премия Абеля. В январе 2002 г. в норвежских средствах массовой информации было объявлено о создании мемориального фонда Абеля. Начальный капитал фонда составил 200 млн норвежских крон (приблизительно 27 млн евро). С 3 по 8 июня 2002 г. в Осло проходила представительная Международная математическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Нильса Абеля. Конференцию открыл король Норвегии Харольд V. Одним из главных докладчиков на этом мероприятии был Эндрю Уайлс, доказавший знаменитую теорему Ферма. На специальной церемонии, которая прошла

6 июня, было официально объявлено, что норвежское правительство учреждает премию Абеля за выдающиеся научные работы в области математики. Премию формируют годовые проценты от капитала мемориального фонда. Деньги пойдут на «награждение абелевского лауреата премией, сравнимой с Нобелевской премией в денежном выражении; организацию церемоний, связанных с вручением премии Абеля; организацию мероприятий, стимулирующих интерес детей и юношества к математике».

Премия Абеля присуждается ежегодно Норвежской академией наук и литературы с 2003 г. Лауреатов выбирает созданный академией комитет, в который входят два представителя Норвегии, четыре – Международного математического союза, один – Европейского математического союза.

Первым лауреатом премии Абеля в 2003 г. стал профессор Коллеж де Франс Жан-Пьер Серр. Премия присуждена ему «за ключевую роль в придании современной формы многим отраслям математики, включительно топологию, алгебраическую геометрию и теорию чисел».

Следующими лауреатами премии Абеля в 2004 г. стали английский ученый сэр Майкл Ф. Атья из Эдинбургского университета и американский математик Изадор М. Зингер из Массачусетского технологического института. Им премия присуждена «за открытие и доказательство теоремы об индексе, соединившей топологию, геометрию и анализ, и за их выдающуюся роль в наведении новых мостов между математикой и теоретической физикой».

В 2005 г. Абелевскую премию получил американский ученый, 79-летний профессор Института математических наук им. Р. Куранта Петер Лакс. Она присуждена «за выдающийся вклад в теорию и применение уравнений в частных производных и вычисление их решений».

В 2006 г. лауреатом премии стал шведский ученый, профессор Королевского технологического института Леннарт Карлесон «за его глубокий и плодотворный вклад в гармонический анализ и теорию динамических систем».

22 марта 2007 г. академия наук Норвегии объявила о присуждении премии Абеля американскому математику Шриниваса Сатхамангаламу Р. Варадхану за работы в области теории вероятностей.

Академия наук Норвегии приняла решение присудить Абелевскую премию за 2008 г. Джону Г. Томпсону, профессору Флоридского и Кембриджского университетов и Жаку Титсу, профессору Коллеж де Франс (Париж), за фундаментальные достижения в области алгебры, в частности, за создание современной теории групп. Лауреаты получили денежное вознаграждение в размере 1,2 млн долл.

19 мая 2009 г. профессор Института высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт (Франция) Громов Михаил Леонидович получил премию Абеля в размере 6 млн норвежских крон (около 950 тыс. долл.) за «революционные достижения в геометрии».

В 2010 г. премию Абеля получил 85-летний американский математик Джон Торренс Тейт. Он знаменит широким применением методов алгебраической геометрии и функционального анализа в исследованиях по алгебраической теории чисел, за которые получил также премию Вольфа. Премия

Абеля присуждена Тейту «за огромное и продолжительное влияние, оказанное им на развитие теории чисел». Премия вручена королем Норвегии в Осло 25 мая.

В 2011 г. Норвежская академия наук присудила премию Абеля американскому математику Джону Милнору «за пионерские открытия в топологии, геометрии и алгебре».

Премия Неванлинны. В 1982 г. появилась новая международная премия, носящая имя выдающегося финского математика Ролфа Германа Неванлинны, в прошлом ректора Хельсинкского университета и президента Международного математического союза. Премию было решено присуждать молодым ученым за достижения в области теории алгоритмов и математических аспектов теории информации. Первым обладателем премии Неванлинны (золотая медаль и 5 тыс. швейцарских франков) стал в 1982 г. американский математик Роберт Тарьян за работы в области анализа алгоритмов. Летом 1986 г. на Международном математическом конгрессе в Беркли (США) премия Неванлинны была вручена англичанину Лесли Валиенту за работы по компьютерной математике. В Киото в 1990 г. лауреатом премии стал россиянин Разборов Александр Александрович. В 1994 г. премию Неванлинны получил израильский математик Ави Вигдерсон. В Берлине в 1998 г. эта премия была присуждена американскому математику Питеру Шору. В 2002 г. премии удостоен американский математик индийского происхождения Мадху Судан, в 2006 г. – американский математик Джон Клейнберг, в 2010 г. – американский математик Даниэль Спиелман.

Премия Гаусса. Премия Гаусса была учреждена в 2004 г. Немецким математическим обществом при поддержке Международного математического союза и впервые присуждалась в 2006 г. Ее вручают как «награду для математика, чьи работы имеют наибольшее прикладное значение». Как медаль Филдса и премия Неванлинны, она вручается на Международных математических конгрессах. Премия Гаусса 2006 г. была присуждена 90-летнему японскому математику Киёши Ито, создателю стохастического интеграла и теории стохастических дифференциальных уравнений. В 2010 г. на Международном математическом конгрессе в Хайдарабаде премию Гаусса получил французский математик Ив Мейер за фундаментальный вклад в теорию чисел, теорию операторов и гармонический анализ.

Медаль Черна (Чжэня). В 2010 г. на Международном математическом конгрессе в Хайдарабаде впервые была присуждена медаль Черна. Она учреждена в честь американского математика китайского происхождения Чжэня Шэншэнь и вручается математику, почившему всемирное признание за выдающиеся достижения в течение всей жизни. Вместе с медалью вручают денежную премию в размере 500 тыс. долл., половина которой должна быть передана на благотворительные нужды в одну или несколько организаций по усмотрению лауреата. Первую премию Черна получил американский математик Луис Ниренберг, профессор Института Куранта Нью-Йоркского университета за работы по теории нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными и преподавательскую деятельность.

Международные награды, в которых одной из номинаций является «математика»

Премия Вольфа является одной из немногих негосударственных премий. Многие считают ее второй по престижности комплексной премией после Нобелевской. Она вручается ежегодно (с возможными перерывами) в шести номинациях: «сельское хозяйство», «химия», «математика», «медицина», «физика» и «искусства». Премия в области искусств присуждается по правилу ротации отдельных искусств, чередуясь в следующем порядке: живопись, музыка, архитектура, скульптура. Премия включает диплом и денежную сумму в размере 100 тыс. долл.

Учредитель фонда дипломат и изобретатель Рикардо Вольф родился в 1887 г. в Ганновере (Германия). Незадолго до начала Первой мировой войны он эмигрировал на Кубу. С 1971 г. Вольф был послом Кубы в Израиле. После разрыва в 1973 г. дипломатических отношений между этими странами он остался в Израиле. В 1975 г. кнессет утвердил специальный «Закон о фонде Вольфа». Фонд был учрежден в 1976 г., а премии начали вручать с 1978 г.

Отбор победителей в каждой области осуществляется международными комитетами из трех экспертов. Новые составы комитетов формируются ежегодно. Фонд имеет статус частной некоммерческой организации. Имена лауреатов премии Вольфа по математике представлен в табл. 3.

Таблица 3. Лауреаты премии Вольфа

Год вручения	Лауреат	Основные научные достижения
1978	И.М. Гельфанд (Московский государственный университет, СССР) Карл Зигель (Университет Георга-Августа, Германия)	Работы в функциональном анализе, теории представлений групп; продуктивный вклад во многие области математики и их применения Вклад в теорию чисел, теорию нескольких комплексных переменных и небесную механику
1979	Жан Лере (Коллеж де Франс, Франция) Андре Вейль (Институт перспективных исследований, Принстон, США)	Работы по разработке и применению топологических методов к изучению дифференциальных уравнений Введение алгебро-геометрических методов в теорию чисел
1980	Анри Картан (Парижский университет, Франция) А.Н. Колмогоров (Московский государственный университет, СССР)	Работы по алгебраической топологии, теории комплексных переменных, гомологической алгебре; руководство целым поколением математиков Открытия в области анализа Фурье, теории вероятностей, эргодической теории и теории динамических систем

Продолжение табл. 3

Год вручения	Лауреат	Основные научные достижения
1981	Ларс Альфорс (Гарвардский университет, США) Оскар Зарисский (Гарвардский университет, США)	Создание новых мощных методов в теории геометрических функций Создание современного подхода к алгебраической геометрии путем ее слияния с коммутативной алгеброй
1982	Хасслер Уитни (Институт перспективных исследований, Принстон, США) М.Г. Крейн (Академия наук Украинской ССР, СССР)	Фундаментальные работы по алгебраической топологии, дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии Фундаментальный вклад в функциональный анализ и его применения
1984	Чжэнь (Черн) Шэншэнь (Калифорнийский университет, США) Пол Эрдёш (Венгерская академия наук, Венгрия)	Вклад в дифференциальную геометрию, оказавший глубокое влияние на всю математику Вклад в теорию чисел, комбинаторику, теорию вероятностей, теорию множеств и математический анализ; стимулирование развития математики во всем мире
1985	Кунихико Кодаира (Японская академия, Япония) Ганс Леви (Калифорнийский университет, США)	Вклад в изучение комплексных и алгебраических многообразий Начало многих, в настоящее время классических и общеизвестных исследований в области дифференциальных уравнений с частными производными
1986	Самуэль Эйленберг (Колумбийский университет, США) Атле Сельберг (Институт перспективных исследований, Принстон, США)	Фундаментальные работы по алгебраической топологии и гомологической алгебре Глубокие и оригинальные работы по теории чисел, дискретным группам и автоморфным формам
1987	Киёши Ито (Университет Киото, Япония) Питер Лакс (Нью-Йоркский университет, США)	Фундаментальный вклад в теорию вероятностей, создание стохастических дифференциального и интегрального исчислений Выдающийся вклад во многие области анализа и прикладной математики

Продолжение табл. 3

Год вручения	Лауреат	Основные научные достижения
1988	Фридрих Хирцебрух (Институт Макса Планка и Боннский университет, Германия) Ларс Хёрмандер (Лундский университет, Швеция)	Работы, объединяющие топологию, алгебраическую и диффренциальную геометрии, алгебраическую теорию чисел; продвижение кооперации и исследований в математике Работы по применению псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными
1989	Альберто Кальдерон (Чикагский университет, США) Джон Милнор (Институт перспективных исследований, Принстон, США)	Работы по сингулярным интегральным операторам и их применению к проблемам в теории дифференциальных уравнений с частными производными Оригинальные находки в геометрии, открывшие новые важные перспективы в топологии с алгебраической, комбинаторной и дифференциальной точек зрения
1990	Эннио де Джорджи (Высшая школа в Пизе, Италия) И.И. Пятецкий-Шапиро (Тель-Авивский университет, Израиль)	Инновационные идеи и фундаментальные достижения в вариационном исчислении и в теории дифференциальных уравнений с частными производными Фундаментальный вклад в комплексный анализ, теорию представлений, дискретных групп и автоморфных форм
1991	Премия не вручалась	
1992	Леннарт Карлесон (Упсальский университет, Швеция и Калифорнийский университет, США) Джон Г. Томпсон (Кембриджский университет, Великобритания)	Фундаментальный вклад в анализ Фурье, комплексный анализ, теорию квазиконформных отображений и динамических систем Глубокое влияние на все аспекты теории конечных групп и их связи с другими разделами математики
1993	М.Л. Громов (Институт перспективных научных исследований, Франция) Жак Титс (Коллеж де Франс, Франция)	Вклад в риманову и симплектическую геометрии, алгебраическую топологию, геометрическую теорию групп и теорию дифференциальных уравнений с частными производными Фундаментальный вклад в теорию структуры алгебраических и других классов групп, в теорию построений
1995	Юрген Мозер (Швейцарский федеральный институт технологии, Швейцария)	Работы о стабильности в гамильтоновой механике; вклад в теорию нелинейных дифференциальных уравнений

Продолжение табл. 3

Год вручения	Лауреат	Основные научные достижения
1996	Роберт Ленглендс (Институт перспективных исследований, Принстон, США) Эндрю Уайлс (Принстонский университет, США)	Вклад в теорию чисел, теорию автоморфных форм и представлений групп Вклад в теорию чисел и связанные области; доказательство Великой теоремы Ферма
1997	Джозеф Келлер (Станфордский университет, США) Я.Г. Синай (Принстонский университет, США и Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, Россия)	Вклад в теорию распространения электромагнитных, световых, звуковых волн, в механику жидкостей, твердых тел, квантовую и статистическую механику Внедрение математически строгих методов в статистическую механику и эргодическую теорию динамических систем; их применение в физике
1998	Премия не вручалась	
1999	Ласло Ловас (Йельский университет, США и Университет Эотвос, Венгрия) Элиас Штейн (Принстонский университет, США)	Вклад в комбинаторику, теоретическую информатику и комбинаторную оптимизацию Вклад в анализ Фурье; особое влияние на новое поколение аналитиков благодаря яркому преподаванию
2000	Рауль Ботт (Гарвардский университет, США) Жан-Пьер Серр (Коллеж де Франс, Франция)	Глубокие исследования в топологии и дифференциальной геометрии, их применение в теории групп Ли, дифференциальных операторов и в математической физике Вклад в топологию, алгебраическую геометрию, алгебру и теорию чисел; воодушевляющие лекции и книги
2001	В.И. Арнольд (Математический институт РАН им. В.А. Стеклова, Россия, Университет Париж-Дофин, Франция) Саарон Шела (Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль)	Работы, повлиявшие на развитие многих областей математики, включая динамические системы, дифференциальные уравнения и теорию сингулярностей Вклад в математическую логику и теорию множеств и их применение в других разделах математики

Окончание табл. 3

Год вручения	Лауреат	Основные научные достижения
2003	Микио Сато (Университет Киото, Япония) Джон Тейт (Техасский университет, США)	Создание алгебраического анализа, в том числе теории гиперфункций и микрофункций; вклад в теорию голономного квантового поля и единую теорию солитонных уравнений Создание фундаментальных основ алгебраической теории чисел
2004	Премия не вручалась	
2005	Г.А. Маргулис (Йельский университет, США) С.П. Новиков (Университет Мэриленда, США и Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, Россия)	Вклад в алгебру, особенно в теорию решеток в полупростых группах Ли; ее применение в эргодической теории, теории представлений, теории чисел, комбинаторике и теории меры Фундаментальный вклад в алгебраическую и дифференциальную топологии, математическую физику; введение алгебро-геометрических методов
2007	Стивен Смейл (Калифорнийский университет в Беркли, США) Гарри Фюрстенберг (Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль)	Вклад в формирование дифференциальной топологии, динамических систем, математической экономики и другие области математики Вклад в эргодическую теорию, теорию вероятностей, топологическую динамику, анализ симметричных пространств и гомогенных потоков
2008	Дэвид Мамфорд (Гарвардский университет, США) Пьер Делинь (Институт перспективных исследований, Принстон, США) Филипп Гриффитс (Институт перспективных исследований, Принстон, США)	Работы в области алгебраических поверхностей, геометрической теории инвариантов; исследования основ современной алгебраической теории пространства модулей и тэта-функций Исследования теории Ходжа, гипотез Вейля; вклад в теорию чисел Исследования по структурам Ходжа, теории периодических абелевых интегралов и вклад в комплексную дифференциальную геометрию
2009	Премия не вручалась	
2010	Деннис Парнелл Салливан (Университет в Стони-Брук, Нью-Йорк, США) Шинтан Яу (Гарвардский университет, Кембридж, США)	Вклад в алгебраическую топологию и конформную динамику Работы в области геометрического анализа

Премия Вольфа является международной наградой с более глубокими традициями, чем премия Абеля. Ее престиж достаточно высок и среди ее лауреатов немало российских математиков. Как правило, она вручается не за конкретный результат, а присуждается по совокупности за значительный вклад в развитие математики.

Премия Крафурда была учреждена шведским экономистом и промышленником Хольгером Крафурдом и его супругой Анной-Гретой в 1980 г. Премия названа в честь шведского ученого Хольгера Крафурда, создавшего первую искусственную почку. Награда вручается ежегодно, начиная с 1982 г. в следующих номинациях: «астрономия и математика», «биологические науки» и «науки о Земле». По сложившейся традиции каждая из ежегодных премий посвящена одной из упомянутых номинаций. В 2008 г. премией отмечены исследования в области математики и астрономии. В 2009 г. Королевская академия наук Швеции назвала лауреатов премии в области исследования полиартрита – заболевания, которым страдал сам Крафурд. Эти научные направления выбраны неслучайно: за достижения в них не вручают Нобелевскую премию. Премия Крафурда – одна из крупнейших в мире ежегодных премий. Ее размер составляет 500 тыс. долл.

В 2008 г. половину премии получил Рашид Алиевич Сюняев за астрофизику, а вторая половина – за математику – была разделена между Максимом Концевичем и Эдвардом Виттеном, получившими премию за большой вклад в теорию суперструн. Церемония награждения лауреатов состоялась 23 апреля 2008 г. в присутствии короля Швеции Карла XVI Густава.

Кроме международных математических премий, в развитых странах имеются национальные премии, но их считают менее престижными. В нашей стране Российская академия наук присуждает медали, учрежденные в честь Л. Эйлера, П.Л. Чебышёва и М.В. Келдыша, премии носят имена И.М. Виноградова, С.В. Ковалевской, А.Н. Колмогорова, М.А. Лаврентьева, Н.И. Лобачевского, А.М. Ляпунова, А.И. Мальцева, А.А. Маркова и И.Г. Петровского.

Премия Шао. Премию Шао называют азиатской Нобелевской премией. Она была учреждена известным медиамагнатом сянганским мультимиллионером Ифу Шао в 2002 г. Награда присуждается в трех категориях: «математика», «астрономия», «науки о жизни и медицина». Победитель в каждой категории получает медаль и сумму в 1 млн долл. Если победителей несколько, то сумма делится между ними поровну. Жюри премии возглавляет нобелевский лауреат по физике 1957 г. Чжэньнин Янг. До 2009 г. 26 ученых из различных стран стали обладателями премии. В 2008 г. впервые лауреатами премии стали двое российских математиков: Владимир Арнольд и Людвиг Фаддеев. Официальная церемония награждения состоялась 9 сентября 2008 г. в Сянгане (Гонконг).

В 2009 г. премию Шао получили британский математик Саймон Доналдсон и американский математик Клиффорд Таубса, в 2010 г. – французский математик Жан Бурген.

Часть II

СТАНОВЛЕНИЕ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Математика пережила два периода. В первом задачи ставились богами (делийская задача об удвоении куба), во втором – полубогами (Паскаль, Ферма). Мы вошли в третий период, когда задачи ставит нужда.

П.Л. Чебышёв

До начала XX в. математика развивалась в основном в рамках национальных школ и благодаря отдельным ученым. XIX в. прошел под знаком состязания французской и немецкой математических школ. К немецкой математике до рассматриваемого периода принадлежали такие колоссы, как Кеплер, Лейбниц, Гаусс, к французской в XVII в. — Декарт и целое созвездие гениальных математиков от Д'Аламбера до Галуа в конце XVIII — начале XIX в. Российская математика фактически начала развиваться после организации Петербургской академии наук за 100 лет до создания Лобачевским неевклидовой геометрии, т. е. до начала создания современной математики.

После создания Петербургской академии наук в 1725 г. в Россию были приглашены швейцарские математики братья Иоганн и Даниил Бернулли, а затем Леонард Эйлер. Тогда Россия стала одним из ведущих центров математических исследований, получившим международное признание. Работы Эйлера печатались в академических ежегодниках и журналах еще полвека после его смерти. В начале второй четверти XIX в. в России появились ученые-математики, занявшие почетное место в европейской науке, среди которых следует отметить В.Я. Буняковского, М.В. Остроградского и Н.И. Лобачевского.

В середине XIX в. образовалась российская петербургская математическая школа, во главе которой стоял П.Л. Чебышёв. На пороге XX в. в научную деятельность активно включились итальянская, венгерская, австрийская, шведская и некоторые другие математические школы. На рубеже веков появились первые крупные математики на североамериканском континенте. Перед Первой мировой войной стараниями Д.Ф. Егорова и Н.Н. Лузина была создана московская математическая школа, продолжавшая исследования французских ученых Р. Бэра, А. Лебега, Э. Бореля в области применения теоретико-множественных методов в теории функций, едва ли не крупнейшая в мире в середине 1930-х годов. После Первой мировой войны начала формироваться польская математическая школа [75].

По оценке Колмогорова, во второй половине XX в. первое место российская математика делила с математикой Соединенных Штатов. Но в США в основном работают математики, эмигрировавшие из Европы. В 1930-е годы только из Германии

эмигрировали в Штаты несколько десятков талантливых математиков. Тогда как в России работают те, кто учился в нашей стране.

Во Франции с начала Второй мировой войны громко заявила о себе группа математиков, публиковавших свои труды под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки. Однако в отличие от СССР, они вели исследования не по всем разделам математики.

В 1999 г. о более поздних изменениях В.И. Арнольд писал, что значение российской математической школы для мировой математики всегда определялось оригинальностью российских исследований и их независимостью от западной моды. Чувство, что занимаешься областью, которая станет модной через двадцать лет, чрезвычайно стимулирует. К сожалению, этот двадцатилетний период теперь начал уменьшаться, и «утечка мозгов» является одним из основных факторов, вызывающих такое уменьшение. Действительно, из России за рубеж уезжают наиболее одаренные, перспективные ученые, лидеры приоритетных направлений исследований.

По мнению автора данной книги, в процессе обучения российские математики получают более основательную подготовку по сравнению с зарубежными учеными. Это позволяет им лучше понять связь исследуемых вопросов с возможными приложениями и объясняет заметное влияние российской математики на мировую математику.

В России труд ученых оплачивается значительно ниже, чем за рубежом. Кроме того, оплата мало зависит от личного вклада ученого в полученные результаты. Такая несправедливая уравниловка имеет одно достоинство: российские ученые смелее делятся своими идеями с коллегами.

Анализ тем выступлений, состоявшихся на Международном математическом конгрессе в Хайдарабаде в 2010 г., показывает, что в США практически развиваются все разделы математики, во Франции большее внимание уделяется теории дифференциальных уравнений, геометрии, алгебраической геометрии и теории чисел, в Германии — математической физике, топологии и алгебраической геометрии.

В данной части речь пойдет о российской, немецкой и французской математических школах конца XIX — начала XX в. и американской математической школе XX в.

Из всех математиков, о которых рассказано в книге, хотелось бы отметить тех, кто внес выдающийся вклад в развитие различных разделов математики и смежные науки: это гениальные математики-универсалы Анри Пуанкаре и Давид Гильберт — признанные мировые лидеры в математике конца XIX — начала XX в., Андрей Николаевич Колмогоров и Джон фон Нейман — середины XX в. Об их жизненном пути и творчестве рассказано ниже.

Глава 4

КАК НАЧИНАЛАСЬ СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Если вы захотите, чтобы дерево приносило больше плодов, чем обычно, вам нечего делать с его ветвями, а нужно взрыхлить землю и подложить новую почву под корни.

Ф. Бэкон

Об истории пятого постулата Евклида

Корни современной математики уходят вглубь веков, но методика ее построения, основные принципы получения новых результатов пришли к нам из XIX в.

В XIX и XX вв. разработаны новые математические теории, расширены приложения математики. Прорывом стало появление неевклидовой геометрии, в основе которой лежало новое понимание пятого постулата Евклида.

Евклид сформулировал пятый постулат (аксиому о параллельных) следующим образом: *всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние внутренние углы, сумма которых меньшие двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых* (рис. 3).

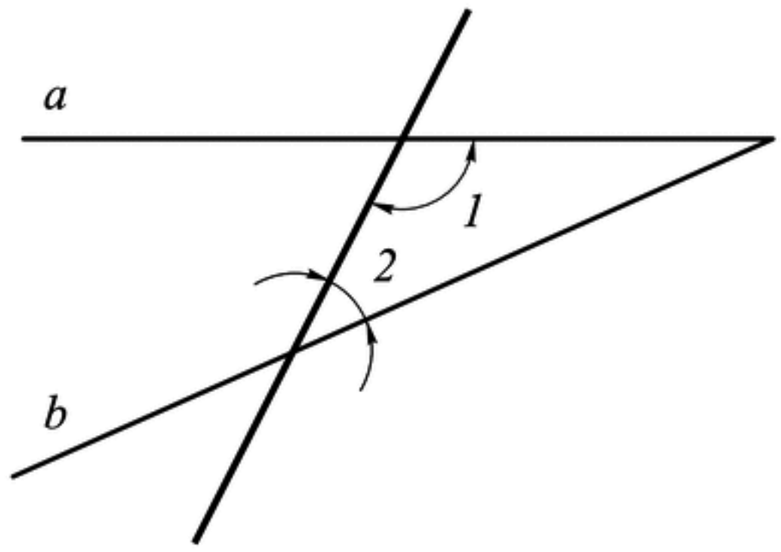


Рис. 3. К пятому постулату (аксиоме о параллельных) Евклида

Иначе говоря, если углы *1* и *2* в сумме меньше 180°, то прямые *a* и *b*, продолженные достаточно далеко в правую сторону, пересекутся. Опираясь на пятый постулат и другие аксиомы, Евклид доказал существование параллельных, поэтому этот постулат стали называть *аксиомой о параллельных*. Должно быть, Евклид не был доволен своим вариантом формулировки этой аксиомы, ибо обратился к ней, лишь доказав все теоремы, какие только смог вывести без ее использования.

Математики считали, что аксиоме о параллельных в том виде, как ее сформулировал Евклид, не доставало простоты. Ученые искали ответ на вопрос: существуют ли в физическом пространстве параллельные прямые? и пытались либо доказать пятый постулат как теорему на основе остальных аксиом, либо заменить его другой аксиомой. В 1795 г. англичанин Джон Плейфер предложил вариант аксиомы, вошедший во многие учебники: *существует одна и только одна прямая, проходящая через данную точку P,*

лежащую вне прямой L в плоскости, задаваемой точкой P и прямой L, которая не пересекается с прямой L.

Попытки найти подходящую замену евклидовой аксиоме о параллельных или доказать, что она следует из девяти остальных аксиом Евклида, были многочисленны, но тщетны, а в 1759 г. Д'Аламбер назвал проблему параллельных «скандалом в области оснований геометрии».

Самым выдающимся математиком среди тех, кто работал над решением проблемы пятого постулата Евклида, был Гаусс. В 1831 г. в письме ему другу Шумахеру он писал, что еще в 1792 г., когда ему было 15 лет, он понял возможность существования логически непротиворечивой геометрии, в которой пятый постулат Евклида не выполняется. Примерно с 1813 г. Гаусс начал работать над своей неевклидовой геометрией, которую назвал сначала *антиевклидовой*, затем *астральной*, и, наконец, *неевклидовой*. В письме к Ф. Бесселю в 1829 г. он признался, что вряд ли когда-нибудь опубликует свои открытия в этой области, опасаясь вызвать крики беотийцев (беотийцы – древнегреческое племя, чья тупость вошла в поговорку).

Значительный вклад в создание неевклидовой геометрии внесли русский математик Николай Иванович Лобачевский и венгерский ученый Янош Больяй, офицер австро-венгерской армии.

Сущность неевклидовой геометрии

Теории Больяй и Лобачевского очень схожи в основе, а их работы значительно отличаются друг от друга.

Лобачевский смело отверг аксиому Евклида о параллельных и принял допущения, высказанные еще в XVII в. итальянским священником Джиролламо Саккери, членом ордена иезуитов и профессором университета в Павии: *пусть задана прямая AB и точка P, вне ее, на расстоянии a от AB. Тогда все прямые, проходящие через точку P, распадаются на два класса: класс прямых, пересекающих AB, и класс прямых, которые AB не пересекают. Две прямые, являющиеся границами второго класса, будут параллельными прямой AB* (рис. 4). На рисунке $\varphi = \varphi(a)$ – угол параллельности.

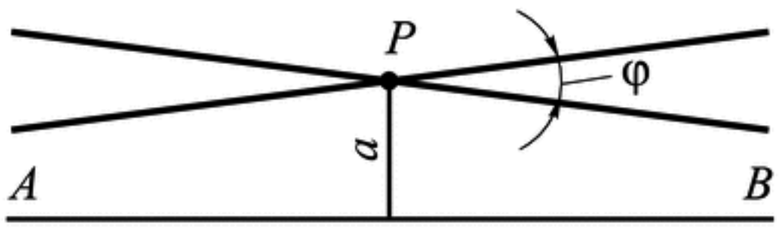


Рис. 4. К пояснению допущений Лобачевского о параллельных прямых

Заслуга Лобачевского состоит в том, что он на основе догадки Саккери создал непротиворечивую элементарную геометрию, соответствующую ей тригонометрию, а также аналитическую и дифференциальную геометрии.

Геометрия Лобачевского в большей своей части, в которой не используется пятый постулат, не отличается от геометрии Евклида. В той же части, которая использует аксиому о параллельности, все обстоит иначе. К этой части относятся теоремы о: расположении параллельных прямых, сумме углов в треугольниках и многоугольниках, площадях, вписанных в окружность и об описанных многоугольниках, подобии и конгруэнтности фигур, тригонометрии, об измерении круга и его частей, а также теорема Пифагора.

Формулировка этих теорем в геометрии Лобачевского отличается от их формулировок в геометрии Евклида.

Для примера приведем некоторые результаты: прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся в обе стороны; сумма углов треугольника меньше 180°; подобных треугольников и многоугольников не существует. Вся тригонометрия оказалась в основном тригонометрией гиперболических функций. Совокупность ее формул подобна совокупности формул сферической тригонометрии в системе Евклида, но для сферы мнимого радиуса *Ri*.

В сочинениях Лобачевского построена система, не содержащая погрешностей и столь же богатая фактами, как и геометрия Евклида. Тем самым показано, что мыслима не только одна система геометрии и что другие системы можно получить, видоизменяя и обобщая основные положения геометрии Евклида. Однако Гаусс, Лобачевский и Больяй, убежденные в непротиворечивости неевклидовой геометрии, доказать это не смогли. Это сделали математики следующего поколения. Неевклидова геометрия в течение нескольких десятилетий оставалась заброшенной областью науки. Большинство математиков ее игнорировали, господствующая философия Канта отказывалась принимать ее всерьез.

Мысль о том, что евклидова геометрия – это геометрия реального пространства, т. е. абсолютная истина о пространстве, настолько глубоко вошла в сознание людей, что любые идеи противоположного толка на протяжении многих лет отвергались. Не так-то легко опровергнуть любое неверное заключение, коль скоро оно получило достаточно широкое распространение. По словам создателя квантовой механики Макса Планка, новая научная истина побеждает не потому, что ее противники убеждаются в ее правильности и прозревают, а лишь по той причине, что противники постепенно вымирают, а новое поколение усваивает эту истину буквально с молоком матери [67].

Некоторые математики не отрицали, что неевклидовы геометрии (позже их появилось несколько) логически непротиворечивы; другие были убеждены, что новые геометрии содержат противоречия и потому бесполезны. Почти все математики считали, что единственно верной геометрией физического пространства должна быть евклидова геометрия. К неевклидовой геометрии скептически относились даже такие математики-новаторы, как Уильям Роуан Гамильтон, Артур Кэли и Феликс Клейн. Хотя и Кэли, и Клейн сами работали над неевклидовыми геометриями (отличными от геометрии Лобачевского), они рассматривали предмет своих исследований как попытку введения в евклидову геометрию новых искусственных метрик – функций, задающих расстояние между двумя точками. Ни Кэли, ни Клейн не признавали за неевклидовыми геометриями той фундаментальности и применимости к реальному миру, которая приписывалась евклидовой геометрии.

Первым ведущим ученым, кто целиком понял значение неевклидовой геометрии, был Риман. Его общая теория многообразий (1854) допускала не только существовавшие виды неевклидовой геометрии, но и многие другие, так называемые римановы геометрии.

В 1868 г. итальянский математик Э. Бельтрами исследовал вогнутую поверхность, называемую псевдосферой, и доказал, что на этой поверхности

справедлива геометрия Лобачевского. Через два года немецкий математик Клейн предложил другую модель для геометрии Лобачевского, еще одна была предложена французским математиком Пуанкаре. Позже появились и другие модели геометрии Лобачевского, которые оказали прогрессивное воздействие на дальнейшее развитие геометрии и математики в целом.

В XX в. было обнаружено, что геометрия Лобачевского не только имеет большое значение для абстрактной математики, но и играет важную роль в современной физике. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени, открытая в работах Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского и описываемая в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского. Например, в расчетах современных синхрофазотронов используются формулы геометрии Лобачевского.

Н.И. Лобачевский

Лобачевский Николай Иванович родился 20 ноября 1792 г. в Нижнем Новгороде в семье мелкого чиновника. После смерти отца мать в 1802 г. определила Николая в казанскую гимназию, а в 1807 г. он стал студентом Казанского университета. На первом курсе Николай изучал медицину, а когда преподавать математику в Казанский университет приехал Бартельс, который учился вместе с Гауссом, Лобачевский увлекся математикой. С Лобачевским Бартельс занимался дополнительно по четыре часа в неделю («Арифметика» Гаусса, «Небесная механика» Лапласа).

Лобачевский находил время не только для учения, но и для веселых проказ. Однажды ночью он запустил в небо ракету собственного изготовления, чем напугал дежурного на пожарной каланче, который забил тревогу и поднял на ноги всю Казань. Только благодаря заступничеству профессоров Лобачевский не был исключен из университета [85].

3 августа 1811 г. Лобачевский получил степень магистра (его научным руководителем был Бартельс). Представив два научных исследования: по механике – «Теория эллиптического движения небесных тел» (1812) – и алгебре – «О разрешимости алгебраического уравнения $x^n - 1 = 0$» (1813), – он был раньше срока, в 1814 г., произведен в должность адъюнкт-профессора (доцента). Со следующего года Лобачевский начинает преподавать, постепенно расширяя число читаемых им курсов, и уже задумывается над перестройкой нача́л математики. Еще через год он получает звание экстраординарного профессора. Однако вскоре в университете создается очень тяжелая для работы обстановка. Для инспектирования Казанского университета был назначен и прибыл в университет в марте 1819 г. член Главного правления училищ М.Л. Магницкий, предложивший расформировать университет.

Все же университет расформирован не был – Александр I решил его реорганизовать. Попечителем Казанского учебного округа был назначен Магницкий, который энергично приступил к «обновлению университета». Он

начал с увольнения девяти профессоров. Была установлена тщательная слежка за содержанием лекций и студенческих записей и введен суровый казарменный режим для студентов. В то время Лобачевский преподает математику на всех курсах вместо уехавшего в Дерпт (Тарту) Бартельса, замещает профессора К. Броннера, не вернувшегося в Казань после отпуска, читает физические курсы и заведует физическим кабинетом. Кроме того, он замещает отправившегося в кругосветное плавание астронома И.М. Симонова, читает астрономию и геодезию, приняв в свое ведение обсерваторию, ряд лет работает деканом физико-математического отделения. Колоссальную энергию вкладывает Лобачевский в упорядочение библиотеки и расширение ее физико-математической части. Вместе с тем он является одним из активнейших членов, а затем и председателем строительного комитета, занятого возведением главного университетского корпуса.

Несмотря на текущие дела и множество обязанностей, Лобачевский не прекращает напряженной творческой деятельности. Он пишет два учебника для гимназий «Геометрию» (1823) и «Алгебру» (1825). «Геометрия» получает отрицательный отзыв у академика Н.И. Фусса, не оценившего тех изменений, которые Лобачевский внес в традиционное изложение, и осудившего введение метрической системы мер, поскольку она создана в революционной Франции. «Алгебра» из-за внутренних проволочек в университете тоже не была напечатана.

Мысль Лобачевского работает неустанно над строгим построением начал геометрии. Первые следы этой работы мы находим в студенческих конспектах его лекций по геометрии за 1817 г. Об этом же свидетельствует рукопись учебника «Геометрия» и его «Обозрения преподавания чистой математики» за 1822–1823 и 1824–1825 гг. В феврале 1826 г. он выступает на факультете с докладом на тему «Воображаемая геометрия». Доклад был передан на отзыв профессорам И.М. Симонову, А.Я. Купферу и адъюнкту Н.Д. Брашману. Отзыва не последовало. Рукопись работы не сохранилась, однако некоторые материалы доклада были включены Лобачевским в сочинение «О началах геометрии», опубликованное в «Казанском вестнике» в 1829–1830 гг.

Доклад Н.И. Лобачевского совпал по времени с отстранением от должности М.Л. Магницкого. Специальная ревизия выявила ряд злоупотреблений, и попечитель был уволен и выслан. Новый попечитель Казанского учебного округа М.Н. Мусин-Пушкин сумел оценить деятельную натуру Лобачевского. Великого геометра в 1827 г. избрали ректором, и 19 лет он самоотверженно трудился на этом посту.

Лобачевский добился существенного повышения уровня научно-учебной работы на всех факультетах. Он провел строительство целого комплекса университетских вспомогательных зданий, читал ряд специальных курсов для студентов, написал наставление учителям математики и заботился о постановке преподавания в училищах и гимназиях. В 1842 г. Лобачевский принял участие в поездке в Пензу для наблюдения солнечного затмения. Ректор умело оберегал своих сотрудников и студентов во время эпидемии холеры в 1830 г., изолировав университетскую территорию и многократно проводя

тщательную дезинфекцию. Он организовал спасение астрономических инструментов и вынос книг из библиотеки во время громадного пожара в Казани в 1842 г., причем с его помощью удалось отстоять у огня почти все университетские здания.

Вместе с тем Лобачевский находит время для научных исследований, посвященных, главным образом, развитию новой геометрии. Его идеи были настолько непривычны и глубоки, он настолько опередил время, что современники не смогли понять и правильно оценить его. Первая работа «О началах геометрии» была представлена ученым советом университета в 1832 г. в Петербургскую академию наук. Но даже академик М.В. Остроградский не понял ее значения и дал отрицательный отзыв. А в 1834 г. в журнале Ф.В. Булгарина «Сын Отечества» появился издевательский анонимный отзыв об этой работе. Неизвестный рецензент писал, что в книге отсутствует здравый смысл [69].

Столкнувшись с непониманием, ученый не прекратил своих исследований. В 1835 г. он печатает «Воображаемую геометрию», в 1836 г. – «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», в 1835–1838 гг. – свою наиболее обширную работу «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Наконец, в 1840 г. выходят на немецком и французском языках его «Геометрические исследования по теории параллельных», где содержится предельно ясное и лаконичное изложение его основных идей. Немецкую версию изложения прочитал Гаусс и, разумеется, понял автора с полуслова. Он оценил результаты Лобачевского в письмах к ученикам, но публичной поддержки новой геометрии не оказал. Однако по его представлению в 1842 г. Лобачевский был избран членом-корреспондентом Гёттингенского научного общества.

В 1846 г. Лобачевский оказался фактически отстраненным от работы в университете. Формально он получил повышение – был назначен помощником попечителя (однако жалованья ему за эту работу не назначили), но при этом лишился кафедры и должности ректора. Более года Лобачевский управлял Казанским учебным округом, сменив на этой должности М.Н. Мусина-Пушкина, которого перевели в Петербург. Лишившись обоих постов, он потерял возможность не только руководить университетом, но и вообще активно участвовать в его жизни.

Отстранение от работы, которой Лобачевский посвятил свою жизнь, ухудшение материального положения, а затем и семейные неурядицы отрицательно сказались на его здоровье: он сильно постарел и стал терять зрение. Утонул любимый брат, умер любимый сын, сгорел дом. Жена, увлекающаяся карточной игрой, устраивала истерики и требовала денег на игру и на содержание большой семьи (в семье Лобачевских родилось 15 детей). Лобачевский стыдился прогрессирующей слепоты и скрывал ее от жены.

И все же несчастья и невзгоды, выпавшие на долю Николая Ивановича, не сломили силу его духа. За год до смерти он закончил свой последний труд – «Пангеометрию», которую под диктовку записывали его ученики.

Лобачевский был не только гениальным геометром. Он занимался исследованиями в области математического анализа, механики, физики и астроно-

мии. В алгебре известен его метод приближенного вычисления корней уравнений любой степени.

Лобачевский умер 12 февраля 1856 г. в возрасте 63 лет от паралича легких. Последними его словами стали: «Человек родится, чтобы умереть».

Янош Больяй

Больяй Янош родился 15 декабря 1802 г. в семье крупного венгерского ученого, друга Гаусса, профессора математики Фаркаша Больяй.

Отец лично руководил занятиями сына. В 13 лет мальчик овладел дифференциальным и интегральным исчислениями. Когда Яношу исполнилось 14 лет, отец написал об успехах сына своему другу Гауссу и попросил его взять подростка к себе в качестве ученика. Гаусс не ответил, и после некоторых колебаний Фаркашу Больяй пришлось устроить 16-летнего юношу в Военно-инженерную академию в Вене – закрытое учебное заведение, не требовавшее значительных расходов. Так сложилось, что в возрасте 31 года Яношу Больяй пришлось оставить военную службу.

Будучи офицером, Больяй увлекся проблемой, связанной с пятым постулатом Евклида. Не зная об открытии Лобачевского, Больяй повторил его успехи и опубликовал свои результаты в 1831–1832 гг. в качестве приложения («Аппендикс») к первому тому сочинений отца. Том с описанием результатов Яноша Больяй по неевклидовой геометрии был отправлен Гауссу, однако посылка из-за свирепствовавшей в то время холеры затерялась. Вторая попытка оказалась удачной. В письме Фаркаш Больяй просил Гаусса дать оценку работы сына, так как его мнение ставил выше мнения всей Европы. Только через полгода Гаусс ответил, что результаты Яноша Больяй почти полностью совпадают с теми результатами, которые он сам получил 30–35 лет тому назад. Янош подумал, что Гаусс хочет присвоить себе его открытия. Когда 17 октября 1848 г. отец прислал ему работу Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий», Больяй решил, что «Лобачевский» – это псевдоним Гаусса, описавшего его открытие на свой лад. Читая Лобачевского, Янош Больяй составил обширные замечания, выполнил подробный критический разбор всего сочинения. Он восхищался некоторыми выводами Лобачевского и называл их гениальными.

Больяй много занимался также теорией комплексных чисел, однако и эти его работы не получили заслуженного признания. Вследствие этого он потерял душевное равновесие и стал заниматься заведомо неразрешимыми проблемами (например, стремился создать на математической основе учение о всеобщем благе). Тяжелые переживания и недуги сломили и без того слабое здоровье Яноша. Умер Больяй на 58-м году жизни (1860). Его изложение неевклидовой геометрии в «Аппендиксе» переведено на многие европейские языки.

Алгебраизация математики и математическая логика

Начало современной алгебры. Наряду с геометрией, алгебра – один из столпов школьного курса математики. Но от школьной алгебры до той, которая составляет предмет научных интересов современных математиков-алгебраистов, дистанция огромного размера.

В XVII – первой половине XVIII в. под алгеброй понималась наука о буквенных вычислениях, т. е. тождественных преобразованиях буквенных формул, решениях алгебраических уравнений. Во второй половине XVIII – первой половине XIX вв. алгебра занималась изучением многочленов.

В работах Гаусса, Коши, Абеля, Галуа накапливались результаты, касающиеся новых разнообразных понятий и разделов математики, включая теорию подстановок. Так готовилась почва для расширения границ алгебры. Эти понятия и разделы появлялись вне рамок алгебры того времени, которая традиционно продолжала оставаться наукой об алгебраических уравнениях, «универсальной арифметикой», с теми же законами, что и в обычной числовой области.

В начале XIX столетия в Кембридже группа английских ученых разработала абстрактный математический аппарат, который дал начало символической алгебре. Вначале они пытались формально классифицировать функции в математическом анализе по тем соотношениям, которым функции удовлетворяют. Затем они перешли к алгебре. Чтобы обосновать операции над буквенными выражениями, Пикок ввел в 1833 г. различие между арифметической и символической алгеброй. Арифметическая алгебра – это буквенная арифметика, известная со времен Виета. Символическая алгебра – это «чистая» наука о символах; символы могут представлять собой совершенно произвольные объекты, над которыми априори считаются возможными любые операции. Единственным ограничением было то, что законы комбинаций этих символов должны совпадать с законами арифметической алгебры, когда символы представляют арифметические величины. Одной из целей символической алгебры становилось нахождение подходящей модели, в рамках которой символы имеют смысл и начальные правила справедливы.

Подход представителей Кембриджской школы открыл путь к более абстрактному мышлению в алгебре.

Теоретико-множественные понятия и простые алгебраические структуры (группа, кольцо, поле, векторное пространство) входят теперь в математический багаж студентов, совершающих самые первые шаги к получению высшего математического образования. Некоторые из этих структур являются основополагающими для всей математики, но как медленно шло их выделение на протяжении XIX столетия! Постепенно целью алгебры стало изучение абстрактных алгебраических структур независимо от их различных реализаций, и эта тенденция была неотделима от общего процесса аксиоматизации математики в целом.

Первые «ростки» теории групп историки математики обнаружили в одной из работ по теории чисел Л. Эйлера. Эта работа, датированная 1774 г., называлась «Доказательство, относящееся к вычетам, происходящим от деления степеней на простые числа». Более заметными эти «ростки» стано-

вятся в «Арифметических исследованиях» Гаусса (1801). Изучение сравнений, классов квадратичных форм и законов их композиции, свойств комплексных корней из единицы – все эти вопросы объединены общими групповыми идеями.

Главным источником понятий теории групп стали все-таки исследования по разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Впервые термин «группа» встречается у Галуа, которому удалось полностью решить задачу о корнях алгебраических уравнений. Итогом его глубоких исследований было не только решение очень трудной проблемы, но и рождение новой математической теории.

Основные работы Галуа не получили признания при жизни автора и были опубликованы только через 14 лет после его трагической гибели.

Первое полное и систематизированное изложение теории Галуа было дано Жорданом в 1870 г. в его монументальном сочинении «Трактат о подстановках».

Математическая логика. Первые идеи построения универсального языка для всей математики появились еще в XVII в., а первые научные работы по алгебраизации аристотелевой логики – лишь в середине XIX в. Это дало начало математической логике как разделу математики.

Английский математик и логик Джордж Буль смог взглянуть на математику по-новому и оценить ее статут с той ясностью и полнотой, что позволило Расселу считать, что чистую математику открыл Буль в сочинении, которое называлось «Законы мысли».

Шотландский математик и логик Август де Морган старше Буля почти на десять лет. Он был профессором математики университетского колледжа в Лондоне, покровителем и единомышленником Буля. К своим идеям в алгебре логики он пришел независимо от Буля. Его работа «Формальная логика, или исчисление необходимых и вероятностных умозаключений», в которой разработаны элементы логики высказываний и логики классов, вышла в одном году с «Математическим анализом логики» Буля. Он дал первую развитую систему алгебры отношений, с его именем связаны известные теоретико-множественные отношения (законы де Моргана).

Работы Моргана не были в достаточной степени поняты его современниками. Сложная и не всегда единообразная символика отпугивала многих читателей, склонных прагматически требовать от новой теории немедленных практических приложений. Позже де Морган стал основателем и первым президентом Лондонского математического общества.

Основное историческое значение системы де Моргана состоит в том, что она стимулировала развитие алгебры отношений американским философом, логиком и математиком Чарлзом Сандерсом Пирсом и дала толчок Булю к созданию исчисления классов. Пирс ввел специальную символику для обозначений высказываний, выражающих отношения, в частности, предикаты и кванторы $\forall x$ (квантор общности) и $\exists x$ (квантор существования), которые позволяют достичь однозначности высказываний.

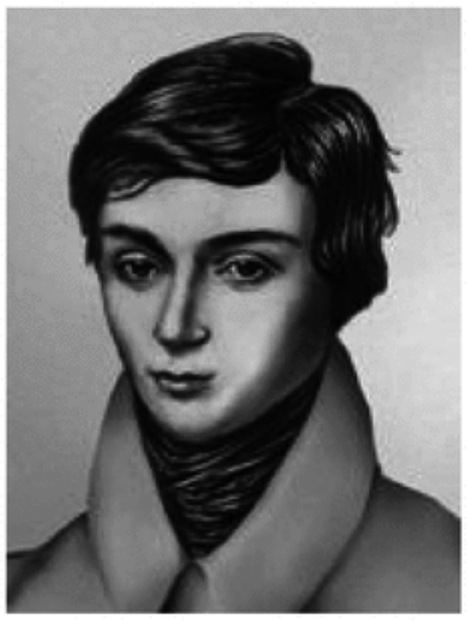
Логика отношений была систематизирована немецким математиком и логиком Эрнстом Шрёдером. Он первым осуществил попытку построения общей теории алгоритмов и исчислений.

Значительную роль в использовании математической логики для достижения большей математической строгости сыграл итальянский математик Джузеппе Пеано. Занимаясь преподаванием математики, он, как и до него Дедекинд, обнаружил недостаточную строгость существовавших ранее доказательств и посвятил свою жизнь усовершенствованию основ математики. Символику математической логики он использовал для записи не только законов логики, но и математических аксиом, а также для вывода теорем из аксиом. Аксиомы арифметики были введены в 1888 г. Дедекиндом и в 1891 г. Пеано, причем аксиоматика Пеано была более удобной для логического языка. Считая необходимым отказаться от интуитивных представлений, Пеано ввел собственные символы для обозначения понятий, кванторов и таких связок, как «и», «или», «не».

Немецкий математик, логик и философ, профессор Йенского университета Готлоб Фреге, восприняв идеи логики высказываний, логики отношений, пропозициональные функции и кванторы, ввел различие между простым утверждением высказывания и утверждением о том, что данное высказывание истинно. В последнем случае он ставил перед высказыванием знак «⊦». Фреге видел разницу между объектом x и множеством $\{x\}$, содержащим только x, между элементом, принадлежащим множеству, и включением одного множества в другое. Он предложил также аксиоматический подход к логике.

В 1879 г. Фреге опубликовал 90-страничную работу «Исчисление понятий», которая из-за новизны концепции и громоздкой символики была принята сдержанно. В 1893 г. он опубликовал первый том «Основных законов арифметики», в 1903 г. – второй. В тот же период Фреге создал ряд трудов по логической семантике и анализу языка, ныне признанных классическими. Рассел нашел противоречие в предложенном Фреге обосновании арифметики (парадокс Рассела), разрешить которое Фреге тщетно пытался до конца своей жизни. Однако именно благодаря Расселу Фреге стал широко известен, поскольку в его изложении концепция Фреге стала доступной широкому кругу читателей. Это способствовало признанию вклада Фреге в науку.

Эварист Галуа



Проблема разрешимости уравнений с числовыми коэффициентами в радикалах была полностью исследована Эваристом Галуа, самой необычной личностью среди всех математиков, известных истории науки.

Трагична и коротка жизнь гениального французского математика. Галуа родился 26 октября 1811 г. в городке Бур-ля-Рен в семье директора пансиона. Его мать, дочь доктора права Парижского университета, дала своему сыну хорошее гуманитарное образование. В 12 лет Эварист поступил в Парижский лицей Людовика Великого. Там он стал одним из лучших, получал похвальные листы и призы за стихи на латыни и переводы с греческого. Товарищи не любили Галуа за его резкий характер. Не жаловали Галуа и учителя. Они

знали: чтобы заставить Галуа слушать и работать под их диктовку, надо заинтересовать его, а для этого самим надо много знать, читать и готовиться.

Он быстро охладел к литературе и истории и вскоре остался на второй год в классе риторики. При повторном обучении он стал одновременно учиться в математическом классе, где сразу обнаружились его математические способности. Не интересуясь школьным учебником алгебры, Галуа с поразительной легкостью овладел математическим анализом. Больше всего его заинтересовала работа Лагранжа, в которой исследовалась проблема разрешимости в радикалах алгебраических уравнений [24].

В 16 лет он совершает ту же ошибку, которую за несколько лет до него сделал Нильс Абель, – думает, что решил уравнение пятой степени. Он стремится поступить в знаменитую Политехническую школу, где преподают ученики Лагранжа, так как лицей его уже не устраивает. Попытка поступить в Политехническую школу окончилась провалом: знания работ Лежандра и Лагранжа оказалось недостаточно, чтобы решить изощренные задачи, предлагавшиеся экзаменаторами. Галуа возвращается в лицей [24].

В 17 лет Галуа получает первые научные результаты. Его статья «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях» была напечатана в «Анналах математики», однако осталась незамеченной. Свою новую работу о разрешимости алгебраических уравнений Галуа послал в Парижскую академию наук. Оценить его работу и представить совету академии взялся Коши. Обычно в книгах о Галуа утверждается, что Коши якобы умышленно утаил работу, сомневаясь в том, что юный лицеист смог одолеть столь трудноразрешимую проблему, или что Коши, загруженный делами, просто забыл о рукописях Галуа. Так или иначе, но эти рукописи с тех пор считаются утерянными.

В 1971 г. в архивах Французской академии наук было обнаружено письмо Коши, из которого следует, что он внимательно ознакомился с работой Галуа, счел ее важной и планировал представить ее совету Академии наук в январе 1830 г., но не представил.

Галуа решил еще раз поступать в Политехническую школу. Существует много различных предположений о произошедшем на экзамене. Сохранилась запись Галуа о том, что его экзамен сопровождался «сумасшедшим хохотом экзаменаторов». Как было на самом деле, неизвестно, но в Политехническую школу он не попал. В скором времени покончил с собой отец Эвариста, 17 лет бывший мэром городка Бур-ля-Рен.

В январе 1830 г. Эварист представляет на конкурс в Академию наук три работы. С этого момента его судьба в руках секретаря Академии Жана Батиста Жозефа Фурье. Фурье начинает читать рукописи, но вскоре умирает. Рукописи Галуа и на этот раз утрачиваются.

В феврале 1830 г. Галуа был зачислен в Приготовительную школу, где готовили кандидатов на звание преподавателя. Уже через год, в революционном 1830 г., он был исключен из школы за выступление против ее реакционного директора в числе прочих «бунтарей». Казалось, что вскоре о Галуа забудут, как о многих других несостоявшихся революционерах. Но позднее выяснилось, что Галуа успел состояться как математик.

В январе 1831 г. 19-летний Галуа, исключенный из школы за свои взгляды, дает объявление в газете, что будет читать публичный курс высшей алгебры. В объявлении указывается, что «…курс состоит из теорий, частично новых, которые никогда еще не изучались в публичных курсах. Мы ограничиваемся тем, что назовем новую теорию мнимых, теорию уравнений, разрешимых в радикалах, теорию чисел и эллиптических функций, трактуемых чисто алгебраически» [23]. Было прочитано всего три лекции, так как они оказались слишком сложными для слушателей. Из объявления ясно, что уже в то время Галуа был полон идеями, обессмертившими его имя, – лекции посвящались разрешимости уравнений в радикалах.

В мае 1831 г. Галуа арестовывают. Суд оправдывает его, но в июле он снова арестован. В тюрьме он отредактировал свои самые важные работы и в третий раз послал их в Академию. Ответ из Академии пришел в тюрьму. Рукопись была возвращена с запиской от секретаря Академии Франсуа Араго: «Дорогой месье Галуа! Ваша рукопись была послана для ознакомления месье Пуассону. Он возвратил ее нам с отзывом, который мы здесь и приводим: «Мы приложили все усилия, чтобы понять доказательства месье Галуа. Его рассуждения недостаточно ясны, недостаточно развернуты и не дают возможности судить, насколько они точны…» [24].

Академия, не поняв, вновь отвергла его работу. Впрочем, отчасти в этом был виноват и сам Галуа. В спешке он не совсем ясно излагал свои мысли, а некоторые теоремы, которые не были им доказаны, сформулировал как доказанные. Да и стиль работ Галуа был непривычен для математиков начала XIX в. Новый стиль был провозвестником математики XX в. Вместо длинных выкладок для решения проблем применялись совершенно неожиданные идеи; кроме того, в его работах было слишком много новых понятий. Неудивительно, что Пуассону эти работы показались недостаточно ясными.

По состоянию здоровья Галуа переводят в тюремную больницу, где он познакомился с женщиной, из-за которой позднее будет убит на дуэли.

В последнюю ночь своей жизни он привел в порядок рукописи и написал несколько писем. Предчувствуя трагический исход дуэли, он писал о сотворенном им новом, оказавшемся впоследствии очень актуальным разделе математической науки – «теории групп», – полностью раскрывшем тайны существования решений алгебраических уравнений. Он оставляет на полях рукописи редакционные пометки и замечания: «…Осталось немного для завершения этих доказательств, но у меня мало времени…» [24]. В одном из писем, адресованном его единственному другу Огюсту Шевалье, он кратко изложил содержание своих исследований и попросил обратиться к виднейшим математикам для оценивания этих результатов. В их истинности он не сомневался.

В 1982 г. к 150-летию со дня гибели Эвариста Галуа научный сотрудник одного из ленинградских НИИ Александр Сергеевич Любомудров написал о Галуа поэму, в которой есть такие строки:

Как это трудно – одному
Вдруг оказаться вне событий
И знать, что больше никому
Не объяснишь своих открытий.
Ученый мир тебе не внял,
Любовь и нежность обманули,
Ну а враги, ты это знал,
Словам предпочитают пули.
Как это трудно – в двадцать лет
Встречать последний свой рассвет!

Утром 30 мая 1832 г. какой-то крестьянин около пруда в местечке Жантийи наткнулся на тяжело раненого молодого человека. Его перевезли в больницу, где он скончался утром следующего дня на руках брата [24].

Только через 14 лет после смерти Галуа все сохранившиеся его работы (60 страниц рукописи) были разобраны и опубликованы Лиувиллем, редактором «Журнала чистой и прикладной математики». Он с трудом разобрался в сжатом тексте своего покойного ровесника и был поражен: как могли эти чудесные находки оставаться никем не замеченными и не повторенными так долго? Он отметил: «Референтам показались неясными формулировки молодого математика… Преувеличенное стремление к краткости породило этот недостаток, которого нужно в первую очередь стараться избегать, когда имеешь дело с отвлеченными и таинственными категориями чистой алгебры. Тому, кто намерен вести читателя к неизведанной земле, далеко от проторенной дороги, воистину необходима ясность» [13].

Признание к Галуа пришло еще позже – в 70-х годах XIX в.

Что же сделал Галуа? После того, как Абель показал, что алгебраические уравнения степени выше четвертой не разрешимы в общем виде, а решаются только в отдельных частных случаях, сам собою возник вопрос: как узнать по виду уравнения, разрешимо ли оно в радикалах? Абель начал заниматься этой проблемой, но не успел достичь цели.

Галуа хотелось понять самому и объяснить другим, почему уравнения высших степеней не решаются в радикалах. Он изобрел в этой области математики замечательную конструкцию. Оказалось, что можно присоединить к полю коэффициентов многочлена его нули и получить новое поле – расширение прежнего поля. Эту процедуру можно повторять много раз; в итоге возникает нечто вроде растущего кристалла, оси и грани которого обладают особой симметрией. И возможно, что от этой симметрии зависит разрешимость исходного уравнения!

Такова была дерзкая догадка Галуа. Она оказалась верной, поэтому автора считают гением. Но не только поэтому. Еще важнее то, что Галуа сумел довести свою гипотезу до строгой теоремы. Для этого ему пришлось создать первую математическую теорию произвольных симметрий – так называемую теорию Галуа. Именно Галуа ввел в науку понятия группы и подгруппы, изоморфизма и гомоморфизма групп.

Если мы хотим, чтобы все элементы большего поля F получались из элементов меньшего поля F_1 с помощью арифметических действий и извлечения корней, то факторгруппа симметрий поля F по симметриям поля F_1 должна не только существовать, но и быть циклической. При этом группа всех симметрий поля F разложится в конечную цепочку нормальных подгрупп с циклическими факторгруппами. Таким свойством обладают группы перестановок двух, трех или четырех символов. Поэтому все нули многочленов этих степеней выражаются через коэффициенты многочленов с помощью радикальных формул. Напротив, группы перестановок пяти или большего числа символов не имеют цепочки подгрупп с циклическими факторгруппами. Оттого соответствующие уравнения не разрешимы в радикалах.

Такова суть теории, созданной юным Галуа. Даже в наше время она выглядит сложно для неподготовленного человека. Каково же было современникам Галуа? Не удивительно, что при жизни Галуа никто не оценил его открытия по достоинству.

Сейчас имя Галуа – одно из самых популярных в математике. Группа Галуа, когомологии Галуа, поля Галуа – трудно перечислить все понятия и термины, которые носят его имя.

Немецкий математик Феликс Клейн в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» отмечает, что великие достижения Галуа простираются в следующих направлениях.

1. Он создал первую решительную по замыслу классификацию иррациональностей, определяемых алгебраическими уравнениями, учение, которое еще и сегодня носит краткое название теории Галуа.

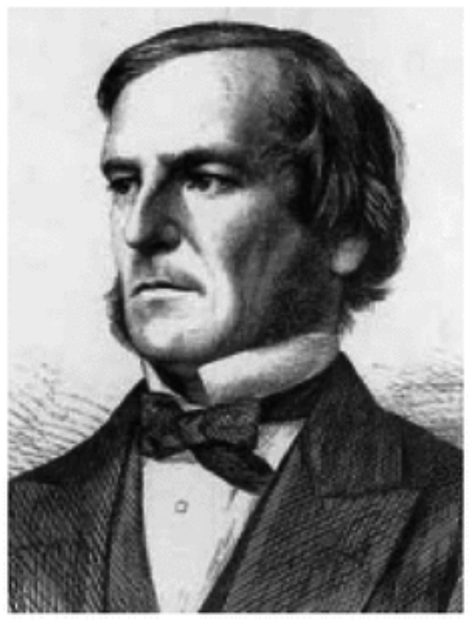
2. Он далеко продвинулся в своих занятиях интегралами от произвольных алгебраических функций одной переменной – как мы теперь говорим, *абелевыми интегралами* – и оставил в этой области результаты, позволяющие говорить о нем как о предшественнике Римана.

И возможно, в качестве третьего пункта следовало бы упомянуть еще об одном намеке, точный смысл которого трудно понять из-за чрезмерной сжатости изложения. В своем прощальном письме к Шевалье Галуа говорит об исследованиях, касающихся *ambiguite des fonctions* (двусмысленности функций); вполне возможно, что здесь содержится намек на идею римановой поверхности и на понятие многосвязности.

Однако выдающиеся достижения Галуа не могут быть оценены по достоинству без знания теории Галуа [42].

Значение работы Галуа состоит даже не в том, что он дал исчерпывающий ответ на вопрос, бывший три века вызовом всем математикам, а в созданном им методе, центральное место в котором занимают понятия группы и симметрии. Идеи Галуа оказались плодотворными во всех без исключения областях математики и теоретической физики. От абстрактной алгебры, до теории элементарных частиц – таков спектр применения общей идеи симметрии. За всю многовековую историю математики не было иного примера, чтобы столь малая по объему работа оказала столь значительное влияние на развитие науки.

Джордж Буль



Буль Джордж родился 2 ноября 1815 г. в Линкольне в семье торговца. Его отец Джон Буль был владельцем сапожной мастерской, но большую часть времени тратил на изготовление оптических приборов. Из-за трудного материального положения семьи Джордж смог окончить только начальную школу для детей бедняков и в других учебных заведениях не учился. У мальчика была фотографическая память. Любые факты или идеи, о которых он узнавал, запечатлевались в его мозгу подобно хорошо упорядоченной группе рисунков. В 12 лет он уже знал латынь, затем овладел греческим, французским, немецким и итальянским языками. В 14 лет им переведена с древнегреческого «Ода весне» Мелеагра. Едва Джорджу исполнилось 16 лет, он начал работать младшим учителем латыни и математики в методистской школе-пансионе для мальчиков.

С ранних лет Буль искал работу, оставляющую возможности для самообразования. После многих неудачных попыток ему удалось открыть маленькую начальную школу, в которой он преподавал сам. В 1838 г. Буль принял предложение занять место директора школы для детей состоятельных фермеров в Ваддингтоне, соседнем с Линкольном городке. Материальное положение Буля улучшилось, он смог перевезти к себе семью, а еще через два года открыл в пригороде Линкольна собственную школу. Вскоре она приобрела хорошую репутацию, а ее директор и владелец заслужил всеобщее уважение горожан.

Школьные учебники по математике поразили Буля своей нестрогостью и нелогичностью. Он вынужден был обратиться к сочинениям классиков науки и самостоятельно проштудировать обширные труды Лапласа и Лагранжа. Чтение этих работ вызывало у него много вопросов и порождало желание самостоятельно найти на них ответ. Может быть, отсутствие университетского образования стало причиной оригинального и своеобразного математического мышления Буля, и он обратил внимание на то, мимо чего прошли его выдающиеся предшественники. У него появились первые самостоятельные идеи [61].

Результаты своих исследований Буль сообщил в письмах профессору математики Кембриджского университета Дункану Грегори, редактору «Кембриджского математического журнала». Хотя Буль был совершенно неизвестен в математическом мире, оригинальность работы и стиль изложения поразили редактора. Он опубликовал статью «О некоторых теоремах в исчислении переменных» в следующем году и вступил в дружескую переписку с Булем, которая продолжалась вплоть до безвременной кончины Грегори. Буль в течение нескольких лет публикует в том же журнале статьи по операторным методам анализа, теории дифференциальных уравнений и алгебраических инвариантов. В 1844 г. Лондонское королевское общество наградило Буля золотой медалью за статью «Общий метод анализа».

В середине 40-х годов XIX в. Буль начинает усиленно заниматься проблемами логики. Он изобрел систему обозначений и правил, применимую ко всевозможным объектам, от чисел до предложений. Пользуясь этой системой, он мог закодировать высказывания (утверждения, истинность или ложность которых требовалось доказать) с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими, подобно тому как в математике манипулируют числами. Основными предложенными им операциями являются конъюнкция («и»), дизъюнкция («или»), отрицание («не»). В 1844 г. появилась его работа, в которой высказывалась идея объединения алгебры и логики. В 1847 г. вышла в свет статья Буля «Математический анализ логики, или опыт исчисления дедуктивных умозаключений», которая положила начало созданию «алгебры высказываний», получившей впоследствии название булевой алгебры. Если Лейбниц в свое время пытался арифметизировать логику, то Буль ее алгебраизирует, превращая в математическую науку. Вскоре он получил известность как оригинально мыслящий математик. Всего Булем было опубликовано порядка 50 статей в различных изданиях и несколько монографий.

В 1849 г. в графстве Корк (Ирландия) открылось новое высшее учебное заведение Куинз-колледж, в котором по рекомендации коллег-математиков Буль получил должность профессора. Только здесь у него появилась возможность не только обеспечить родителей, но и спокойно, без мыслей о хлебе насущном, заниматься наукой.

В 1854 г. появился главный труд Буля «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей». В нем отражено убеждение Буля о возможности изучения свойств математических операций, осуществляемых не обязательно над числами. Ученый говорил о символическом методе, который он применял как к изучению дифференцирования и интегрирования, так и к логическому выводу и к теоретико-вероятностным рассуждениям. Именно он построил один из разделов формальной логики в виде некоторой «алгебры», аналогичной алгебре чисел, но не сводящейся к ней. Буль не считал логику разделом математики, но находил глубокую аналогию между символическим методом алгебры и символическим методом представления логических форм и силлогизмов.

Через некоторое время стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания электрических переключателей схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифровых электронных компьютеров.

После 1854 г. Буль почти не публиковал трудов по математической логике, хотя продолжал работать в этом направлении, и ряд его статей и набросков сохранился в рукописях. Создается впечатление, что большую часть своего творческого потенциала в последнее десятилетие жизни Буль использовал как педагог. Для своих студентов в эти годы он написал и издал два учебника: по дифференциальным уравнениям и по методу конечных разностей.

В 1855 г. Буль женился на Мэри Эверест, которая помогала ему в работе и оставила интересные воспоминания о своем муже после его смерти. С материнской стороны Мэри приходилась племянницей профессору греческого языка в Королевском колледже, а с отцовской – племянницей вице-президенту колледжа сэру Джорджу Эвересту, именем которого названа Джомолунгма – высочайшая вершина мира в Гималаях. Мэри пережила мужа на 52 года. После его смерти она написала несколько сочинений, в которых пропагандировала идеи мужа. У них было пять дочерей. Третья дочь, Алиса, талантливый математик, почетный доктор Гронингенского университета, обладала прекрасным пространственным воображением и умела четко представлять четырехмерные фигуры. Сделанные ею модели четырехмерных многогранников (политопов) хранятся в Кембридже. Четвертая дочь, Люси, стала первой в Британии женщиной – профессором химии. Младшая дочь, Этель Лилиан, вышла замуж за эмигранта из Польши Уилфрида Войнича, и прославилась как автор романа «Овод» [61].

В 1857 г. Джордж Буль был избран членом Лондонского королевского общества. Умер он в Баллинтемпле (графство Корк, Ирландия) 8 декабря 1864 г.

Создание теории бесконечных множеств

Математиков издавна волновали вопросы бесконечности. В конце XVIII в. Берлинская академия наук во главе с Лагранжем объявила конкурс на «строгую и ясную теорию того, что в математике называется бесконечным». Победителя в этом конкурсе не было. Теорию бесконечных множеств создал в конце XIX в. немецкий математик Георг Кантор.

В случае конечных множеств самой разной природы всегда можно сказать, какое из них содержит больше элементов, а какое меньше. В случае бесконечных множеств этот вопрос становится гораздо более сложным, например: чего больше, натуральных чисел или рациональных, рациональных или действительных? Где больше точек, на отрезке или на всей прямой, на стороне квадрата или внутри квадрата?

На первый взгляд кажется, что ответить на эти вопросы совсем просто. Ведь множество натуральных чисел является частью множества рациональных чисел, а отрезок – частью прямой. Не ясно ли, что поэтому натуральных чисел меньше, чем рациональных, а точек на отрезке меньше, чем точек на всей прямой? Оказывается, все не так просто. Ведь ниоткуда не следует, что при переходе к бесконечным множествам сохранятся законы, выведенные из рассмотрения конечных множеств, например закон о том, что часть меньше целого.

Георг Кантор поставил задачу классифицировать актуально бесконечные множества по «числу» содержащихся в них элементов. Основная его идея сводилась к установлению взаимно однозначного соответствия между сравниваемыми множествами, т. е. разбиение множеств на пары, содержащие по одному элементу из каждого множества.

Если правило образования таких пар четко сформулировано и у одного множества после образования всех пар остались свободными элементы, то

его мощность больше, чем у другого множества. Кантор первым понял, что бесконечные множества могут подчиняться новым законам, не применимым к конечным множествам. Он определил бесконечное множество как *такое множество, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие со своим собственным, т. е. отличным от всего множества, подмножеством*.

Все множества, которые имеют столько же элементов, сколько имеет множество натуральных чисел, называют *счетными*. Иными словами, множество называют счетным, если оно бесконечно, но его элементы можно перенумеровать натуральными числами. Например, множество четных чисел, множество нечетных чисел, множество простых чисел, да и вообще любая бесконечная часть множества натуральных чисел являются счетными множествами.

Кантору удалось пронумеровать все рациональные числа. Но рациональные числа получаются из натуральных чисел с помощью лишь одной операции – деления (и еще, быть может, изменения знака). Добавим операцию извлечения корня и будем рассматривать все числа, которые можно получить из натуральных чисел с помощью этой операции и арифметических действий. Полученные числа – часть алгебраических чисел, являющихся корнями алгебраических уравнений вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $a_0 \neq 0$ и a_0, …, a_n – целые числа. Оказывается, что и это множество счетно, т. е. его элементы можно пронумеровать.

В XIX в. математики проявляли большой интерес к трансцендентным числам. Все числа делятся на алгебраические и трансцендентные. Числа, не являющиеся корнями алгебраических уравнений, называют *трансцендентными.* Ценой больших усилий французскому математику Жозефу Лиувиллю в 1844 г. удалось найти несколько трансцендентных чисел. А доказательство трансцендентности числа π, проведенное немецким математиком Фердинандом Линдеманом в 1882 г., было большим научным событием: ведь из него следовала невозможность квадратуры круга. Кантору удалось показать, что алгебраические числа, которые встречаются, казалось бы, очень часто, на самом деле являются величайшей редкостью по сравнению с трансцендентными числами.

Доказательство существования трансцендентных чисел, проведенное Г. Кантором в 1873 г., произвело большое впечатление на математиков. Ведь Кантору удалось доказать существование трансцендентных чисел, не строя ни одного конкретного примера таких чисел. Он просто показал, что множество алгебраических чисел счетно. Из этого следовало, что множество трансцендентных чисел несчетно, так как разность несчетного и счетного множества является несчетным. Доказательства такого типа математики называют *неконструктивными,* так как из доказательства Кантора нельзя непосредственно извлечь никакого конкретного примера трансцендентного числа. То, что является достоинством доказательства Кантора, одновременно является и его слабой стороной.

Любая бесконечная часть множества натуральных чисел счетна. Следовательно, не может существовать бесконечное множество, мощность кото-

рого была бы меньше мощности счетного множества. Исследования Кантора показали, что существуют несчетные множества, имеющие разные мощности, большие, чем мощность счетного множества. Доказать несчетность какого-либо множества вообще нелегко. Ведь доказать, что множество счетно, – значит просто придумать правило, по которому нумеруются его элементы. А доказать несчетность какого-либо множества – значит доказать, что такого правила нет и быть не может. Иными словами, какое бы правило мы ни придумали, всегда найдется незанумерованный элемент множества. Чтобы доказывать несчетность множеств, Кантор придумал очень остроумный способ, получивший название диагонального процесса. Таким способом он получил поистине удивительный результат: множество целых чисел равномощно множеству рациональных чисел, но меньше множества всех действительных чисел.

С 1871 по 1874 г. Кантор искал доказательство того, что мощность множества точек квадрата больше мощности множества точек на стороне квадрата. Время шло, а результата не было. И вдруг ему удалось построить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и точками его стороны, т. е. доказать утверждение, противоположное тому, на доказательство которого он потратил годы. Сначала он сам не поверил себе. Полученный результат был настолько неожиданным и так противоречил интуиции, что своему другу Дедекинду он написал: «Я вижу это, но не верю этому» [23].

Не только квадрат имеет столько точек, сколько их помещается на одной его стороне, но и куб имеет столько же точек, сколько их содержится на одном его ребре. Вообще любая геометрическая фигура, содержащая хотя бы одну линию, имеет столько же точек, сколько и отрезок. Такие множества Кантор назвал множествами мощности *континуума* (от лат. *continuum* – непрерывный). Мощность континуума Кантор обозначил символом c («це» готическое) и доказал, что $c = 2^{\aleph_0}$. Кантор рассмотрел два типа бесконечных множеств. Одни из них имеют столько же элементов, сколько и множество натуральных чисел, а другие – столько же, сколько и множество точек на прямой (множество действительных чисел), т. е. большее число элементов. Естественно, возникает вопрос: «Нет ли промежуточного множества, которое имело бы больше элементов, чем множество натуральных чисел, и меньше, чем множество точек на прямой?» Этот вопрос получил название *проблемы континуума* (*континуум-гипотезы*).

Среди 23 проблем, которые были сформулированы Гильбертом на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г., проблема континуума стояла под первым номером.

Кантор был убежден, что в построенной им бесконечной иерархии алефов, каждый из которых получается при возведении числа 2 в степень, равную предыдущему алефу, представлены все алефы, какие только могут быть. Алефов, которые занимали бы промежуточное положение между «ступеньками» иерархии бесконечностей, по Кантору, просто не существует, как не существует и последнего, «высшего», алефа.

Упорядоченные множества. Натуральные числа применяются не только для того, чтобы ответить на вопрос *сколько*, но и для того, чтобы ответить на вопрос *какой по порядку*. Хотя множество натуральных чисел имеет столько же элементов, сколько и множество всех целых чисел, упорядочены они совсем по-разному. У множества натуральных чисел есть самый первый элемент, а у множества всех целых чисел первого элемента нет.

Для изучения порядка расположения элементов во множестве, кардинальных чисел (мощностей) недостаточно, нужны новые понятия. Существует понятие упорядоченного множества. Говорят, что множество A упорядочено, если для любой пары его элементов определено понятие неравенства $a < b$, обладающее следующими свойствами: 1) если $a < b$, то $a \neq b$; 2) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Два упорядоченных множества A и B имеют один и тот же «порядковый тип», если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок элементов. Даже счетное множество может быть упорядочено различными способами. Ведь счетными являются и множество всех натуральных чисел, и множество всех целых чисел, и множество всех рациональных чисел. Упорядочены же они по-разному.

Чтобы хотя бы как-то разобраться в разнообразии упорядочений, Кантор выделил особый класс упорядоченных множеств, некоторые свойства которых напоминали свойства множества натуральных чисел. Если во множестве натуральных чисел выбрать любое непустое подмножество, то среди его элементов обязательно окажется самый меньший, самый левый. Множества, обладающие таким свойством, Кантор назвал вполне упорядоченными. Иными словами, упорядоченное множество A называют вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество имеет первый элемент.

Может случиться так, что при присвоении порядковых номеров элементам множества окажутся задействованными все натуральные числа. Тогда новое число, необходимое для нумерации следующего элемента, называют «трансфинитным» (от лат. *trans* – через, *finitae* – конечный). Трансфинитное число, сразу идущее за всеми натуральными числами 1, 2, 3, …, принято обозначать через ω.

Аксиома выбора. А можно ли вообще упорядочить любое множество, и если можно, то всегда ли удается из данного множества получить вполне упорядоченное? Ответ на этот вопрос искали многие математики, так как из положительного решения следовало бы, что любое бесконечное множество можно пронумеровать с помощью трансфинитных чисел.

Неожиданно простое и короткое решение опубликовал в 1904 г. ученик Гильберта Эрнст Цермело: ему удалось доказать, что всякое множество можно упорядочить (Кантор предугадал этот ответ еще в 1883 г.). Однако доказательство Цермело понравилось далеко не всем математикам. Дело в том, что оно опиралось на следующее утверждение: «Если дано бесконечное множество бесконечных множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу, не указывая заранее закона выбора». Впоследствии это утверждение стали называть *аксиомой выбора* или *аксиомой Цермело*.

Выяснилось, что аксиома выбора неявно использовалась при получении важнейших результатов. Долгие годы математики не сомневались в ее истинности. Но когда над ней стали размышлять глубже, она стала казаться все более и более загадочной. Многие из теорем, доказанных с помощью аксиомы выбора, совершенно противоречили наглядности. Например, Рассел об этой аксиоме говорил следующее: «Сначала она кажется очевидной; но чем больше вдумываешься в нее, тем более странными кажутся выводы из этой аксиомы; под конец же перестаешь понимать, что же она означает» [23].

Большинство математиков были против использования аксиомы выбора. За нее выступали только сам Цермело и Адамар. По словам Цермело, аксиома выбора имеет исключительно объективный характер, который сразу же ясен. Он признал, что она не самоочевидна, но научно необходима, поскольку используется для доказательства важных теорем.

В последнее время удалось доказать, что с аксиомой выбора дело обстоит так же, как и с континуум-гипотезой, т. е. что эта аксиома не противоречит остальным аксиомам теории множеств и не выводима из них. Примером парадоксального следствия из аксиомы выбора является следующее утверждение: можно так разбить шар на четыре равные части, что из двух частей можно составить целый шар того же радиуса, ничего к ним не прибавив, а только двигая их, как твердые тела. Из двух других частей можно составить второй такой же шар. Таким образом, из одного шара получилось два равных ему шара. Есть и другие странные следствия из аксиомы выбора.

Парадоксы теории множеств и возникшие проблемы. К концу XIX в. основные понятия канторовской теории бесконечных множеств получили признание. Официальное признание произошло уже на Первом Международном конгрессе математиков в 1897 г. в Цюрихе. Там Адамар и Гурвиц привели многочисленные примеры применения теории Кантора в анализе. Этому способствовал растущий авторитет Гильберта, явного сторонника теории множеств. Началось обоснование математики на основе теории множеств.

Триумфальному шествию теории множеств помешали антиномии, первые из которых обнаружил сам Кантор. Антиномия – это парадоксальная ситуация, когда можно убедительно доказать два взаимоисключающих суждения. В отличие от софизма, умышленно ложного умозаключения с замаскированной ошибкой, антиномии свидетельствуют о глубоких недостатках рассматриваемой теории, что обычно приводит к ее перестройке. Вначале антиномии математики предпочитали называть парадоксами, так как надеялись их, в конце концов, разрешить. Наибольшей известностью из нематематических парадоксов пользуется так называемый парадокс лжеца. Он известен со времен Аристотеля. В классическом варианте речь идет об установлении истинности или ложности высказывания: «Это утверждение ложно».

В 1895 г. у Кантора возникла идея о рассмотрении *множества всех множеств*. Мощность такого «сверхмножества» должна быть самой большой из возможных. Но еще ранее Кантор доказал, что множество всех подмножеств любого заданного множества должно обладать трансфинитным

числом, которое превосходит трансфинитное число, отвечающее исходному множеству. Следовательно, заключил Кантор, должно существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел. Придя к столь нелепому выводу, Кантор сначала растерялся, а затем решил, что множества можно разбить на противоречивые и непротиворечивые. Таким образом, множество всех множеств и соответствующее ему трансфинитное число попадали в разряд «противоречивых» и исключались из рассмотрения.

В письме Гильберту, написанном в 1896 г., Кантор признает недоказуемость непротиворечивости существования вполне упорядоченных множеств и алефов – основных объектов своей теории – и предлагает признать факт их недоказуемости за аксиому. Создав теорию множеств, Кантор не смог решить проблему континуума – центральный вопрос новой теории. Его новые математические идеи, как и философские взгляды, были не поняты многими математиками или не принимались ими.

Несмотря на то, что теория множеств нашла применение во многих разделах математики, некоторые ученые отказывались принимать актуальные множества и все, что с ними связано. Кронекер, испытывавший к тому же личную неприязнь к Кантору, называл его шарлатаном. Анри Пуанкаре считал теорию множеств тяжелой болезнью, своего рода математической патологией. В 1908 г. он заявил, что грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились. Против основных понятий теории множеств – актуальной бесконечности и трансфинитных чисел – выступили многие католические авторитеты.

У теории Кантора были не только противники, но и сторонники. Бертран Рассел назвал Кантора одним их великих мыслителей XIX в. В 1910 г. Рассел писал: «Решение проблем, издавна окутывавших тайной математическую бесконечность, является, вероятно, величайшим достижением, которым должен гордиться наш век». Ему вторил Давид Гильберт: «Никто не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором» [64]. Немецкий математик Феликс Хаусдорф в «Основаниях теории множеств» назвал теорию множеств областью, где ничто не является очевидным, где истинные утверждения нередко звучат парадоксально, а правдоподобные зачастую оказываются ложными.

На рубеже XIX–XX вв. были обнаружены и другие антиномии, связанные с основными понятиями теории множеств. Приведем некоторые примеры, вызвавшие наибольший резонанс. Парадокс Бурали-Форти (1897), известный Кантору еще в 1895 г., возник в канторовской теории ординальных чисел. В теории трансфинитных кардинальных чисел Кантор нашел парадокс в 1899 г. Парадокс Рассела (1902–1903), независимо от него открытый также Цермело, связан со множеством всех множеств, которые не являются элементами самих себя. Парадокс Ришара (1905), полученный по существу также Диксоном (1906), связан с понятием конечной определимости.

Особенно сильное впечатление на математиков произвела антиномия Рассела – Цермело: если M есть множество всех таких множеств, каждое из которых не является своим собственным элементом, то M является своим элементом тогда и только тогда, когда M не является своим элементом. По мнению Гильберта, эта антиномия вызвала в математике «эффект полной

катастрофы». Признав свое поражение, перестали заниматься теорией множеств Фреге и Дедекинд, считавшиеся крупными специалистами в этой области. Если мы запретим множество всех множеств, то получим конфликт с канторовским определением множества. Чтобы вообще имелась теория множеств, надо иметь теоремы, справедливые для всех множеств, а все множества, по канторовскому определению, образуют множество.

С. Клини утверждал, что за полвека, от появления парадоксов до написания им книги [43], не было найдено ни одного решения парадоксов, с которым бы все согласились.

Многие математики в начале XX в. попросту отмахивались от антиномий, не придавая им особого значения, так как их относили к теории множеств – тогда еще новому направлению математики. Постепенно математики поняли, что парадоксы теории множеств касаются не только этой теории, а имеют гораздо большее значение. Противоречия, вскрытые Кантором при попытке сопоставить трансфинитное число множеству всех множеств и множеству всех ординальных (порядковых) чисел, заставили математиков осознать, что они используют аналогичные противоречивые понятия и в старых, казалось бы, хорошо обоснованных традиционных разделах математики. Это ставит всех перед проблемой перестройки основ математики.

Движение за аксиоматизацию математики в конце XIX в. заставило ученых понять, сколь глубока пропасть, отделяющая науку от реального мира. Создание неевклидовой геометрии в значительной мере способствовало осознанию того, что геометрия является творением человека и лишь приближенно описывает происходящее в реальном мире. Это описание нельзя считать истинным потому, что оно не адекватно внутренней структуре окружающего мира и, следовательно, не обязательно непротиворечиво. Аксиомы выбираются так, чтобы задаваемые ими свойства находились в согласии с теми, которые мы интуитивно с ними связываем. Но мы не можем быть уверены в том, что выбранные аксиомы не привнесут некоторое нежелательное свойство, которое может привести к противоречию.

Развитие математики на протяжении XIX в. характеризовалось стремлением к систематизации, к установлению единства в многообразии математических фактов и методов, на первый взгляд весьма далеких друг от друга. Ценным было также критическое уяснение и строгое обоснование фундаментальных понятий. Эти стремления достигли наиболее полного выражения не только в формировании теории множеств, но и в арифметизации математики.

Арифметизацией математики называют сложившуюся в XIX в. тенденцию сведения всех основных фактов математической науки к операциям над натуральными числами. Утверждение, что любую теорему алгебры или анализа можно свести к рассуждениям о соотношениях между натуральными числами, завоевывало все большее количество сторонников. Кульминационным моментом в этом течении математической мысли было построение теории действительных чисел (Больцано, Вейерштрасс, Дедекинд, Кантор). Понятие числа постепенно осознается как фундаментальное понятие всей математики.

С учетом непрекращающихся попыток подвести прочный фундамент здания математики доказательство непротиворечивости перерастало в острейшую

необходимость исследования неясностей, самыми важными из которых были континуум-гипотеза и аксиома выбора. Перед математиками XX в. стояла задача решения следующих существующих в основаниях математики проблем:

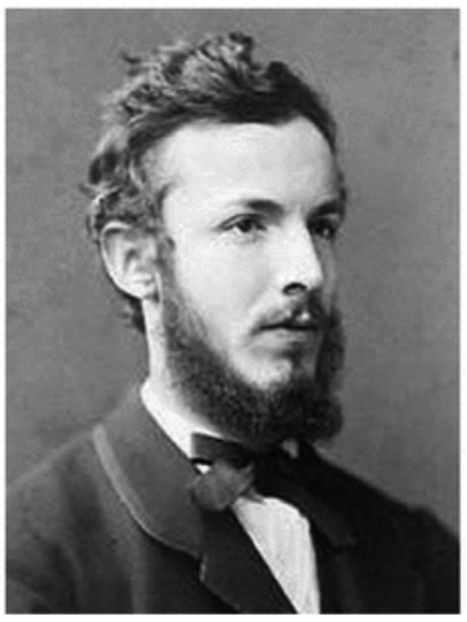
– принципиальной разрешимости любого математического вопроса;
– отыскания критерия простоты математического доказательства;
– соотношения между содержательным и формальным в математике;
– разрешимости математического вопроса с помощью конечной процедуры.

В дальнейшем, кроме парадоксов теории множеств, большие споры вызвал *закон исключенного третьего*. Он гласит, что *каждое высказывание является либо истинным, либо ложным*. Но закон исключенного третьего сам также является высказыванием. Следовательно, вопреки намерениям сформулировать всегда истинный закон логики, мы имеем высказывание, которое может быть истинным, но может быть и ложным. Рассел заявил, что такая формулировка логического закона лишена смысла. Были обнаружены, кроме того, противоречия во многих определениях, например в понятии «наименьшая верхняя граница».

Итак, в начале XX в. перед математиками возникло несколько трудных проблем. Требовалось устранить уже обнаруженные противоречия. Но еще более важным представлялось доказательство непротиворечивости всей математики, ибо без этого нельзя было гарантировать, что в будущем не возникнут новые противоречия. Дискуссии по поводу теории множеств Кантора и аксиомы выбора Цермело свелись к основному вопросу: «В каком смысле можно утверждать, что математические понятия существуют?» Некоторые математики начала XX в. (Борель, Бэр, Лебег) считали чистые доказательства существования бессмысленными.

Необходимость пересмотра основ математики с целью уничтожения парадоксов вызвала кризис основ математики, продолжавшийся примерно с 1900 по 1930 г. Хотя все единодушно признавали необходимость пересмотра, мнения о способе его проведения разделились.

Георг Кантор



Выдающийся немецкий математик Кантор Георг Фердинанд Людвиг Филипп родился 19 февраля 1845 г. Назвав Кантора немцем, мы всего лишь следовали традиции. Его отец родился в Дании, мать – в России. Сам он тоже родился в России, в Санкт-Петербурге. В этом городе он провел первые 11 лет своей жизни, о которых вспоминал с ностальгией. Его биографы указывают, что хотя свою взрослую жизнь он и прожил в Германии, уютно ему там не было. Он был старшим из четырех детей в семье Георга Вольдемара Кантора, преуспевающего коммерсанта, и Марии Анны Бём, происходившей из талантливой музыкальной семьи. Родители оказали заметное влияние на сына: отец научил быть настойчивым в достижении своих целей, привил интерес к гуманитарным наукам, а благодаря матери мальчик стал верить в Бога.

После того как Георг окончил в Петербурге начальную школу, семья переехала в Германию. Учился он в гимназии в Висбадене, в частной школе во Франкфурте-на-Майне и еще в нескольких учебных заведениях. В 1863 г. Кантор перешел из Высшей технической школы в Цюрихе в Берлинский университет, и там изучал математику, физику и философию. Его учителями были Вейерштрасс, Куммер, Кронекер.

Сначала математические интересы Кантора были сосредоточены в области теории чисел. К ней относятся его диссертация «О неопределенных уравнениях второй степени» (1867) и ряд последовавших за ней работ, в том числе и исследование «О преобразовании тернарных квадратичных форм» (1869), за которое он получил звание приват-доцента Галльского университета с правом чтения лекций.

В Галле интересы Кантора сместились, в основном под воздействием профессора университета Г. Гейне, в сторону функций действительного переменного. Вскоре появился цикл его работ, посвященный этой тематике.

В 1872 г. Кантор был избран экстраординарным профессором университета в Галле и в том же году познакомился с Дедекиндом, который уже занимался исследованиями в области теории множеств. В 1879 г. он избирается ординарным профессором Галльского университета. Основные труды Кантора по теории множеств были созданы до 1884 г.

В подготовке перехода Кантора на позиции теории множеств значительную роль сыграли его философские интересы. Введя в рассмотрение актуально бесконечные множества, Кантор выступил против традиционных представлений о бесконечности, разделяемых великими математиками прошлого.

Теория множеств Кантора оригинальна, в ней бесконечность рассматривается с новой и трудно приемлемой точки зрения. Согласно традиционному понятию бесконечность есть нечто «неограниченно увеличивающееся» (этот тип бесконечности называется «потенциальной бесконечностью»). В теории Кантора она представляет собой совсем другое – не увеличивающееся, а «математически зафиксированное числами в определенной форме завершенной бесконечности» (этот тип бесконечности называют актуальной бесконечностью). К этому понятию «завершенной бесконечности» Кантор был вынужден прийти. Позже он писал: «…под давлением логики, почти против своей собственной воли, ибо оно противоречило традициям, которые я ценил» [66].

Одним из ключевых вопросов теории множеств Кантора было высказанное им предположение, что по количеству элементов континуум действительных чисел идет сразу вслед за натуральным рядом. Это предположение называют гипотезой континуума или континуум-гипотезой, а задачу доказательства или опровержения этой гипотезы – проблемой континуума. В 1877 г. Кантор объявил, что континуум-гипотеза представляет собой математическую истину, и с 1879 г. начал отдельными порциями публиковать трактат, имеющий целью эту истину доказать. Кантор рассматривает проблемы равномощности, теорию совершенно упорядоченных множеств, топологические свойства R и R^n, проблему меры. Статья с шестой порцией была завершена 15 ноября 1883 г. Она содержала доказательство того факта, что промежу-

точное множество заведомо отсутствует в определенном классе множеств (а именно в классе замкнутых множеств), а также обещание в последующих статьях доказать, что такого множества вообще не существует, т. е. доказать гипотезу в полном объеме. Однако обещанных статей не последовало.

Кантор осознал, что он не может доказать континуум-гипотезу. В 1883 г. он признался, что оказался в своего рода оппозиции к общепринятым взглядам на математическую бесконечность и к нередко отстаиваемым суждениям о природе чисел. В середине XX в. было установлено, что ни доказать, ни опровергнуть континуум-гипотезу невозможно. Философы и математики отвергали концепцию актуальной бесконечности со времен Аристотеля, главным образом вследствие тех логических парадоксов, к которым она приводит.

Теологи (например, Фома Аквинский) также были против идеи актуальной бесконечности, считая ее прямым вызовом единой и абсолютно бесконечной природе Бога. Георг Кантор был человеком верующим. Хотя у него не было твердых религиозных убеждений, и он метался между кальвинизмом и католицизмом, высказывалось мнение, что основная идея Кантора об эквивалентности части бесконечного множества всему множеству возникла у него по аналогии с христианской доктриной о трех ипостасях (Отец, Сын и Дух Святой) единого Бога, каждая из которых также является Богом.

В мае 1884 г. Кантор испытал первый приступ маниакально-депрессивного психоза, продолжавшийся около месяца. Временно он отошел от преподавания математики и начал читать лекции по философии Лейбница. Эти лекции не понравились студентам, и он дал обещание впредь лекции по философии не читать. Отвлекали Кантора от математики и домашние заботы. В 1886 г. в семье появился шестой ребенок, и пришлось хлопотать о приобретении нового дома. Кроме того, Кантор был создателем и первым председателем Немецкого математического общества.

В 1870-х годах, когда Кантор приступил к созданию теории бесконечных множеств, и еще много лет спустя, эта теория находилась на периферии математической науки. Доказанные Кантором теоремы о тригонометрических рядах не были столь уж фундаментальными. Но к началу XX в. канторовская теория множеств нашла широкое применение во многих областях математики. Кантор и Дедекинд понимали, сколь важна теория множеств для обоснования теории целых чисел, для анализа понятий линии или размерности и даже для оснований математики. Другие математики, в частности французы Эмиль Борель и Анри Лебег, к тому времени уже работали над обобщением интеграла, в основу которого была положена канторовская теория бесконечных множеств.

Сначала Кантор отказывался от введения трансфинитных чисел. Он преодолел свое предубеждение, когда понял, что без трансфинитных чисел нельзя построить теорию бесконечных множеств. Собственные первоначальные сомнения позволили Кантору предвосхитить оппозицию с разных сторон и вооружиться как философскими и теологическими, так и математическими аргументами.

С 1893 г. Кантор ввел специальные символы для обозначения количеств элементов в бесконечных множествах, используя букву «алеф» – первую букву

еврейского алфавита. Символом $\aleph_0$ (алеф-нуль) он обозначил мощность множества натуральных чисел, являющегося наименьшим по мощности бесконечным множеством.

Возможно, под влиянием Дедекинда, выдвинувшего идею построения теории множеств как фундамента арифметики (а через программу арифметизации и всей математики), Кантор попытался переделать свою прежнюю теорию как нечто независимое и, более того, как нечто, предшествующее всей математике. В 1895–1897 гг. он опубликовал свою фундаментальную работу «К обоснованию учения о трансфинитных множествах». В отличие от предшествующего цикла статей «О бесконечных линейных точечных многообразиях», в которых теория множеств рассматривалась как верхний этаж здания математики, опирающийся на остальные разделы математики, в новой работе теория множеств рассматривалась как фундамент всей математики. При этом арифметику Кантор попытался сделать очень узким частным случаем создаваемого учения.

В 1897 г. Кантор посетил I Международный конгресс математиков в Цюрихе, где его прекрасно приняли. После Кантор уже не публиковал научных работ.

С 1899 г. у него начали учащаться приступы нервной болезни, в октябре он был освобожден от университетских обязанностей на целый семестр, в декабре умер его младший сын. Приступы болезни и освобождение от преподавательской деятельности повторились в 1902/03, 1904/05, 1907/08 учебных годах, почти в течение всего 1909 и 1911 гг. А уже в 1913 г. он вышел в отставку. Вместе с тем в первые годы XX в. Кантор, неудовлетворенный своим положением в Германии, пытался получить место профессора в одном из университетов Великобритании и даже заводил речь о переезде в Америку. Однако он все чаще попадал в специальные больницы и 6 января 1918 г. умер в психиатрической лечебнице в Галле.

Глава 5

СПОРЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ

> В математике далеко не все бесспорно, и математика не является законченной формой человеческого мышления. Она находится в стадии исканий, относящихся к самым принципиальным, самым важным, самым трудным сторонам мыслительной деятельности.
>
> *П.С. Александров*

Интуиция и логика в математике

Прогресс математики представляет собой цепочку интуитивных озарений, впоследствии получавших обоснование. В действительности математик не полагается только на строгое доказательство, как обычно считают. Его идеи обретают для него смысл до всякой формализации, и именно их смысл сам по себе является для него реальностью. Великие математики заранее, еще до того, как им удавалось найти логическое доказательство, знали, что какая-то теорема верна, и иногда ограничивались всего лишь беглым наброском доказательства. Гаусс, например, говорил, что его результаты ему давно известны, он только не знает, как к ним придет. Более того, Ферма в своей обширной классической работе по теории чисел и Ньютон в работе по кривым третьего порядка не привели даже набросков доказательств. Прогрессу математики, несомненно, способствовали люди, наделенные не только способностью проводить строгие доказательства, но и необычайно сильной интуицией.

По этому поводу М. Клайн в работе «Математика. Утрата определенности» писал: «Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия – блуждающие огоньки, химеры, не имеющие пристанища в математическом мире. Строгого определения строгости не существует. Доказательство считается приемлемым, если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент. Никакого общепринятого критерия строгости в современной математике не существует». Доказательства одного поколения воспринимаются другим поколением как ворох логических ошибок. Можно считать, что ни одно доказательство не является окончательным.

Нельзя не признать важнейшего значения логики для математики. Если интуиция – господин, то логика – всего лишь слуга, но это тот случай, когда слуга обладает определенной властью над господином. Логика сдерживает необузданную интуицию, когда та отбрасывает всякую осторожность. Интуиция может и обмануть. Так, крупнейшие математики XIX в. считали, что любая непрерывная функция имеет производную, пока Вейерштрасс не указал непрерывную функцию, ни в одной точке не имеющую производной.

Начало логике как науке было положено сочинением Аристотеля «Органон» («Инструмент [мышления]»). Логика Аристотеля в основном представляла собой набор силлогизмов – правил о выводе новых утверждений из известных.

Декарт задался вопросом: «Откуда нам известно, что законы логики правильны?» И сам же ответил, что Господь Бог не стал бы умышленно вводить людей в заблуждение.

Лейбниц считал, что для построения универсальной логики необходимы три основных элемента:

– универсальный научный язык, применимый ко всем истинам, выводимым посредством рассуждений;

– исчерпывающий набор логических форм мышления, позволяющих осуществить любой дедуктивный вывод из начальных принципов;

– набор основных понятий, алфавит мышления.

Ни Декарту, ни Лейбницу не удалось развить последовательно символическое исчисление логики. Они создали лишь отдельные фрагменты. Вплоть до XIX в. логика Аристотеля сохраняла свои позиции. В 1797 г. Кант во втором издании «Критики чистого разума» назвал логику «замкнутым и полным учением».

В XIX в. была разработана математическая логика, на основе которой стали доказывать теоремы математики. Допустимое соотношение логики и интуиции при получении новых математических результатов у разных творцов математики может заметно отличаться. Об этом будет подробнее рассказано далее.

Еще до начала XX в. было провозглашено и даже разработано несколько новых подходов к пониманию сути математики. Ключевым вопросом, на который различные группы математиков давали разные ответы, был вопрос о том, существует ли математика объективно вне человеческого разума. Если так, то математики просто открывают истины, если же она изобретена человеком, то математики придумывают теоремы. Обе точки зрения имели много сторонников в процессе развития математики. В зависимости от того, какой точки зрения придерживался ученый, исповедовалось разное отношение к теоремам существования в математике.

Платон считал, что математические конструкции не зависят от опыта и даже предшествуют ему. В существовании математики он видел доказательство существования бессмертной души. Согласно утверждению Платона, формулировка новой теоремы – это акт воспроизведения того, что хранилось в памяти. Блез Паскаль был убежден в истинности математических законов природы. До начала XIX в. подобных взглядов придерживались практически все математики. Один из выдающихся французских математиков XX в. Жак Адамар в работе «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» утверждал: «Хотя истина еще не известна нам, она предшествует и неизбежно подсказывает нам путь, которым мы должны следовать» [41]. Годфрид Харди в «Апологии математики» писал: «Я убежден в том, что математическая реальность лежит вне нас, и наша роль заключается в том, чтобы открывать или наблюдать ее,

а теоремы, которые мы доказываем и столь пышно именуем нашими “творениями”, в действительности представляют собой просто записи наших наблюдений» [41]. Математики, по мнению Харди, только открывают понятия и их свойства.

Аристотель считал, что математика всецело является продуктом человеческой мысли, и математик – изобретатель, а не открыватель. В XIX в. этой точки зрения придерживались многие математики. Дедекинд, обращаясь к Г. Веберу, писал: «По-моему, то, что мы понимаем под числом, само по себе есть не класс, а нечто новое… созданное нашим разумом. Мы – божественная раса и обладаем… способностью творить» [41]. Вейерштрасс считал, что истинный математик всегда поэт.

А создает ли поэт и художник новое? Может быть, художники и поэты тоже открыватели, а не творцы? Поэт А.К. Толстой писал:

> Тщетно, художник, ты мнишь, что творений своих ты создатель,
> Вечно носились они над землею, незримые оку.
> Много в пространстве невидимых форм и неслышимых звуков,
> Много чудесных в нем есть сочетаний и слова, и света.

Логицизм, интуиционизм, формализм

Математику, построенную на основе теории множеств Кантора, будем называть классической. Попытки избавиться от парадоксов теории множеств, т. е. исправить классическую математику, привели, по большому счету, к трем направлениям в исследовании оснований математики.

Первое направление состояло в попытке представить математику как часть логики, и все математические определения дать в виде терминов логических понятий. Такое направление в математике стали называть логицизмом, а его сторонников – логицистами.

Альтернативным было второе направление, сторонники которого призывали отказаться от теории бесконечных множеств, т. е. от рассмотрения актуальной бесконечности. Такое направление в математике стали называть интуиционизмом, его приверженцев – интуиционистами, а математику, построенную на этих принципах – интуиционистской. Но интуиционистская математика оказалась сильно усеченной по сравнению с классической.

Третье направление состояло в отказе от теории бесконечных множеств в варианте Кантора и разработке таких систем аксиом теории бесконечных множеств, которые не приводят к появлению парадоксов. Такое направление в математике стали называть формализмом, а его сторонников – формалистами. Разберем эти направления подробнее.

Логицизм. Основоположниками логицизма считаются английский философ и математик Бертран Рассел и англо-американский философ и математик Алфред Норт Уайтхед, опубликовавшие в 1910–1913 гг. трехтомник «Основания математики» [80]. В этой работе, оказавшей огромное влияние на последующее развитие символической логики, был усовершенствован логический язык и предпринята попытка свести всю математику к логике.

Основной тезис логицистов сводился к утверждению, что математика может быть полностью выведена из логики, так как в законах логики заключены незыблемые вечные истины. Если законы логики истинны, то истинна и математика. А поскольку истина не противоречива, математика должна быть непротиворечивой. Впервые эти идеи высказал Лейбниц. Развивали их Дедекинд, Фреге и Рассел.

Рассел считал, что принципы логики и объекты математического знания существуют независимо от разума и лишь воспринимаются разумом. Знание объективно и неизменно. Свою позицию Рассел ясно изложил в книге «Проблемы философии». В «Принципах математики» он обобщил свои взгляды в отношении физической истинности математики. Затем эти идеи были развиты в [80].

Среди математических определений встречаются непредикативные, когда то, что определяется, принимает участие в собственном определении. Пуанкаре и Рассел считали, что причина парадоксов лежит именно в непредикативности определений.

Чтобы приспособить логицистическое построение математики к той ситуации, которая возникла в связи с открытием парадоксов, Рассел разработал теорию типов, посредством которой исключил непредикативные определения. Для этого он ввел аксиому сводимости и использовал аксиому бесконечности и аксиому выбора. Дедукция математики, которую логицисты считали частью логики, была выполнена на этой основе с помощью логического символизма. В аксиомы предлагается поверить или, по крайней мере, предлагается принять их как вероятные гипотезы о мире. Сомнения относительно гипотезы сводимости остаются. Во введении ко второму изданию (1925) авторы писали: «Эта аксиома имеет чисто прагматическое оправдание: она приводит к желаемым результатам и, насколько известно, ни к каким другим. Но, конечно, эта аксиома не такого рода, чтобы мы могли остаться ею довольны» [43]. Ни Уайтхеду, ни Расселу, ни их последователям не удалось конструктивным путем достичь основной цели логицизма.

Математика становилась не более чем естественным продолжением логических законов и предмета логики. Логистический подход к математике подвергся резкой критике. Сильные возражения вызвала аксиома сводимости, которая многим математикам казалась совершенно произвольной. Ее безоговорочно отвергал Герман Вейль и критиковал Анри Пуанкаре.

Использование трех спорных аксиом поставило под сомнение основной тезис логицизма о возможности вывести всю математику из логики. Математики стали искать ошибку, вкравшуюся в формальную логику. Ошибку они усмотрели в классическом определении понятия множества, согласно которому множество – это объединение в одно целое различных объектов нашей мысли, т. е. множество предполагается построенным, завершенным. Это определение имеет аналогию с определением актуальной бесконечности, которая тоже является завершившейся, уже осуществившейся бесконечностью. Поэтому сложности, связанные с теорией множеств, автоматически переносятся на логический аппарат, даже если все рассуждения формально верны.

Основная цель логицистов – сведение всей математики к логике – не была выполнена, так как оказалось невозможным вывести из чисто логических аксиом существование бесконечных множеств. В работах Фреге и Рассела был создан богатый логический аппарат, в результате чего математическая логика стала полноценной математической дисциплиной. Получили точную формулировку такие понятия, как «иррациональное число», «непрерывность», «производная», «интеграл» и т. п., хотя многие математики не одобрили новой терминологии и сочли точные определения своего рода причудами, не обязательными для понимания математики и даже для построения строгих доказательств.

Интуиционизм. В то время, когда о логицизме только заговорили как о новом направлении в разработке основ математики, группа математиков, называвших себя интуиционистами, предложила совершенно иной подход, диаметрально противоположный логическому. Они пытались обосновать истинность собственно математики, ссылаясь непосредственно на человеческий разум. Выводы из логических принципов интуиционисты считали менее надежными, чем непосредственно интуитивные соображения. Открытие антиномий не только укрепило недоверие к логическим принципам, но и ускорило процесс формулировки основных представлений интуиционизма.

Математический интуиционизм – это не разновидность философского интуитивизма, а особое направление в обосновании математики и особая разработка многих математических разделов, таких как математическая логика, теория континуума, дифференциальное и интегральное исчисления, теория множеств, топология, теория функций и т. д. Поэтому отождествление интуиционизма и интуитивизма недопустимо.

Определение интуиционизма можно привести из книги А. Гейтинга «Обзор исследований по основаниям математики. Интуиционизм. Теория доказательства». Согласно этому источнику, к интуиционистам принадлежат математики, которые считают, что 1) математика обладает не только формальным, но и содержательным значением; 2) математические предметы непосредственно постигаются мыслящим духом, следовательно, математическое познание не зависит от опыта.

Интуиционизм можно описать как направление в математике, в котором не используют идеи актуальной бесконечности, отвергают логику как науку, предшествующую математике, и рассматривающее интуитивную ясность и убедительность как основные естественные требования при обосновании математики и в логических построениях. Истоки интуиционизма можно найти в трудах Декарта и Паскаля. Многие положения интуиционизма были предвосхищены Кантом.

Феликс Клейн, рассматривая в своих «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» творчество Римана, говорил: «…математические доказательства, вынуждающие нас своей убедительностью принять их, замыкают теорию, как замыкает свод его последний, замковый камень. Конечно, отказавшись от такого характера своих доказательств, математика подписала бы себе смертный приговор. Однако то, как ищутся новые задачи, как предчувствуются новые результаты, как обнаруживаются новые факты и связи, – все

это навсегда остается секретом творческой лаборатории гения. Не создавая новых концепций, не ставя новых целей, математика со всей логической строгостью ее доказательств скоро исчерпала бы себя и впала в состояние застоя, полностью израсходовав весь свой материал. <…> С этой точки зрения максимальное содействие развитию нашей науки оказывают математики, выделяющиеся не столько строгостью доказательств, сколько интуицией» [42].

Предшественником интуиционизма был Леопольд Кронекер. Широко известно его высказывание о том, что Господь Бог создал целые числа, все остальное – дело рук человеческих. Сложную логическую концепцию целого числа Кантора и Дедекинда, базирующуюся на теоретико-множественной основе, Кронекер считал менее надежной, чем непосредственное принятие целых чисел. По его мнению, целые числа интуитивно понятны и не нуждаются в более строгом обосновании. Бесконечные множества и трансфинитные числа он полностью отвергал, так как считал возможным иметь дело только с потенциальной бесконечностью. С его точки зрения, все, что сделал в этой области Кантор, было не математикой, а мистикой.

Пуанкаре утверждал, что актуальной бесконечности не существует и то, что мы называем бесконечностью, представляет собой неограниченную возможность создания новых объектов независимо от того, сколько объектов уже существует.

Кронекер, Борель, Лебег, Пуанкаре и Бэр, высказывавшие сходные с интуиционизмом идеи до его оформления, критиковали стандартные математические рассуждения и логический подход, но их собственный вклад в развитие интуиционизма был фрагментарным и случайным. Их идеи были учтены в версии, разработанной голландским математиком, основоположником философии интуиционизма Лейтзеном Брауэром.

Официальной датой рождения интуиционизма можно считать 1907 г., когда появилась диссертация Брауэра, содержащая изложение его концепции. В статье «Недостоверность логических принципов» (1908) Брауэр бросил вызов вере: «Правила классической логики, дошедшие до нас по традиции от Аристотеля, являются абсолютно законными, независимо от содержания того, к чему они прилагаются». Согласно взглядам Брауэра, классическая логика была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств. Забывая об этом ограниченном происхождении, впоследствии эту логику приняли ошибочно за нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике, и стали применять ее без какого-либо оправдания к математике бесконечных множеств. В бесконечных множествах нарушаются, по крайней мере, два принципа конечных множеств: целое больше любой собственной части, во всяком множестве натуральных чисел имеется наибольшее число. Интуиционисты считают недопустимым практиковавшееся «классиками» обращение с объектами математики, для которых существенна идея бесконечности, с помощью средств, отработанных на конечных совокупностях.

Логические принципы – это закономерности, наблюдаемые апостериори в языке. Логика – это наделенное внутренней структурой словесное постро-

ение. Она строится на математике, а не математика на логике, обладающей гораздо меньшей определенностью, чем наши интуитивные представления, и поэтому математика не нуждается в поддержке со стороны логики.

Для Брауэра математика тождественна «точной» части наших мыслей, которая основана на первичной интуиции последовательности натуральных чисел, и которую невозможно без искажения перевести в формальную систему. Никакая наука, – в частности, ни философия, ни логика – не может служить основой для математики. Применение в качестве средств для доказательств каких-либо философских или логических принципов приводит к замкнутому кругу, потому что в основе таких принципов лежат математические понятия. Доказательство убедительно не в силу логических правил, установленных раз и навсегда, а в силу непосредственной очевидности каждого своего звена. Кроме того, «имеются общие правила, посредством которых из данных математических теорем можно интуитивно ясным образом получать другие; теорию этих соотношений можно рассматривать в некоторой “математической логике”, которая при этом является отраслью математики и не имеет ощутимых применений вне математики» [43].

Не признавая априори обязательных логических принципов, Брауэр тем самым отвергал математическую задачу вывода заключений из аксиом. Следовательно, наряду с логицизмом, Брауэр отвергал и аксиоматизацию математики, предпринятую в конце XIX в. Математика не обязана почтительно относиться к правилам логики. Знание математики не требует знания формальных доказательств, и поэтому парадоксы не существенны. Парадоксы являются дефектом логики, а не математики. Непротиворечивость возникает как следствие правильных размышлений, а о правильности размышлений мы судим интуитивно.

В логике следует принимать только ясные, интуитивно приемлемые логические принципы, поэтому из логики следует выбросить то, что вызывает антиномии, например закон исключенного третьего. В течение тысячелетий математики не сомневались в том, что для любого утверждения A существуют только две возможности – либо A, либо не A. Брауэр настаивал на том, что существует третья возможность – среднее, которое нельзя исключить.

Следствия из закона исключенного третьего можно проверить интуитивно для конечных множеств и нельзя проверить для бесконечных. Г. Вейль позже писал, что принцип исключенного третьего может быть верным для Господа Бога, как бы обозревающего единым взглядом бесконечную последовательность натуральных чисел, но не для человеческой логики. В работе 1923 г. Брауэр привел примеры теорем, которые нельзя считать доказанными, если отрицать применение закона исключенного третьего к бесконечным множествам.

Закон исключенного третьего для бесконечных множеств Брауэр отвергает не потому, что математикам до сих пор не удалось решить ту или иную конкретную проблему. По его мнению, для возможности принятия этого закона должен быть изобретен метод, пригодный для решения не только всех нерешенных математических проблем, но и любых других, которые могут быть когда-либо предложены.

В литературе классической обычно называют математику, которая не учитывает критику Брауэра, а математику, с методами которой согласен Брауэр – интуиционистской. Классическая математика содержит как интуиционистскую, так и неинтуиционистскую часть. Неинтуиционистская математика, которая доминировала в теориях Вейерштрасса, Дедекинда, Кантора, и интуиционистская математика Брауэра существенно различаются во взглядах на бесконечность. У Брауэра бесконечность только потенциальная (конструктивная), в классической математике – актуальная. Гаусс в 1831 г. писал: «Я возражаю… против употребления бесконечной величины, как чего-либо завершенного, что никогда не позволительно в математике» [43]. Допуская существование сколь угодно больших натуральных чисел, интуиционисты выступают против рассмотрения натурального ряда как завершенного множества. Они считают, что в математике всякое доказательство существования того или иного объекта должно быть конструктивным, т. е. должно сопровождаться построением этого объекта.

Брауэр и его сторонники не ограничивались критикой и пытались построить математику на конструктивной основе. Главным интуиционистским методом доказательства является математическая индукция. Интуиционисты не принимают неконструктивные или косвенные доказательства существования, которые встречаются в классической математике. Рассуждения формалистов, выходящие за пределы того, что допускает интуиционизм, отвергаются, так как им нельзя придать смысл, к которому можно было бы применить интуитивное понятие истины.

По выражению Г. Вейля, неконструктивные доказательства извещают мир о том, что сокровище существует, не указывая при этом его местонахождение, т. е. не позволяя это сокровище использовать. Такие доказательства не могут заменить построение. Подмена конструктивного доказательства неконструктивным влечет за собой утрату смысла и значения самого понятия «доказательство». Классическое и аксиоматическое построения системы действительных чисел, математический анализ, современная теория функций действительного переменного, интеграл Лебега и многие другие понятия и теории не приемлемы с точки зрения интуиционистов. Чтобы гарантировать надежность оснований математики, они готовы были даже пожертвовать какими-то разделами классической математики и не считали слишком высокой ценой отказ от «рая» канторовской теории трансфинитных чисел.

Интуиционисты смогли не только перестроить на конструктивной основе элементарные разделы алгебры и геометрии, но и построить целую новую математику, включая теорию континуума и теорию множеств. Однако перестройка происходила чрезвычайно медленно. Интуиционисты приходят к результатам, сильно отличающимся от классических теорем. В целом интуиционистская математика как замена для классической математики оказалась менее мощной и во многих случаях более сложной. В этой математике, по-своему очень заманчивой, встречаются понятия, которых нет в классической математике.

Математики, принадлежащие к научной школе Бурбаки, недовольные медленным прогрессом в получении новых результатов интуиционистами,

отмечали, что интуиционистская школа, о которой математики вспоминают как о своего рода историческом курьезе, во всяком случае, оказала услугу математике тем, что заставила своих противников, т. е. подавляющее большинство математиков, яснее осознать причины их веры в математику.

Несмотря на критику интуиционистской философии математиками других направлений и на ограничения, наложенные ее представителями на математику, в целом интуиционизм пошел математике на пользу. На первый план выдвинулся вопрос: «Что означает в математике существование?», впервые серьезно обсуждавшийся в связи с аксиомой выбора. Неограниченное, наивное использование закона исключенного третьего также явно нуждалось в пересмотре.

Положительный вклад интуиционистов в исследование вопросов оснований математики выразился в том, что они еще раз обратили внимание на различие между конструктивным и неконструктивным в математике. Их анализ трудностей, с которыми столкнулась математика в своем развитии, способствовал преодолению этих трудностей. Основной недостаток интуиционизма заключается в том, что интуиционистская математика, по сравнению с классической, является, с одной стороны, более сложной и громоздкой, с другой – более ограниченной и узкой.

Формализм. Если логицисты пытались бороться с парадоксами теории множеств исключением непредикативных определений, а интуиционисты – отказом от теории множеств Кантора, то Давид Гильберт, критически относившийся и к логицизму, и к интуиционизму, выбрал третий путь. До этого он успешно провел аксиоматизацию геометрии, поэтому в построении оснований математики опирался на аксиоматический метод.

Среди многих критических замечаний, высказываемых Гильбертом в адрес логицизма и интуиционизма, одним из основных было то, что представители этих направлений не смогли доказать непротиворечивость математики. С появлением в XIX в. аксиоматической точки зрения требование непротиворечивости становится все более настоятельным.

Для Гильберта доказательство непротиворечивости было равносильно доказательству существования. Традиционным методом доказательства непротиворечивости какого-либо раздела математики считался метод построения его модели, взятой из другой теории, непротиворечивость которой не вызывала сомнений. До конца XIX в. считалось, что в теории целых чисел, с точки зрения интуиции, нет противоречий. После появления парадоксов в теории множеств возникли сомнения в непротиворечивости арифметики, и от этой неуверенности необходимо было избавиться.

В 1904 г. на Втором Международном конгрессе математиков в Гейдельберге Гильберт предложил идею обоснования математики, сводившуюся к доказательству непротиворечивости арифметики. Воплощение в жизнь этой идеи он возложил на своих учеников, а сам начал заниматься физикой. К проблеме обоснования математики он вернулся только в 1917 г.

Ученики Гильберта начали с уточнения теории множеств. В обнаружении парадоксов теории множеств они видели ситуацию аналогичную появлению неевклидовой геометрии, и считали, что можно справиться с кризисом,

не обращаясь к интуиции, а ограничиваясь исправлением положения на основе формального применения аксиоматического метода. Это должно быть сделано так, чтобы в аксиоматизированную теорию были включены, по мере возможности, все результаты теории Кантора, и чтобы в ней не существовали парадоксальные множества.

В развитии теории множеств можно выделить два этапа. Первым этапом считают «наивную» теорию множеств, созданную Кантором. Она является образцом подлинного математического стиля, характеризующегося не нагромождением искусственных вычислительных приемов, а умением получать нетривиальные результаты путем размышлений при минимуме применяемого аппарата. После ее создания выяснилось, что рассуждения, подобные тем, что использует Кантор, приводят к парадоксам.

Обсуждение парадоксов способствовало второму рождению теории множеств, уже не «наивной», а строгой, формализованной (второй этап). Математики понимали, что основные предпосылки теории подлежат уточнению. Рассуждения, приводящие к парадоксальным заключениям, требовали особого внимания, и их следовало отделить от безопасных рассуждений, не приводящих к парадоксам. Наилучшим способом достижения этого был аксиоматический метод.

Аксиоматизацию теории множеств впервые предпринял Эрнст Цермело в работе 1908 г. Причину парадоксов он видел в том, что Кантор не уточнил понятие множества. По мнению Цермело, явно сформулированные аксиомы могли бы прояснить, что следует понимать под множеством и какими свойствами оно должно обладать. Он просто стремился избежать противоречий, не придерживаясь какой-либо определенной философии. Цермело разработал систему аксиом (им использовалась также аксиома выбора) и ограничился лишь свойствами множеств, которые перечислены в аксиомах. Аксиомы гарантировали существование бесконечных множеств и выполнимость таких операций, как объединение множеств и образование подмножеств.

Парадоксов Цермело избежал благодаря введению аксиомы селекции. Его метод уточнили норвежский математик Сколем Туральф Альберт, обучавшийся в Гёттингене в 1915–1916 гг. и израильский математик Френкель Адольф Абрахам. Независимо от Цермело аксиоматику теории множеств в 1908 г. предложил также Бертран Рассел. Впоследствии были предложены некоторые другие варианты аксиоматизации теории множеств. Среди них следует отметить систему Джона фон Неймана. Первая его работа по аксиоматической теории множеств «К введению трансфинитных ординальных чисел» опубликована в 1923 г. в трудах Сегедского института. Этой же теме была посвящена его докторская диссертация и статьи более поздних лет. Другие варианты его системы дали ученик Гильберта немецкий математик Исаак Пауль Бернайс в 1937 г. и австрийский математик Курт Гёдель, сделавший интересные открытия в 1938–1940 гг. Наиболее известной стала система аксиом Цермело – Френкеля.

После неудачных попыток аксиоматизировать физику Гильберт в 1917 г. вернулся к вопросу об основаниях математики. К тому времени уже были получены важнейшие результаты в логицизме и интуиционизме.

Главное возражение Гильберта против логицизма сводилось к тому, что в ходе длительного и сложного развития логики целые числа оказались вовлеченными в присущую ей систему понятий. Следовательно, занимаясь построением понятия числа, логика в действительности ходит по замкнутому кругу. Гильберт разделял мнение Рассела и Уайтхеда о необходимости включения в математику бесконечных множеств. Но для этого потребовалась бы аксиома бесконечности, а Гильберт не считал ее аксиомой логики.

Интуиционизм Гильберт яростно критиковал. В 1922 г. он обвинил интуиционистов в том, что они стремятся разрушить и изуродовать математику. По его мнению, математика могла бы восстановить первоначальную объективность на основе формализации утверждений и доказательств, которые, будучи записанными на языке символической логики, должны были являться непосредственными объектами изучения. Он считал, что отнять у математиков закон исключенного третьего – это то же самое, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам пользоваться кулаками. Запрещение теорем существования и закона исключенного третьего почти равносильно полному отказу от математической науки.

В 20-х годах XX в. Гильберт более четко сформулировал свой собственный подход к обоснованию математики и до конца жизни работал над ним. По сути, он сформировал и возглавил новое направление в обосновании математики, названное формализмом, и разработал метод преодоления парадоксов, известный под названием «финитизм Гильберта».

Чтобы доказательство непротиворечивости было убедительным, рассуждения при его проведении должны носить настолько элементарный характер, чтобы в их правильности нельзя было усомниться. Методы таких рассуждений Гильберт назвал финитными. В них не должна использоваться актуальная бесконечность.

В основе финитизма лежит аксиоматический метод рассмотрения формальных моделей и обоснование их непротиворечивости надежными финитными средствами. Геометрическую интуицию Гильберт считал ненадежной, так как к тому времени накопилось много примеров, когда интуиция подводила математиков. Достаточно вспомнить создание неевклидовой геометрии, придуманную Вейерштрассом непрерывную функцию, не имеющую производной ни в одной точке, кривую Пеано, проходящую через все точки квадрата и т. д.

Среди работ, опубликованных Гильбертом в 1920-х – начале 1930-х годов, особое место по богатству идей занимает работа «О бесконечности». В ней он ввел свои аксиомы логики. По его замыслу, из выбранных аксиом должны были следовать все законы логики Аристотеля. Записав математические и логические аксиомы в виде символических формул, Гильберт подготовил все необходимое для ответа на главный вопрос: что следует понимать под объективным доказательством? По мнению Гильберта, строгое доказательство включает в себя:

1) предъявление некоторой формулы;
2) утверждение, что из предъявленной формулы следует другая формула;
3) предъявление следующей формулы.

Эта последовательность, в которой вторая предъявленная формула является следствием принятых ранее аксиом или ранее выведенных заключений, и является доказательством теоремы.

Математику Гильберт рассматривает как набор формальных систем, каждая из которых имеет свою логику, обладает собственными понятиями, аксиомами, правилами дедуктивного вывода и теоремами.

В серии работ, выполненных с 1920 по 1930 г., Гильберт и его ученики Вильгельм Аккерман, Пауль Бернайс и Джон фон Нейман постепенно создали метод, получивший название метаматематики, – метод доказательства непротиворечивости любой формальной системы и наметили программу полной формализации математики.

Метаматематика – это исследование доказательств финитными методами. Цель метаматематики – установление ее непротиворечивости математики в формализованном виде, т. е. выполнение второго шага программы Гильберта. По его мнению, доказательство непротиворечивости должно было спасти классическую математику от критики интуиционистов и логицистов, а также от ограничений, которые они на нее накладывали. Доказательства существования в метаматематике должны быть конструктивными. Все спорные моменты – доказательство существования от противного, трансфинитную индукцию, актуально бесконечные множества, непредикативные определения – старательно изгоняли.

По мнению Гильберта, парадоксы теории множеств вызваны не законом исключенного третьего, а бессмысленным и недопустимым образованием новых понятий. Он разделил утверждения классической математики на реальные, имеющие содержательный смысл, и идеальные, для которых содержательный смысл не обязателен. Первые из них будут нести осмысленную информацию, вторые ничего не будут обозначать, кроме того, что они представляют собой идеальную структуру теории.

Идеальными являются утверждения, в которых рассматривается актуальная бесконечность. Поскольку актуальная бесконечность выходит за пределы нашего непосредственного опыта, сами по себе идеальные утверждения не имеют смысла и существуют только в нашем воображении. Их можно анализировать, если соединить с реальными математическими средствами. Такое разделение утверждений на два класса существенно упрощает структуру всей теории.

Гильберт предложил программу полной формализации математики и логики, согласно которой все математические утверждения должны формулироваться однозначно и на языке символов. Эти формулировки, а также логические законы и правила доказательства должны рассматриваться как геометрические фигуры, построенные из исходных символов. Таким образом, вся математическая теория превращается в своеобразное геометрическое построение, которое нужно исследовать на непротиворечивость. Так математика расчленялась на формальную теорию и метаматематику.

В качестве первого шага Гильберт предлагал формализацию всей математики. Для этого нужно было построить формальную систему, из аксиом которой с помощью некоторого четко описанного множества правил вывода

можно было бы вывести все основные математические теоремы. Вторым шагом Гильберт считал доказательство непротиворечивости формализованной математики.

Но свободны ли от противоречий выводимые из аксиом заключения? Предыдущие доказательства непротиворечивости основных разделов математики в основе своей содержали предположение, что арифметика не противоречива. Гильберт сам показал, что непротиворечивость евклидовой геометрии сводится к непротиворечивости арифметики. Это означало, что вопрос о непротиворечивости арифметики приобрел решающее значение.

Выступая с докладом о своей метаматематической программе на Международном конгрессе математиков в 1928 г., Гильберт с уверенностью заявил, что новый подход к основаниям математики, который можно было бы назвать теорией доказательства, позволит навсегда покончить со всеми проблемами обоснования математики. Он выразил надежду, что ему удастся доказать непротиворечивость математики и решить проблему полноты. Иначе говоря, все высказывания, имеющие смысл, будут либо доказаны, либо опровергнуты.

Формалистская программа вызвала критику со стороны представителей соперничавших направлений. Так, например, в первые годы после появления гильбертовской программы, возник острый спор между Брауэром и Гильбертом. Интуиционисты довольно безразлично относились к проблеме непротиворечивости. Они полагали, что интуитивные представления не противоречивы по своей природе. Формального доказательства, по их мнению, не требовалось – оно было даже неуместным. Что касается полноты аксиоматических систем, то интуиционисты считали, что человеческая интуиция достаточно сильна, чтобы распознать истинность или ложность почти любого осмысленного утверждения, хотя некоторые утверждения могут оказаться неразрешимыми.

«Неправильная теория, не натолкнувшаяся на противоречие, не становится от этого менее неправильной, подобно тому как преступное поведение, не остановленное правосудием, не становится от этого менее преступным», – считал Брауэр [43]. Следовательно, доказательство непротиворечивости неинтуиционистской классической математики не делает ее истинной. Гильберт с этим не мог согласиться.

Хотя формалисты могли ответить не на все критические замечания, с начала 1930-х годов у них появился весомый аргумент, существенно укрепивший их позиции. К тому времени Рассел и его коллеги-логицисты признали, что аксиомы логики не являются универсальными истинами и поэтому их непротиворечивость отнюдь не гарантирована априори, а интуиционисты могли лишь утверждать, что надежной гарантией непротиворечивости служит сама интуиция. Формалисты располагали тщательно продуманной процедурой доказательства непротиворечивости, которая с успехом применялась к простым системам. Это вселяло уверенность в том, что им удастся доказать непротиворечивость арифметики, а значит и всей математики.

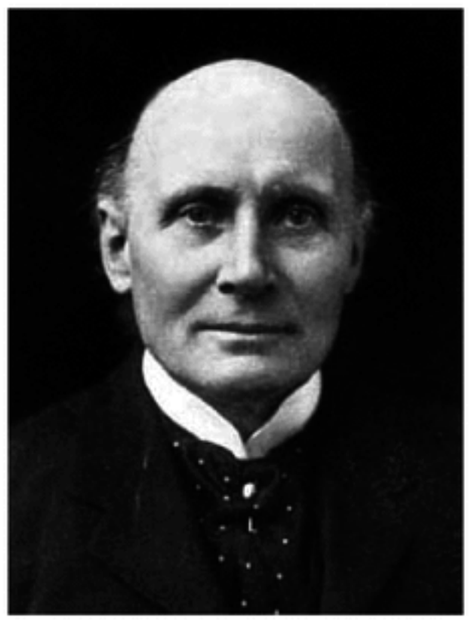
В 1930 г. голландский математик Аренд Гейтинг, один из самых выдающихся представителей интуиционизма, опубликовал работу с изложением

формальных правил интуиционистской логики высказываний. Это стало своего рода символическим выражением намерения наладить отношения с формальными логиками. Логика высказываний охватывала лишь часть классической формальной логики.

Гильберт указал прямой путь исследования непротиворечивости. Он основатель метаматематики, предметом изучения которой являются различные математические теории, непротиворечивость которых требуется доказать. Интенсивная разработка аксиоматического метода, как и разработки логицистов, способствовала становлению математической логики как самостоятельного раздела математики.

Сторонники различных направлений обоснования математики вели между собой ожесточенную борьбу. Эрик Темпл Белл писал о том, что, то, что одно поколение математиков считает надежным и удовлетворительным, имеет шанс обратиться в тончайшую паутину под пристальным взором следующего поколения. Разумного общего соглашения по вопросам обоснования математики, по-видимому, не существует, но ясно одно: одинаково компетентные специалисты разошлись и продолжают расходиться во мнениях по поводу простейших рассуждений, претендующих на универсальность, общность или неоспоримость.

Алфред Уайтхед



Английский математик и философ Уайтхед Алфред Норт родился 15 февраля 1861 г. в Рамсгите (графство Кент) в семье каноника Кентерберийского собора. В 1880 г. он поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета. Кроме основных занятий математикой, он увлекся философией.

В 1885 г. Уайтхед окончил университет, стал членом совета Тринити-колледжа и преподавателем математики. В 1898 г. им написан трактат об универсальной алгебре. Это была одна из первых работ по абстрактной (общей) алгебре. В работе дан подробный разбор исчисления протяженности Грассмана и алгебры логики Буля. Сделана попытка унификации основных понятий математики и объединения различных разделов геометрии.

В конце XIX в. возникло новое направление в математическом анализе, целью которого было показать, что вся абстрактная математика является частью формальной логики. К этому направлению примкнул и Уайтхед. В 1903 г. он был избран членом Королевского общества и начал сотрудничать со своим бывшим учеником Бертраном Расселом. Результатом их десятилетнего сотрудничества явился знаменитый трехтомник «Основания математики» (1910–1913). В 2005 г. эта работа тиражом в 100 экземпляров впервые вышла на русском языке.

Предшественникам Уайтхеда и Рассела удалось «арифметизировать» алгебру и исчисление бесконечно малых, сформулировав различные понятия

алгебры и математического анализа исключительно в арифметических терминах, т. е. в терминах целых чисел и арифметических операций над ними. Работа «Основания математики» явилась существенным продвижением в решении проблемы непротиворечивости математических систем, в частности арифметики. В ней разработана система обозначений, с помощью которой все предложения абстрактной математики можно записать некоторым стандартным образом, и сформулированы правила вывода, используемые в математических доказательствах. Это значит, что можно исследовать всю систему арифметики как систему знаков, из которых посредством точно сформулированных правил можно образовывать формулы.

Первая часть этого грандиозного труда, написанная в основном Расселом, представляет собой разработку формальной логики с помощью дедукции из нескольких аксиом. Авторы поставили перед собой задачу доказать тезис Фреге о том, что математика может быть сведена к логике. Они использовали точные и детально разработанные символы, частично заимствованные у Дж. Пеано. Первые три тома имели своей целью аксиоматизацию логики и обоснование арифметики. По словам Рассела, должен был выйти еще и четвертый том, посвященный основаниям геометрии, написать который предстояло Уайтхеду. Этот том так и не был опубликован. Символический аппарат, разработанный в [80], Уайтхед применял уже в 1905 г. в статье, посвященной математической физике.

В 1910 г. Уайтхед переехал из Кембриджа в Лондон, а в 1911 г. стал сотрудником Университи-колледжа Лондонского университета. С 1914 г. он стал профессором прикладной математики, а затем деканом факультета естественных наук Имперского колледжа науки и техники Лондонского университета.

Исследованиям в области философских основ физики посвящены следующие работы Уайтхеда: «Исследование принципов естествознания» (1919), «Понятие природы» (1920), «Принцип относительности и его применения в физике» (1922). В последней из упомянутых работ он предложил специальную и общую теорию относительности, отличающуюся от эйнштейновской.

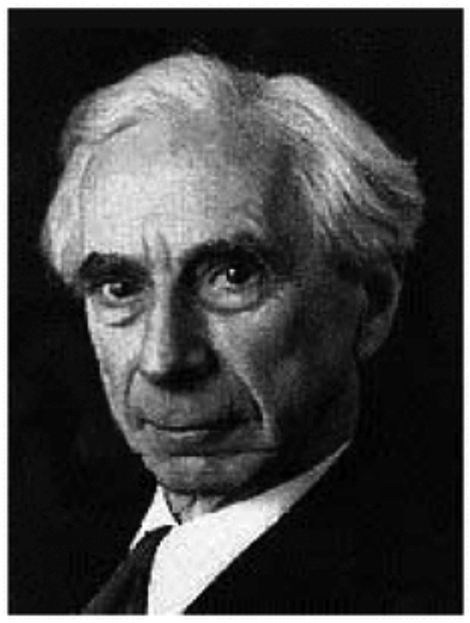
В 1924 г. Уайтхед переехал в США и занял должность профессора философии Гарвардского университета, в котором преподавал до 1937 г. Им в 1925–1932 гг. разработана метафизическая система, получившая название органической философии и опубликованная в трилогии: «Наука и современный мир» (1925), «Процесс и реальность: очерк космологии» (1929), «Приключения идей» (1933).

Философия Уайтхеда оригинальна, ее невозможно поставить в один ряд с философскими системами других мыслителей. Он не принадлежал к какой-либо школе и не имел учеников.

Уайтхед был математиком, интересовавшимся многими вопросами, в том числе космологией. В 1931 г. он был избран в Британскую академию, в 1945 г. награжден орденом «За заслуги».

Умер Уайтхед в Америке 30 декабря 1947 г.

Бертран Рассел



Рассел Бертран Артур Уильям родился 18 мая 1872 г. в старинной английской аристократической семье. Родители Рассела умерли рано, поэтому воспитывала его бабушка. В 11 лет он открыл для себя Евклида и всерьез увлекся математикой. Учился Рассел, а позже преподавал, в Кембриджском университете.

В энциклопедическом словаре о Расселе написано, что он философ, логик, математик, общественный деятель. Это говорит о многогранности его таланта. Диссертацию он защищал по основаниям геометрии. Занимаясь теорией множеств, Рассел обнаружил парадокс, позже названный его именем. В 1900 г. им написана книга о философии Лейбница, в которой подчеркнута актуальность идей этого мыслителя. В книге 1903 г. «Принципы математики» Рассел изложил идеи логицизма. Известность ему принес трехтомник «Основания математики», написанный в соавторстве с кембриджским математиком А. Уайтхедом.

Бертран Рассел призывал быть осторожными при выборе математических и физических аксиом, даже подтвержденных экспериментально. В книге «Научное мировоззрение» (1931) он приводит следующий пример: «…если принять за гипотезу, что хлеб делается из камня и камень съедобен, то можно логически прийти к выводу, что хлеб съедобен. Экспериментально съедобность хлеба подтверждается, но от этого исходные предпосылки не становятся менее абсурдными».

Рассел говорил, что если кто-то докажет ошибочность его взглядов, изложенных в книге, то он не колеблясь напишет новую с их опровержением. Поэтому трудно сказать, что он думал по ряду вопросов, ибо ответ зависит от периода его жизни.

В 1901 г. Рассел провозгласил, что «здание» математической истины – логической и одновременно физической – останется незыблемым навеки. В 1914 г. он был вынужден признать, что «наше знание геометрии физического мира носит синтетический, а не априорный характер». Иначе говоря, геометрия не следует из одной лишь логики. Во втором издании «Оснований математики» (1926) Рассел пошел на еще большие «уступки». По его словам, в правильность логики и математики так же, как и в правильность уравнений Максвелла, мы «верим потому, что из наблюдений убеждаемся в надежности некоторых логических следствий, к которым они приводят» [41].

Рассел пытался совместить математические исследования с политикой и в 1910 г. неудачно баллотировался в парламент. Неудачи на выборах постигли его и в 1922 г., и в 1923 г. Первая мировая война стала для Рассела большим эмоциональным потрясением. Испытывая глубокое чувство ответственности перед современниками, он занял активную пацифистскую позицию, выступал на митингах, за что в 1916 г. был оштрафован, лишен права преподавания в Тринити-колледже, а в 1918 г. заключен на полгода в тюрьму.

В годы войны Рассел писал много статей по проблемам войны и мира. Некоторые явления политической жизни он пытался объяснять природой человека и психологией политиков. В 1920 г. он приезжал в Россию, где встречался с Лениным, Троцким, Горьким и Блоком. Написанная по впечатлениям от поездки книга была весьма критической по отношению к советской власти.

Проблемы воспитания и образования привели Рассела к рассмотрению вопросов семьи и брака. В 1929 г. была опубликована его книга «Брак и мораль». Сам он женился официально четыре раза. Собственные дети появились у Рассела, когда ему было более 50 лет.

В 1938 г. он уехал в США, где прожил до 1944 г. В Америке он читал лекции в разных университетах и написал две фундаментальные работы: «Исследование значения и истины» (1940) и «История западной философии» (1945).

После возвращения из Америки в Англию Рассел неожиданно получил признание и в науке, и в политике. Его пригласили преподавать в Тринити-колледже, читать лекции радиослушателям Би-Би-Си. В 1950 г. за книгу «Брак и мораль» он получил Нобелевскую премию в области литературы.

Несмотря на возраст, после сброса атомных бомб на Хиросиму и Нагасаки, Рассел активно включился в антиядерную кампанию. Он – автор знаменитого «Манифеста Эйнштейна – Рассела» (1955), подписанного умирающим Эйнштейном, и опубликованного уже после его смерти. Крупнейшие ученые того времени: М. Борн, Ф. Жолио-Кюри, Л. Инфельд, Л. Полинг, С.Ф. Пауэлл, Х. Юкава, – также поставили свои подписи под манифестом. С 1945 г. Рассел активно занимался общественно-политической деятельностью.

Умер Рассел 2 февраля 1970 г.

Лейтзен Брауэр

Голландский математик Брауэр Лейтзен родился 27 февраля 1881 г. в Оверсхи, пригороде Роттердама. В 1897 г. он поступил на математическое отделение Амстердамского университета. В 1904 г. Брауэр окончил университет и женился. С женой, которая была на 11 лет старше и имела дочь от предыдущего брака, Лейтзен Брауэр прожил 55 лет. Общих детей у них не было.

Вопросами обоснования математики Брауэр начал заниматься с 1904 г., когда в ряде статей он выступил с развернутой критикой некоторых концепций классической математики. Брауэр рано заинтересовался философией, о чем свидетельствует написанная им в 1905 г. книга «Жизнь, искусство и мистика». Изложение философии интуиционизма Брауэр начал в своей диссертации «Об основаниях математики» (1907). Поскольку его точка зрения не нашла поддержки у коллег, Брауэр решил временно не афишировать свои философские взгляды, добиться признания благодаря работам в области теории множеств и топологии. В 1909 г. он стал преподавателем математики Амстердамского университета.

В начале XX в. немецкий математик Артур Шёнфлис опубликовал серию работ, в которых говорилось о различных свойствах кривых, границ областей и т. д. При этом он часто опирался на «геометрическую очевидность». Но в 1910 г. появилась короткая (всего 12 страниц) статья Брауэра, где было несколько удивительных примеров, показывающих, что одни результаты Шёнфлиса были просто неверны, а другие – нестрого доказаны.

За четыре года (1909–1913) Брауэр добился больших успехов в топологии. Рассмотрим основную идею его исследований. В топологии долгое время господствовала геометрическая интуиция. Риман в работе по теории алгебраических функций комплексного переменного показал, что для подлинного понимания этих функций необходимо исследование топологических свойств некоторых специальных поверхностей, которые стали называть римановыми поверхностями.

К началу XX в. математики во главе с Пуанкаре, развивая теорию групп, исследовали римановы поверхности двух, трех и *n* измерений, ориентируясь на интуицию. Далее нужно было убедиться в математической строгости результатов, полученных в топологии с помощью геометрической интуиции. С этой задачей справился Брауэр.

Доказав в 1911 г. топологическую инвариантность размерности евклидова пространства, Брауэр открыл новую эру в топологии. В 1911–1913 гг. он получил ряд важных результатов. Такими понятиями являются симплициальная аппроксимация и степень непрерывного отображения, понятие гомотетической классификации отображения. Им доказана теорема о гомотетической эквивалентности двух отображений сферы, имеющих одну и ту же степень, на себя; теорема об инвариантности числа измерений и инвариантности внутренних точек при топологическом отображении множества, лежащего в *n*-мерном пространстве, в то же пространство; *n*-мерная теорема Жордана и др. Эти результаты и методы, найденные для их доказательства, оказали существенное влияние на развитие топологии в первой половине XX в. Благодаря усилиям Брауэра значительно повысилась строгость в изучении топологических свойств, и дальнейшее развитие топологии происходило на основе логически безупречных рассуждений. Доказанная Брауэром теорема о неподвижной точке широко использовалась в теории дифференциальных уравнений, теории игр и других разделах математики. Известны принцип Брауэра в функциональном анализе, брауэровы многообразия в алгебраической топологии.

В 1912 г. Брауэр был избран в Нидерландскую королевскую академию наук, а в 1913 г. стал профессором Амстердамского университета.

В 1913 г. в бюллетене Американского математического общества появилась работа Брауэра «Интуиционизм и формализм». За ней последовали опубликованные в журнале «Mathematische Annalen» статьи Брауэра, посвященные обоснованию интуиционистской математики. В последующих трудах Брауэр переходит к более широкой разработке вопроса об отношении математики к философии. Обобщенный вариант своих взглядов он изложил в серии статей, публиковавшихся с 1918 г. в различных журналах.

Брауэр считал, что вне человеческого разума математика не существует, следовательно, она не зависит от реального мира. Разум непосредственно

постигает основные, ясные и понятные, интуитивные представления, такие, например, как целые числа. Математическое мышление представляет собой процесс мысленного построения собственного мира, не зависящий от опыта и ограниченный лишь тем, что в основе его должна лежать фундаментальная математическая интуиция. Интуиция (а не опыт или логика) определяет правильность и приемлемость новых идей.

По мнению многих математиков, работы Брауэра по теории множеств были самыми глубокими после работ Кантора. Но он был готов отказаться от большей части своих математических достижений ради философских идей. Он отвергал актуально бесконечные множества Кантора, все элементы которых были представлены «в готовом виде», и тем самым отрицал теорию трансфинитных чисел, аксиому выбора Цермело и те разделы анализа, в которых используются актуально бесконечные множества.

Гильберт считал, что субъективную природу имеют только идеальные математические средства, а реальные средства – вполне конкретную, Брауэр же считал субъективной и конкретную математику. По его мнению, математика – часть внутренней психической деятельности человека, а математический язык – лишь средство коммуникации, позволяющее человеку обмениваться мыслями с другими людьми. Главным критерием истинности в математике и логике является внутренняя интуиция человека. Формальная математика и логика лишь следуют этой интуиции.

Форма суждения может не совпадать со смыслом, поэтому возможна многозначность, а не двузначность суждений, и закон исключенного третьего неверен. Поэтому обретает смысл двойное отрицание, отвергаемое классической логикой («не-не-существует» – более емкий квантор, чем «не-существует» и «существует»).

Классическая логика применима только к конечным объектам, где истинность суждений можно проверить перебором. А так как в бесконечных множествах проверить истинность перебором невозможно, то классическая логика для бесконечных объектов неприменима.

Объявляя единственной настоящей математикой психическую деятельность человека, не поддающуюся формализации, Брауэр установил математический смысл обиходной речи, который заключается в тождественности ее с многозначной логикой. Он подверг критическому анализу отношение математиков к языку. Язык принадлежит миру восприятий, который противостоит миру интуитивных математических представлений. Математические идеи не зависят от словесного одеяния, в которое их облекает язык, и в действительности они гораздо глубже. Мысли невозможно выразить полностью даже на математическом языке, в том числе и на языке символов. Кроме того, язык вносит некоторые отклонения от предмета собственно математики. Брауэр был против гильбертовской программы полной формализации математики, считая, что возможности человеческого мышления намного богаче любых формальных систем. Поэтому в своих работах он избегал развитой символики.

Брауэр был первым ученым, сделавшим важнейший шаг к осознанию не универсального характера классической логики. Различные философии,

различные приложения могут требовать различных логик. Эта множественность духовно сродни множественности геометрий, открытой в XIX в. Лобачевским, Больяи и Гауссом. Брауэр же сформулировал основные принципы интуиционистской логики, являющейся также логикой конструктивной математики, с несущественными для нас нюансами. Выражаясь кратко, классическая логика есть логика идеализированного математического бытия, абсолютного знания этого бытия, тогда как конструктивная логика есть логика наших умений.

Если в начале знакомства (1909) отношения Брауэра и Гильберта были дружескими, то, по мере расхождениями взглядов на основания математики, их отношения ухудшились. Серьезными были и разногласия по поводу участия немецких математиков в работе Международного математического конгресса в Болонье в 1928 г., о чем рассказано в гл. 2. Конфликтовали они также в редакции журнала «Математические анналы». Когда во время болезни Гильберт стал опасаться, что после его смерти Брауэр станет слишком влиятельным, он сумел исключить Брауэра из числа редакторов. Это было сделано не совсем корректно, и Эйнштейн в знак протеста тоже ушел из редакции.

В течение 39 лет, с 1912 по 1951 г., Брауэр был профессором Амстердамского университета. Он был не только идейным вдохновителем интуиционизма, но и большим специалистом в области топологии, теории чисел, функционального анализа.

Брауэр являлся членом Нидерландской королевской академии наук и многих других академий, научных обществ и учреждений, в том числе Лондонского королевского общества, Гёттингенского научного общества, членом-корреспондентом Парижской академии наук. Его именем назван кратер на обратной стороне Луны.

2 декабря 1966 г. 85-летний Брауэр был насмерть сбит автомобилем на одной из улиц Амстердама.

Открытия Курта Гёделя и Пола Коэна. Создание конструктивной математики

В целом состояние вопроса обоснования математики в 30-х годах XX в., как пишет профессор математики Нью-Йоркского университета Морис Клайн в книге «Математика. Утрата определенности», было вполне удовлетворительным. Парадоксы были разрешены, хотя представители каждого из рассмотренных выше направлений в обоснованиях математики решали их по-своему, но проблемы доказательства непротиворечивости математики и полноты аксиоматических систем сохранялись, и отношение к этим проблемам было различным.

Формалисты во главе с Гильбертом продолжали попытки решить проблему непротиворечивости. В работе «Основания математики», опубликованной в 1930 г., Гильберт утверждал, что скоро сможет окончательно решить вопросы обоснования математики, превратив каждое математическое высказывание в формулу, поддающуюся конкретному показу и строго выводимую.

Тем самым он обещал привести образование понятий и выводы к такому изложению, при котором они были бы неопровержимы и давали общую картину математики.

В 1931 г. Гёдель опубликовал работу «О формально неразрешимых утверждениях [оснований математики] и родственных систем», в которой содержались два поразительных результата.

Одним из них является теорема Гёделя о неполноте, согласно которой формальная теория, включающая арифметику целых чисел не полна, если она не противоречива.

Другим результатом было утверждение, что непротиворечивость любой достаточно мощной математической системы, охватывающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы на основе математических принципов, принятых различными школами в основаниях математики: логицистами, формалистами и представителями теоретико-множественного направления.

Это означало, что непротиворечивость любой формальной системы может быть обоснована только средствами более сильными, чем те, которые формализованы в этой системе. Результат Гёделя послужил поводом для известного высказывания А. Вейля, согласно которому Бог существует, поскольку математика, несомненно, не противоречива, но существует и дьявол, поскольку доказать ее непротиворечивость мы не можем.

Оба полученных Гёделем результата потрясли математиков. Невозможность доказательства непротиворечивости наносила удар по формалистской философии Гильберта, который не сомневался в успехе своего намерения доказать непротиворечивость всей математики в рамках метаматематики. Математика была вынуждена безоговорочно отказаться от претензий на абсолютную достоверность или значимость своих результатов.

Теорему Гёделя о неполноте с некоторыми оговорками можно рассматривать как отрицание закона исключенного третьего. Каждое утверждение мы считаем либо истинным, либо ложным. Это означает, что рассматриваемое утверждение доказуемо или недоказуемо с помощью законов логики и аксиом того раздела математики, к которому относится интересующее нас утверждение. Гёдель же доказал, что некоторые утверждения нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

В известной мере теорема Гёделя подкрепляла позиции интуиционистов, хотя те возражали против логических принципов совсем по другим причинам, и порождала ряд дополнительных проблем. Поскольку в любой области математики существуют утверждения, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть, возникает вопрос: можно ли определить, доказуемо или недоказуемо любое заданное утверждение? Постановка такого вопроса известна в науке под названием «проблема разрешимости».

Нерешенные проблемы могут оказаться неразрешимыми, но далеко не всегда это известно заранее. Например, задача о трисекции угла с помощью циркуля и линейки в течение, по крайней мере, нескольких столетий ошибочно считалась разрешимой.

В 1936 г. американский логик и математик Алонзо Чёрч, используя введенное им новое понятие рекурсивной функции, показал, что в общем случае разрешающая процедура невозможна: если задано конкретное утверждение, то не всегда можно найти алгоритм, позволяющий установить, доказуемо оно или опровержимо. Математики могут напрасно тратить время, безуспешно пытаясь доказать то, что не доказуемо. Например, решая десятую проблему Гильберта, советский математик Юрий Матиясевич в 1970 г. пришел к выводу, что не существует алгоритма, позволяющего установить, удовлетворяют какие-либо целые числа соответствующим диофантовым уравнениям или нет.

В работе «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума с аксиомами теории множеств» (1940) Гёдель доказал, что если система аксиом Цермело – Френкеля без аксиомы выбора не противоречива, то добавление аксиомы выбора не нарушает непротиворечивости, т. е. аксиома выбора в рамках этой аксиоматики не может быть доказана. Аналогично он установил, что гипотеза континуума не противоречит системе аксиом Цермело – Френкеля, даже если эту систему дополнить аксиомой выбора. Это означает, что гипотезу континуума нельзя опровергнуть. В 1947 г. Гёдель доказал, что гипотеза континуума не зависит от аксиом Цермело – Френкеля и от аксиомы выбора.

В 1963 г. 29-летний американский математик Пол Джозеф Коэн доказал, что и аксиома выбора, и гипотеза континуума не зависят от остальных аксиом Цермело – Френкеля, если те не противоречивы. Таким образом, в системе аксиом Цермело – Френкеля аксиома выбора и гипотеза континуума не разрешимы. Что касается гипотезы континуума, то результат Коэна свидетельствует о том, что может существовать трансфинитное число, заключенное между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$, хотя оно не соответствует ни одному известному множеству. Это означает, что существует не одна математика. С появлением коэновских доказательств независимости математика оказалась в еще более затруднительном положении, чем это было при создании неевклидовой геометрии. Появилась проблема выбора: какому из многочисленных вариантов двух аксиом (аксиомы выбора и гипотезы континуума) следует отдать предпочтение? Даже если ограничиться теоретико-множественным подходом к обоснованию математики, число возможных вариантов оказывается ошеломляюще большим. Остановить свой выбор на одном из многих вариантов нелегко, так как в любом случае принятие определенной редакции аксиом имеет свои и положительные, и отрицательные стороны.

Отказ от аксиомы выбора заставляет сомневаться в истинности многих полученных ранее результатов. Принятие аксиомы выбора позволяет доказывать теоремы, противоречащие интуиции. Одна из таких теорем известна под названием парадокса Банаха – Тарского. В соответствии с этим парадоксом, разрезав земной шар на мелкие кусочки и сложив их в другом порядке, мы можем получить шар размером с футбольный мяч. В отличие от парадоксов, с которыми столкнулась теория множеств в начале XX в., парадокс Банаха – Тарского в действительности является не противоречием, а логическим следствием из аксиом теории множеств и аксиомы выбора.

Многие математики были настроены пессимистично. Например, Г. Вейль в 1944 г. сказал, что вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой, в конечном счете, математика, остается открытым и мы не знаем какого-то направления, которое позволит найти окончательный ответ на этот вопрос.

Работа Гёделя показала, что возможности аксиоматического метода ограничены. Он доказал, что для весьма широкого класса дедуктивных теорий нельзя доказать их непротиворечивость, не пользуясь более сильными методами, непротиворечивость которых еще более сомнительна, чем у доказываемых теорий. Следовательно, нельзя окончательно систематизировать многие разделы математики, и нет гарантий, что они свободны от внутренних противоречий. Гёдель обогатил исследования по основаниям математики совершенно новыми методами рассуждений, позволил расширить проблематику логических и математических исследований, обусловил существенную переоценку перспектив философии в целом и философии математики в частности.

Гильберт и его ученики пытались не только обосновать непротиворечивость арифметики, но и доказать непротиворечивость действительных чисел и теории множеств. Они рассматривали также проблемы независимости аксиом, полноты и разрешимости. Доказав непротиворечивость частных формализмов, они полагали, что уже достигли цели и доказали не только непротиворечивость арифметики, но и теории множеств. Доказательство Гёделем теоремы о неполноте показало, что цель, поставленная Гильбертом, не достигнута. Но теорема Гёделя не исключает дальнейшие попытки доказательств непротиворечивости, если отказаться от некоторых первоначальных ограничений, установленных Гильбертом.

Конструктивная математика. Конструктивной математикой называют течение в обосновании математики, сформировавшееся в СССР к 50-м годам XX в. под руководством Андрея Андреевича Маркова-мл. Развивая основные идеи интуиционизма, это направление заимствовало ряд положений формализма. Основные черты конструктивной математики:

– изучение конструктивных процессов, развертывание которых приводит к образованию математических объектов, допускающих точную характеристику;

– рассмотрение конструктивных процессов и объектов в рамках абстракции потенциальной осуществимости с полным исключением идеи актуальной бесконечности;

– интуитивное понимание терминов связи «эффективность» и «алгоритм»;

– использование специальной, учитывающей специфику конструктивных процессов и объектов конструктивной логики [55].

Конструктивная математика может быть определена как неклассическое направление в математике, основанное на критерии конструктивности, в то время как классическая математика основана на критерии непротиворечивости. Согласно критерию непротиворечивости, объект признается существующим, если он не содержит формально-логического противоречия. Согласно критерию конструктивности, существовать – значит быть построенным. Требование конструктивности более «сильное», чем требование непротиворечивости.

Характерной чертой конструктивных процессов является протекающее по отдельным шагам оперирование в рамках некоторых четко указанных правил с элементарными, заведомо отличающимися друг от друга и считающимися неразложимыми в ходе этих процессов объектами. Возникающие в результате объекты, составленные из исходных элементарных объектов, называют конструктивными.

Первоначальные математические структуры – натуральные, целые и рациональные числа – непосредственно могут трактоваться как слова некоторых простых типов в фиксированном алфавите. Введение более сложных структур – действительных чисел, функций над ними и т. д. – осуществляется в конструктивной математике на основе понятия алгоритма, играющего в ней примерно такую же роль, какую играет в традиционной математике понятие функции. Фактически наибольшее применение в конструктивной математике получили нормальные алгорифмы Маркова-мл. К необходимости уточнения понятия алгоритма приводит также и конструктивная трактовка существования в математике [55].

В конструктивной математике под «существованием» конструктивного объекта понимается его потенциальная осуществимость – то есть наличие в нашем распоряжении метода, позволяющего воспроизводить этот объект любое число раз. Такое понимание резко расходится с пониманием существования объекта, принятым в теоретико-множественной математике. Это расхождение приводит к тому, что логические законы, действующие в конструктивной математике, оказываются отличными от классических. Многие утверждения теоретико-множественного анализа, доказываемые в классическом анализе на основе привлечения сильных теоретико-множественных средств (в частности, аксиомы выбора), в конструктивном анализе опровергаются на примерах. Некоторые другие утверждения теоретико-множественного анализа могут быть перенесены в конструктивную математику лишь при условии понимания «существования» искомого объекта как квазиосуществимости (а не потенциальной осуществимости). Однако в конструктивном анализе доказывается ряд утверждений, не имеющих теоретико-множественных аналогов.

Конструктивная логика отличается от классической отсутствием законов исключенного третьего и двойного отрицания.

На основе изложенных принципов и современной теории алгоритмов, конструктивную математику подразделяют на ряд математических дисциплин, в том числе конструктивную топологию, конструктивную теорию вероятностей, конструктивный математический анализ, включая дифференциальные уравнения, теорию функций комплексного переменного и т. д.

Конструктивная математика заимствовала у интуиционизма ряд конструкций и идей. Конструктивное направление математики в этом смысле можно рассматривать как разновидность интуиционизма, для которого характерно исследование конструктивных объектов и конструктивных процессов алгоритмическими методами. Вместе с тем имеются и принципиальные отличия. В интуиционизме имеет место идеалистическая трактовка интуиции, а в конструктивной математике интуиция рассматривается с материалистических

позиций. Конструктивная математика не разделяет свойственное интуиционизму убеждение в первоначальном характере математической интуиции, считая, что интуиция формируется под влиянием практической деятельности человека. Интуиционистская математика в то же время не принимает правила конструктивного подбора – логико-философского принципа, сформулированного А.А. Марковым-мл. Этот принцип является частным случаем общего закона снятия двойного отрицания и закона исключенного третьего. Он утверждает, что если конструктивный процесс, заданный некоторым предписанием, не является неограниченно продолжаемым, то он заканчивается [51].

Различия между теоретико-множественной (классической), интуиционистской и конструктивной математиками отражены в табл. 4.

Таблица 4. Использование спорных принципов относительно различных подходов к обоснованиям математики

Принципы	Теоретико-множественная математика	Интуиционистская математика	Конструктивная математика
Закон исключенного третьего	+	–	–
Закон двойного отрицания	+	–	–
Принцип Маркова-мл.	+	–	+
Абстракция актуальной бесконечности	+	частично	–
Тезис Чёрча	+	–	+

Кроме конструктивной математики А.А. Маркова-мл., известна также конструктивная математика американского ученого Эррета Бишопа.

А.А. Марков-младший

Марков-мл. Андрей Андреевич родился 9 сентября 1903 г. в Петербурге в семье известного русского математика Андрея Андреевича Маркова. Он был единственным и поздним ребенком в семье и под руководством отца получил великолепное домашнее образование. Помимо дисциплин гимназического курса, его обучали основным европейским языкам, которыми он полностью овладел, музыке и рисованию. Кроме того, Марков-мл. прекрасно играл в шахматы.

Вероятно, отец хотел видеть сына математиком, но первой любовью Андрея стала химия.

Весною 1919 г. после окончания 8-й Петроградской гимназии Андрей был зачислен по специальному ходатайству отца вольнослушателем химического отделения физико-математического факультета Петроградского университета.

Летом 1920 г. он принял участие в работе по экспериментальной химии. Результаты этого исследования, выполненного в соавторстве с двумя химиками, были опубликованы в 1924 г.

На втором курсе интересы Маркова-мл. обратились к теоретической физике, и именно по физическому отделению он закончил в 1924 г. университет (переименованный в Ленинградский). В 1928 г. закончил аспирантуру в Астрономическом институте.

Расставшись с химией, Марков-мл. опубликовал циклы работ по небесной механике и теоретической физике. Ему, в частности, принадлежит одна из самых первых публикаций по квантовой механике в СССР. Его исследования посвящены топологии, топологической алгебре, теории динамических систем. Он доказал неразрешимость проблемы гомеоморфизма в топологии.

С 1933 по 1955 г. Марков-мл. работал в Ленинградском университете. Ученая степень доктора физико-математических наук присвоена ему без защиты диссертации в 1935 г., а в 1936 г. – ученое звание профессора. С 1936 по 1942 г. и с 1944 по 1953 г. Марков-мл. заведовал кафедрой геометрии Ленинградского государственного университета, в 1939–1972 гг. работал в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР.

А.А. Марков-мл. находился в блокадном Ленинграде до июля 1942 г.

В первые послевоенные годы Марков-мл. обратился к основам математики, математической логике. Он приступил к созданию своего главного детища, конструктивной математики. Теперь эту математику называют конструктивной математикой Маркова-мл.

К началу XX в. в основаниях математики наступил очередной кризис, не преодоленный до сих пор. Речь шла о самой природе математики. Уже несколько десятилетий продолжались нешуточные споры между логицистами, интуиционистами и формалистами о смысле основных понятий математики. Споры велись не только среди зарубежных, но и среди отечественных математиков. Об этих спорах и их влиянии на судьбы ученых рассказано выше.

Андрею Андреевичу наиболее близкой была позиция интуиционистов во главе с Брауэром. Но интуиционизм в математике связывали с идеалистическим интуитивизмом в философии. А идеализм в Советском Союзе не приветствовался, а строго порицался. Необходимо было, сохранив наиболее ценное в интуиционизме, поставить обоснование математики на материалистическую основу. Над этим работали и философы, и математики. Среди философов этой проблемой занимался, например, доктор философских наук, профессор МГУ с 1939 г. Асмус Валентин Фердинандович. Им написана книга «Проблема интуиции в философии и математике», которая содержит главу под названием «Интуиционизм и проблема интуиции в математике». Асмус пишет, что математический интуиционизм – это «не разновидность философского интуитивизма – вроде интуитивизма, характерного для феноменологии Гуссерля, – а особое направление в обосновании математики и особая разработка ряда специально математических дисциплин и учений таких, как математическая логика, теория континуума, дифференциальное и интегральное исчисления, теория множеств, топология, теория функций и т. д.» [14]. Такой разработкой математических дисциплин и учений занимался А.А. Марков-мл.

В XX в. было три главных конструктивных направления: интуиционизм, основанный голландским математиком Лейтзеном Брауэром, конструктивная математика А.А. Маркова-мл. и конструктивная математика американского математика Эррета Бишопа.

Все три конструктивных школы разделяли критическую позицию по отношению к платонистской онтологии теоретико-множественной математики (иногда называемую классической). Критика эта, решающие аргументы которой принадлежат Брауэру, в частности отвергала идею актуальной бесконечности, неограниченной применимости законов традиционной логики, особенно закона исключенного третьего. Математические объекты рассматривались как результаты интеллектуальной или фактической деятельности человека, а не как нечто существующее само по себе.

Объектом изучения в марковской математике являются конструктивные объекты и конструктивные процессы с участием этих объектов. Для достижения целей здесь вполне достаточно одного общего типа конструктивных объектов – слов в алфавите. Способность читать, распознавать графемы лежит в самой основе интеллектуальной деятельности человека. Целые числа можно трактовать как слова в алфавите, который мы видим на клавиатуре компьютера, то же можно сказать и о рациональных числах.

В основе конструктивной математики Маркова-мл. лежит также точное определение алгорифма. Фактически, алгорифмы – это компьютерные программы. Компьютеры имеют возможность наращивать по мере необходимости память и потенциально не ограничены во времени выполнения программ. Точные понятия алгорифма были выработаны в математике в 30-х годах XX в. Произошло это в ходе работ по преодолению кризиса оснований математики. Хотя Андрей Андреевич включился в эту работу сразу после войны, он говорил, что имел выраженные «конструктивные» наклонности много раньше. А.А. Маркова-мл. можно смело считать одним из пионеров теории алгорифмов и информатики. Им было предложено одно из ведущих современных понятий алгорифма (нормальные алгорифмы Маркова-мл.) и написана ставшая уже классической монография, содержащая первое в математической практике строгое изложение теории слов и доказательства правильности работы тех или иных алгорифмов. Это предвосхитило ряд современных направлений в информатике.

Сначала интуиционистская логика воспринималась математиками как нечто экзотическое, наверняка, не имеющее никакого практического значения. С появлением компьютеров ситуация изменилась, и интуиционистская логика получила широкое применение в разработке сложных компьютерных программ. Не случайно, именно в школе Маркова-мл. (в ее ленинградской ветви) были выполнены первые исследования в области машинного доказательства теорем.

В любые времена требуется большое мужество, чтобы выступить наперекор господствующим в науке взглядам. А в послевоенные годы в СССР ученый, заявляющий о собственной точке зрения в науке, не согласованной с партийными идеологами (именно так поступал А.А. Марков-мл.), подвергался серьезной опасности.

Следует сказать, что А.А. Марков-мл. начал создавать свою школу в Ленинграде. После его переезда в 1955 г. в столицу возникла московская ветвь школы. В то время Марков-мл. и его школа уже не подвергались фронтальным атакам партийных идеологов и определенного толка философов, хотя сохранялось ощутимое давление. Возможно, что человеческая и научная прямота Маркова-мл. были причинами того, что он так и не был избран академиком (Андрей Андреевич был членом-корреспондентом АН СССР с 1953 г.).

С 1959 г. Марков-мл. заведовал кафедрой математической логики Московского университета. Его математические работы, особенно последнего периода, поражали ясностью, доступностью и логичность изложения. Удивительны и рукописи Маркова-мл., где каждая буква была буквально нарисована. Его артистичность проявлялась и в манере говорить, напоминавшей декламирование, и даже в походке.

Андрей Андреевич был ученым редкой эрудиции, оставившим глубокий след в самых различных областях математики, механики и физики. Он был награжден несколькими орденами и медалями, в 1969 г. удостоен премии им. П.Л. Чебышёва АН СССР.

Скончался Марков-мл. 11 октября 1979 г. в Москве.

Курт Гёдель

Гёдель Курт родился 28 апреля 1906 г. в чехословацком городе Брно в семье австрийца Рудольфа Гёделя, владельца крупнейшей текстильной фабрики. В детстве Курт серьезно заболел. После выздоровления он узнал, что болезнь может дать осложнение на сердце и ошибочно решил, что сердце у него больное, поэтому часто жаловался на здоровье.

В школе Гёдель учился хорошо. Особенно легко ему давались математика и языки. Его брат говорил, что Курт за все время обучения в школе не сделал ни одной грамматической ошибки в латинском языке.

Окончив школу в 1923 г., Гёдель поступил в Венский университет. Однако к тому времени он так и не решил, в какой области будет специализироваться – математики или теоретической физики. В конце концов, он выбрал математику под руководством профессора Фуртвенглера, который поразил Курта не только своим преподавательским талантом, но и силой духа. (Фуртвенглер был парализован и читал лекции, сидя в инвалидном кресле.)

В 1929 г. Гёдель защитил диссертацию, в которой доказал полноту исчисления предикатов первой ступени. В этом же году умер отец Гёделя. У него был крупный бизнес, поэтому после его смерти семья все же осталась достаточно состоятельной, что позволило Гёделю продолжать обучение. После смерти мужа мать Гёделя купила большую квартиру в Вене, где поселилась с двумя сыновьями.

С 1930 г. Гёдель стал преподавать в Венском университете. В начале 1930-х годов умы многих ученых были заняты проблемой обоснования

математики. В центре внимания многих из них были трехтомник Альфреда Норта Уайтхеда и Бертрана Рассела «Основания математики» («Principia Mathematica») и результаты Гильберта по построению математической системы, охватывающей часть арифметики, с доказательством ее полноты и непротиворечивости.

В 1931 г. в одном из немецких научных журналов появилась статья 25-летнего Гёделя «О формально неразрешимых предложениях “Оснований математики” и родственных системах». Впоследствии в решении Гарвардского университета о присуждении Гёделю почетной докторской степени (1952) она была охарактеризована как одно из величайших достижений современной логики.

В момент опубликования статья Гёделя была понятна только очень узкому кругу специалистов. Лишь позже общепризнанными стали подлинно революционный характер выводов Гёделя и их важнейшее философское значение.

Согласно теореме Гёделя о неполноте, в любой достаточно сложной непротиворечивой теории существует утверждение, которое средствами самой теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть.

В работе был обоснован поразительный и обескураживающий вывод, согласно которому возможности аксиоматического метода определенным образом ограничены. Гёдель доказал, что для весьма широкого класса дедуктивных теорий нельзя доказать их непротиворечивость, не воспользовавшись в доказательстве еще более сильными методами, чья непротиворечивость оказывается еще в большей степени подвержена сомнениям. Поэтому ни о какой окончательной систематизации многих важнейших разделов математики не может быть и речи, и нельзя дать решительно никаких гарантий того, что многие важные области математики полностью свободны от внутренних противоречий.

В своей работе Гёдель получил два основных результата: доказал беспочвенность расчетов на нахождение доказательства непротиворечивости арифметики и пришел к неожиданному выводу, что для любой данной непротиворечивой системы арифметических аксиом имеются истинные арифметические предложения, не выводимые из аксиом этой системы.

Кроме того, исследования Гёделя показали, что аксиоматический подход к арифметике натуральных чисел не в состоянии охватить всю область истинных арифметических суждений. Отсюда также вытекает то, что наше понимание процесса математического доказательства не сводится к использованию аксиоматического метода. Формализованные аксиоматические процедуры доказательств основаны на некотором множестве выделенных и фиксированных с самого начала аксиом и правил вывода. Как видно уже из самих рассуждений, использованных в геделевских доказательствах, изобретательность математиков в деле отыскания новых правил доказательства не поддается никаким априорным ограничениям. Таким образом, совершенно безнадежно рассчитывать на то, что понятию убедительного математического доказательства можно придать раз и навсегда четко очерченные логические формы.

Работа Гёделя имела огромное значение для развития науки. Основываясь на доказательстве теоремы Гёделя о неполноте, датский физик Нильс

Бор сформулировал принцип дополнительности применительно к квантовой физике. Согласно этому принципу, чтобы наиболее адекватно описать физический объект, относящийся к микромиру, его нужно описывать во взаимоисключающих, дополнительных системах описания, например, одновременно и как волну, и как частицу.

Приход к власти Гитлера в Германии поначалу мало повлиял на жизнь Гёделя. Его никогда не интересовала политика. В 1934 г. Гёдель прочел курс лекций «О неразрешимых теоремах формальных математических систем» в Принстоне, США. Впоследствии тезисы этих лекций были опубликованы.

По возвращении в Европу Гёдель начал страдать нервным расстройством. Он позвонил брату Рудольфу из Парижа и сказал, что болен. Гёдель прошел курс психиатрического лечения, после чего провел несколько месяцев в санатории. Несмотря на проблемы со здоровьем, Гёдель продолжал свои исследования, в которых доказывал согласованность аксиомы выбора с другими аксиомами теории набора.

Летом 1938 г. Гёдель отправился в Гёттинген, где читал лекции о своих исследованиях в области теории набора. Осенью того же года он вернулся в Вену и женился на Адель Поркерт, с которой познакомился еще в 1927 г. в одном из венских ночных клубов. Она была на шесть лет старше и уже побывала в браке. Родители Гёделя, особенно отец, не одобрили выбор сына.

Когда началась война, Гёдель забеспокоился, что его призовут в армию. Он был убежден, что слишком слаб здоровьем, чтобы служить, но если его по ошибке принимали за еврея, то также по ошибке могли принять за здорового человека. Он не хотел рисковать, поэтому после получения американской визы вместе с женой уехал в США.

Гёдель приехал в Америку в 1940 г., а в 1948 г. стал гражданином США. С 1940 по 1953 г. он работал в Принстоне в Институте перспективных исследований, а с 1953 г. вошел в преподавательский состав этого института. Одним из ближайших друзей Гёделя в Принстоне был Альберт Эйнштейн.

Курт Гёдель внес заметный вклад в теорию множеств. Два принципа – аксиома выбора и континуум-гипотеза – на протяжении десятилетий не поддавались доказательству, но интерес к ним не ослабевал: слишком привлекательны были их логические следствия. В 1938 г. Гёдель доказал, что присоединение этих принципов к обычным аксиомам теории множеств не приводит к противоречию.

Гёдель был неординарным человеком. Многих удивляло, что великие ученые, Эйнштейн и Гёдель, очень разные по характеру, были связаны крепкой дружбой. В отличие от оптимиста Эйнштейна, Гёдель был подвержен болезненному страху, отказывался выходить, когда другие выдающиеся математики были в городе, боясь, что они попробуют убить его. Хотя другие члены института считали Гёделя мрачным и недоступным, Эйнштейн говорил, что он работает в их институте только ради привилегии ходьбы домой с Куртом Гёделем. Многие полагали, что причиной этому было то, что Гёдель не боялся Эйнштейна и был единственным, кто говорил с Эйнштейном на равных.

В середине 1940-х годов Гёдель начал интересоваться философией. В области философии математики он склонялся к платонизму и заявлял,

что обладает способностью экстрасенсорного восприятия математических сущностей.

Работы Гёделя по общей теории относительности были стимулированы увлечением философией Канта. В 1949 г. он нашел решение уравнений Эйнштейна в виде космологической модели с замкнутыми во времени подобными линиями. Из решения этого уравнения следует принципиальная возможность машины времени. В последние 20 лет жизни Гёдель не опубликовал ни одной работы.

Жители Принстона помнят Гёделя, который даже в самые жаркие летние дни всегда появлялся в университетском парке в теплом пальто с шерстяным шарфом, плотно облегавшем горло. Наиболее впечатлительные добавляют, что вся фигура ученого выражала полную отрешенность от внешнего мира.

В рассказах принстонских ученых он предстает существом бесплотным и болезненно уязвимым – своего рода духом, сотканным из логических построений. Гёдель никогда не работал в научных коллективах. Он был ученым-одиночкой. История его жизни – это история теоремы о неполноте, философской идеи, выходящей далеко за рамки математики, оказавшей революционное влияние на всю культуру и мировоззрение человечества.

В 1951 г. Гёдель получил самую престижную награду США в области науки – Эйнштейновскую премию, а в 1974 г. – Национальную медаль науки. Он был членом Национальной академии наук США, Института Франции и почетным членом Лондонского математического общества. Он дважды отказался от членства в Академии наук Вены.

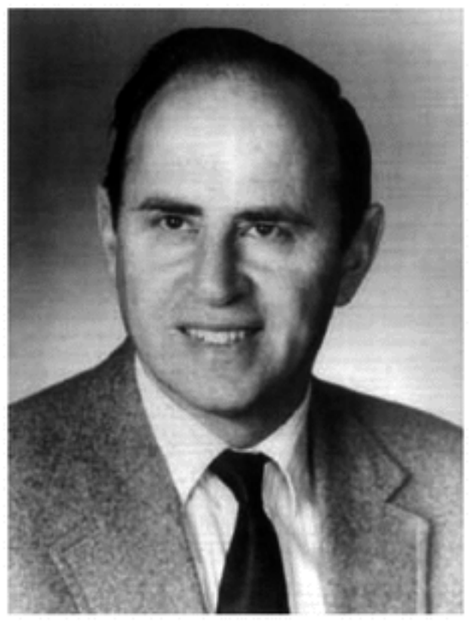
Шедевром является выполненная в 1940 г. в США работа Гёделя «Согласованность аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории набора». Однако Гёделю не удалось доказать независимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы от других аксиом теории набора. Это было сделано в 1963 г. П. Коэном, построившим свое доказательство на идеях Гёделя.

С годами Гёдель все больше беспокоился о своем здоровье. Уверенный в том, что он всегда прав не только в математике, но и во всем остальном, Гёдель не соглашался с врачами, что вредило его здоровью. После обильного кровотечения, вызванного язвой двенадцатиперстной кишки, он до конца жизни придерживался слишком строгой диеты, в результате чего медленно терял в весе. Со временем Гёдель пришел к выводу, что причиной язвы стало то, что он был отравлен. Отказываясь есть, чтобы избежать повторного отравления, Гёдель практически приговорил себя к смерти, последовавшей 14 января 1978 г. в Принстоне [48].

Вклад Гёделя в развитие математики не оценим. Его работы обогатили исследования по основаниям математики совершенно новыми методами рассуждений, позволили расширить проблематику логических и математических исследований, обусловили существенную переоценку перспектив философии в целом и философии математики, в частности.

Открытия Гёделя избавили математику от многих догм.

Пол Коэн



Американский математик Коэн Пол Джозеф родился 2 апреля 1934 г. в Лонг-Бранч в еврейской семье, эмигрировавшей из Польши. Коэн был младшим из четырех детей. Вырос он в Бруклине, там же начал свое образование. После развода родителей мальчика воспитывала мать.

С 1950 по 1953 г. Коэн был студентом Бруклинского колледжа. В 1954 г. он защитил диссертацию на степень магистра по теории чисел в Чикагском университете под руководством Андре Вейля. Там же Коэн в 1958 г. защитил диссертацию на степень доктора по теории тригонометрических рядов. В 1957 г. он был назначен преподавателем математики в университете Рочестера. В 1958/59 учебном году Коэн работал в Массачусетском технологическом институте, а в 1959–1961 гг. – научным сотрудником Института перспективных исследований в Принстоне. В 1961 г. он стал преподавателем Станфордского университета, в котором работал до 2004 г.

В 1962 г. Коэн участвовал в работе Международного математического конгресса в Стокгольме. Со своей супругой – шведкой Каролиной – Коэн познакомился в 1962 г. на борту круизного теплохода, следовавшего из Стокгольма в Ленинград.

Основные научные труды Коэна относятся к основаниям математики, теории множеств, математической логике, теории чисел, теории дифференциальных уравнений. Вершиной его профессиональной деятельности в области теории множеств стало обоснование невозможности доказательства континуум-гипотезы с помощью обычных методов теории множеств. Этот результат Коэн сообщил в лекции на международном симпозиуме по теории моделей в Беркли 4 июля 1963 г. За это выдающееся открытие в 1964 г. он был принят в Национальную академию наук США, удостоен премии Бохера за достижения в области анализа и назначен профессором Станфордского университета.

Пол Коэн не разделял взглядов Гёделя и полагал, что теория множеств – не более чем аксиоматическая структура, а не частная модель мира.

В 1966 г. на Международном математическом конгрессе в Москве Коэн стал лауреатом премии и медали Филдса за исследования в области математической логики. В 1967 г. за научные достижения его наградили Национальной медалью науки США.

Позже Коэн много внимания уделял доказательству гипотезы Римана. Он говорил на английском, шведском, французском, испанском, немецком языках, идише, играл на фортепиано и скрипке, пел в хоре Станфордского университета и шведской фолк-группе.

На русском языке в 1969 г. была опубликована книга Пола Коэна «Теория множеств и континуум-гипотеза».

В 2004 г. Коэн официально вышел на пенсию, но до конца своих дней не оставлял преподавательской деятельности.

Скончался он в Станфорде 23 марта 2007 г. от редкого заболевания легких.

Глава 6

ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

В то время, когда в Казани Лобачевский в полном одиночестве создавал геометрические теории непреходящего научного значения, в далеком Петербурге закладывался фундамент большой научной школы, сыгравшей и играющей значительную роль в развитии математики.

Б.В. Гнеденко

Основание петербургской математической школы

«Фундамент» петербургской математической школы был заложен М.В. Остроградским и В.Я. Буняковским, ее основателем считают П.Л. Чебышёва. Под его руководством была объединена творческая деятельность математиков Петербурга. Характерной чертой деятельности представителей петербургской математической школы является тесная связь науки и практики. Со временем эта школа стала оказывать значительное влияние на развитие математики в стране.

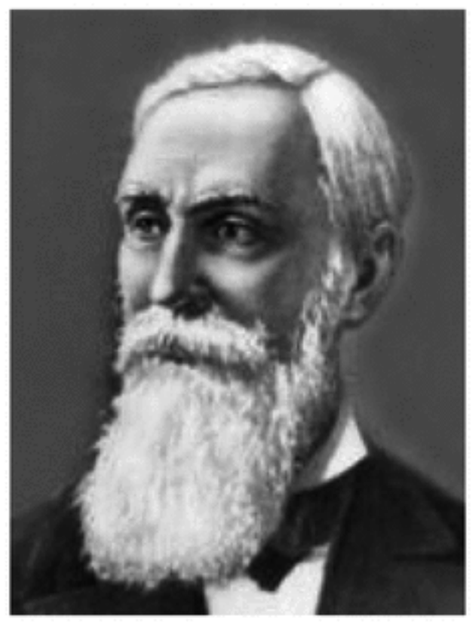
С середины XIX в. Петербургский университет становится важнейшим центром научной мысли в России. Основными объектами исследования учеников Чебышёва были следующие разделы математики: теория наилучшего приближения функций (Е.И. Золотарёв, А.А. Марков, В.А. Марков и другие), теория чисел (А.Н. Коркин, Е.И. Золотарёв, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной и другие), теория вероятностей (А.А. Марков, А.М. Ляпунов и другие), математическая физика и теоретическая механика (А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер и другие).

Традиции этой школы требовали умения увязывать математическую проблематику с принципиальными вопросами естествознания. Петербургских математиков отличало мастерство в решении конкретных задач, виртуозность в аналитических выкладках, доведение результатов до числа. Это позволяло проводить экспериментальную проверку разработанных теорий. Интерес к математической физике был вызван благодаря блестящей плеяде выдающихся французских математиков начала XIX в., которые совершенствовали теорию дифференциальных уравнений – основной математический аппарат исследования процессов в природе. В теории вероятностей математики петербургской школы были продолжателями работ Лапласа и его последователей, пытавшихся приложить ее к вопросам естествознания и социальным наукам. Интерес к теории чисел традиционно шел от Эйлера. В целом можно констатировать, что в основном петербургская математическая школа интересовалась прикладной математикой.

Такая направленность интересов петербургских математиков способствовала развитию недоверия к появившимся в Европе новаторским математическим направлениям. Идеи Римана и Кантора казались им математическим декадансом и философским туманом. Они их не одобряли и стремились не использовать в математических исследованиях. В начале XX столетия А. Лебегом было найдено чрезвычайно важное понятие меры множества. На его основе была создана новая теория интеграла (интеграл Лебега). Эти два основных понятия (меры и интеграла) составляют фундамент метрической теории функций действительного переменного, которая занимается изучением свойств функций, производных, интегралов и функциональных рядов. Часть теории функций, не опирающаяся на понятие меры, а изучающая внутреннее строение множеств в зависимости от операций, с помощью которых эти множества построены из более простых множеств, называется дескриптивной теорией функций. Она зародилась в начале XX в. в работах Э. Бореля, Р. Бэра и А. Лебега. Петербургские математики не одобряли эти новшества и гордились тем, что решают конкретные задачи строгими методами, точно устанавливающими погрешность получаемых результатов.

23 августа 1884 г. был утвержден новый университетский устав. Университеты лишились автономии, отменялась выборность их органов. С 1885 г. для поступления в университет требовалось удостоверение о «благонадежности» от полиции. Согласно новому уставу, на физико-математическом факультете были утверждены следующие кафедры: чистой математики, теоретической и прикладной механики, астрономии и геофизики, физики и физической географии, химии, минералогии и геологии, ботаники и зоологии, технологии и технической химии, агрономии.

П.Л. Чебышёв



Чебышёв Пафнутий Львович родился 4 мая 1821 г. в селе Окатово Калужской губернии в семье корнета казачьего полка Льва Павловича Чебышёва. О детстве Пафнутия Львовича мы знаем очень мало. Грамоте его обучала мать, французскому языку и арифметике – двоюродная сестра, а благодаря занятиям музыкой у мальчика развились аналитические способности и любовь к точности.

Пафнутий был хром, и, может быть, поэтому не выносил шумного общества, любил уединение. В детстве мальчик виртуозно мастерил перочинным ножом различные деревянные конструкции. Например, он изготовил водяную и ветряную мельницы со всеми передаточными механизмами. Страсть к изобретательству и конструированию у него сохранилась на всю жизнь [85].

Чтобы подготовить Пафнутия и его брата Павла к поступлению в университет, Чебышёвы в 1832 г. переехали в Москву. В 1837 г. 16-летний Пафнутий становится студентом физико-математического отделения философского

факультета Московского университета. Уже через год за математическое сочинение на тему «Вычисление корней уравнений» он был награжден серебряной медалью. С 1840 г. материальное положение семьи Чебышёвых пошатнулось, и Пафнутий Львович был вынужден зарабатывать самостоятельно.

В 1841 г. Чебышёв с отличием оканчивает университет. В 25 лет он защищает в Московском университете диссертацию на степень магистра по теории вероятностей. В 1847 г. он был зачислен адъюнктом Петербургского университета, а через два года получил степень доктора математических наук, избран профессором университета. Диссертацией служила его книга «Теория сравнений», которой затем более полувека студенты пользовались как одним из самых глубоких и серьезных руководств по теории чисел. Профессорская деятельность Чебышёва продолжалась до преклонного возраста. Тогда он оставил лекции и целиком погрузился в научную работу, которая длилась буквально до последних дней его жизни.

Академиком Чебышёв стал в 38 лет. Год спустя он был избран членом-корреспондентом Парижской академии наук, а в 1874 г. – ее иностранным членом.

Чебышёву принадлежит свыше 80 научных работ. К области научных интересов Чебышёва принадлежали теория чисел, теория вероятностей, интерполирование, теория наилучшего приближения функций, интегральное исчисление, картография, баллистика, астрономия, теория механизмов.

Труды Чебышёва отличаются законченностью содержания и совершенством формы. Ясное, строгое и стройное изложение, исключительная простота и конкретность в постановке задач делают его работы образцом математического исследования.

В начале научного пути Чебышёв обратил на себя внимание математиков всего мира благодаря двум сочинениям по теории чисел: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» (1849) и «О простых числах» (1850). До Чебышёва вопросы распределения простых чисел в натуральном ряду решались с использованием не всегда обоснованных предположений. Вопрос о том, по каким законам распределены простые числа, сколь правильно и как часто, оставался без ответа со времен Евклида, хотя им занимались крупнейшие математики мира, в том числе Эйлер и Гаусс.

Научные открытия Чебышёва в области простых чисел принесли славу российской математической науке и оказали огромное влияние на научное творчество многих выдающихся ученых на родине и за рубежом.

Еще одной областью исследований Чебышёва была теория вероятностей. Уже в 1840 г. он написал статью «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», в которой дал остроумное доказательство теоремы Пуассона. В 1867 г. вышла работа «О средних величинах», в которой было предложено общее доказательство закона больших чисел. В этой работе он доказал известное теперь под его именем неравенство, которое ныне приводится во всех учебниках по теории вероятностей.

Почти всю жизнь Чебышёв разрабатывал теорию наилучшего приближения функций. В 1853 г. вышла в свет «Теория механизмов, известных под

именем параллелограммов» – одна из лучших работ Чебышёва, отличающаяся богатством и новизной идей. Введенные им полиномы, наименее уклоняющиеся от функции в промежутке, обладают замечательными свойствами. В этой работе математика применялась для решения конкретных технических задач, что было связано с быстрым развитием машинной техники в середине и второй половине XIX в.

Свои полиномы Чебышёв использовал и для решения другой важной задачи – интерполирования по методу наименьших квадратов. Этому вопросу посвящены его работы «О непрерывных дробях» (1855) и «Об интерполировании в случае большого числа данных, полученных из наблюдений» (1858). Появление в 1859 г. (после Крымской войны) мемуаров Чебышёва «О разложении функций одной переменной» и «Об интерполировании по способу наименьших квадратов» было связано с его работой по специальному заданию Артиллерийского отделения Военно-учетного комитета и направлено на создание более совершенных математических средств для составления новых таблиц стрельбы. Выведенные Чебышёвым формулы для интерполирования нашли применение и в астрономии. Интерполяционный метод Чебышёва имел большое преимущество перед обыкновенным способом интерполирования по методу наименьших квадратов.

В работе «О кройке платья» изложена теория чебышевских сетей, коротко представлены решения интересных задач теории поверхностей, в частности задачи отображения плоскости на произвольную поверхность, при котором длины линий сохраняются. Чебышевские и получебышевские сети изучаются в современных курсах теории поверхностей.

Чебышёва занимали многие вопросы чистой и прикладной математики, например, формулы дальности полета снаряда, определение орбиты планеты по многим наблюдениям, кольцеобразная форма равновесия вращающейся жидкой массы, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона и т. д.

С именем Чебышёва связан ряд выдающихся изобретений по части шарнирно-рычажных механизмов, преобразующих круговое движение в прямолинейное.

В работе «О параллелограммах» (1869) Чебышёв предложил новую оригинальную систему регулирования паровой машины, обладавшую многими преимуществами перед другими системами того же типа. Паровая машина Чебышёва была экспонирована на Всемирной выставке в Филадельфии в 1876 г. Она была построена и испытана в Императорском московском техническом училище (ИМТУ, ныне МГТУ им. Н.Э. Баумана).

Несмотря на то, что научная жизнь П.Л. Чебышёва была связана, главным образом, с Санкт-Петербургом, с Императорским московским техническим училищем у него установилась постоянная тесная связь. Он регулярно посещал училище, чтобы руководить процессом изготовления, испытаниями спроектированных им регуляторов и других механизмов и устройств. Его работы публиковались в отчетах ИМТУ.

Летом 1893 г. в Чикаго была открыта Международная промышленная выставка. Особое внимание посетителей привлекли удивительные механизмы,

привезенные из России. Среди них были «стопоходящая» машина, довольно точно воспроизводившая шаги четвероногого животного, самоходное кресло, лодка с гребным механизмом, повторявшим движение весел. Один ученый, увидев эту лодку, воскликнул: «Я в восторге от вашей лодки с ногами, которая пойдет по воде, как лошадь!» [85]. На выставке можно было увидеть усовершенствованный центробежный регулятор, лучший в то время арифмометр и многое другое. Изобретателем этих оригинальных экспонатов был Пафнутий Львович Чебышёв, по праву считающийся «отцом современной теории механизмов».

Говоря о наиболее важных событиях в последние годы жизни Чебышёва, нельзя не упомянуть о награждении Пафнутия Львовича в 1890 г. орденом Почетного легиона. Инициатива по награждению Чебышёва орденом исходила от президента Парижской академии наук математика Шарля Эрмита, которого поддержали все французские академики.

Последний год жизни Чебышёва прошел тихо, без каких-либо значительных изменений. Темой его последней работы, опубликованной уже после смерти, был вопрос о суммах, зависящих от положительных значений какой-либо функции.

Умер Чебышёв 26 ноября (8 декабря) 1894 г. в возрасте 73 лет.

По инициативе Чебышёва, членом-корреспондентом Петербургской академии наук была избрана Софья Васильевна Ковалевская.

Чебышёв создал первую математическую школу в России, которая называлась петербургской математической школой. Среди его многочисленных учеников наиболее известны А.М. Ляпунов, А.А. Марков, А.Н. Крылов.

А.А. Марков

Марков Андрей Андреевич родился 2 июня 1856 г. в Рязанской губернии. Его отец сначала служил коллежским советником в уездном суде, затем частным поверенным. В начале 1860-х годов семья переехала в Петербург, где отец устроился на должность управляющего имением.

Андрей был слабым и болезненным ребенком. В детстве у него обнаружили костный туберкулез, поэтому он ходил на костылях. В Петербурге мальчику сделали операцию, после чего осталась только легкая хромота.

В 1866 г. Андрей поступил в 5-ю петербургскую гимназию. Он не относился к числу лучших учеников, но по математике имел высший балл. В школьные годы он самостоятельно изучил начала высшей математики и изобрел, как ему казалось, новый метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Профессора Петербургского университета Е.И. Золотарёв и А.Н. Коркин объяснили ему, что этот метод давно известен.

В 1874 г. Андрей поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. За все время обучения он имел только две «четвер-

ки»: по богословию и химии, которую ему поставил Д.И. Менделеев. На старших курсах он получал именную стипендию.

Под влиянием Пафнутия Львовича Чебышёва Марков начал заниматься исследованием в области интегрирования дифференциальных уравнений с помощью непрерывных дробей. За это исследование он получил золотую медаль.

По завершении обучения в 1878 г. Маркову предложили остаться преподавать в университете. Научную деятельность он начал с исследований по теории чисел. Он развивал научные идеи своих учителей – П.Л. Чебышёва, А.Н. Коркина, Е.И. Золотарёва – по нахождению экстремальных квадратичных форм данного определителя. Результаты исследований Марков представил в двух статьях и магистерской диссертации «О бинарных квадратичных формах положительного определителя», защищенной 13 апреля 1880 г. В диссертации проявились основные черты творческого дарования и математического стиля Маркова. Он стремился к решению четко сформулированных, конкретных математических задач, не терпел многословия и неопределенности, отрицательно относился к обобщениям в рассуждениях и постановке вопросов. Марков был незаурядным вычислителем и стремился доводить рассуждения до конца, результат до числа. В работах по теории чисел он не использовал геометрические представления и геометрический язык, полагая, что при его подходе к математической строгости они не могли служить доказательством и противоречили его стилю изложения. Подобный стиль изложения, сочетающий законченность результатов со сжатостью и строгостью формы, был характерен для всех ученых, принадлежавших к петербургской математической школе.

О диссертации Маркова математик Б.Н. Делоне писал: «Эта работа, весьма высоко оцененная Чебышёвым, принадлежит к числу самых острых достижений петербургской школы теории чисел, да, пожалуй, и всей русской математики» [35].

28 января 1885 г. Маркову была присуждена степень доктора математики после защиты диссертации на тему «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей». В этом труде, открывшем серию работ Маркова по теории моментов, доказаны и обобщены неравенства Чебышёва для исследования предельных величин интегралов. Эти работы стали важным средством исследования в теории вероятностей, по интерполированию и наилучшему приближению функций.

Лекции Марков читал по всем разделам высшей математики. Студенты любили его лекции, четкие и ясные.

Марков был очень эмоциональным человеком, любил долгие пешие прогулки, увлекался фотографией, отлично играл в шахматы. Существует запись шахматной партии, в которой он победил основоположника русской шахматной школы М.И. Чигорина.

В 1889 г. после смерти В.Я. Буняковского в Петербургской академии наук открылась вакансия академика по чистой математике. В 1890 г. на общем собрании Академии наук Маркова избрали экстраординарным академиком, в 1896 г. – ординарным академиком.

В университете Марков вел себя очень независимо. Он не шел на компромиссы, в спорах выражал свою точку зрения резко и определенно, что иногда приводило к сложностям в отношениях с коллегами. Он обратился в Синод с просьбой отлучить его от церкви (в знак протеста против отлучения от церкви Л.Н. Толстого), в 1913 г. отказался участвовать в праздновании 300-летия дома Романовых и организовал форум, посвященный 200-летию закона больших чисел.

Любимым разделом математики Маркова была теория вероятностей, в которой происходило своеобразное соревнование между Марковым и его другом А.М. Ляпуновым. При доказательстве центральной предельной теоремы Марков применял метод моментов, а Ляпунов – метод характеристических функций. Марков первым дал полное и строгое доказательство центральной предельной теоремы, но полученный позднее результат Ляпунова был более сильным. Позже Марков улучшил результат Ляпунова. Продолжая свои исследования, он пришел к идее «испытаний, связанных в цепь». Возник новый раздел математики, названный, по предложению Адамара, теорией цепей Маркова.

В 1913 г. Марков применил теорию вероятностей в лингвистике. Он исследовал роман Пушкина «Евгений Онегин» и повесть Аксакова «Детские годы Багрова-внука». Его интересовала вероятность, с которой за каждой буквой следует гласная или согласная. Исследования показали, что вероятностная модель, основанная на однородных цепях Маркова, описывает творческий процесс и дает математическое описание текста. Аппарат случайных процессов Маркова в настоящее время широко используется в научных исследованиях.

Кроме теории вероятностей, Марков занимался многими проблемами математического анализа. Его внимание привлекали исчисление конечных разностей, теория интерполирования функций, экстремальные задачи в функциональных пространствах, теория ортогональных многочленов, квадратурные формулы, теория функций, наименее уклоняющихся от нуля, и другие вопросы.

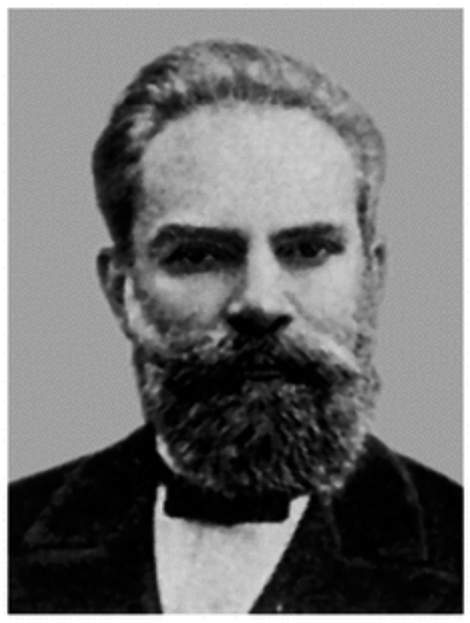
Значительный вклад внес Марков в теорию дифференциальных уравнений. Он исследовал дифференциальное уравнение Ламе и уравнение гипергеометрического ряда в связи с проблемой приводимости линейных дифференциальных уравнений.

Активной научной работе Маркова помешали Октябрьская революция и Гражданская война. В 1917 г. Марков с семьей выехал в Зарайск к родственникам, где преподавал математику в реальном училище. Осенью 1918 г. Марковы возвратились в Петроград, и Андрей Андреевич возобновил чтение лекций в университете.

В 1921 г. состояние здоровья А.А. Маркова заметно ухудшилось. Он уже несколько лет страдал глаукомой, которая обострилась еще в Зарайске. Успешная операция была сделана в Петрограде, но сам переезд в Петроград отрицательно сказался на зрении ученого и на общем состоянии здоровья. Осенью 1921 г. Марков заболел тяжелой формой радикулита, и в ноге образовалась аневризма.

Вечером 19 июля 1922 г. А.А. Марков скончался от общего заражения крови после операции по удалению аневризмы.

А.М. Ляпунов



Ляпунов Александр Михайлович родился 6 июня 1857 г. в Ярославле. Его отцом был известный астроном, директор Демидовского лицея Михаил Васильевич Ляпунов. Первоначальное образование Александр и оба его брата получили под руководством матери Софьи Александровны. Александру было 11 лет, когда умер его отец. Встал вопрос о дальнейшем образовании. К счастью, занятия удалось продолжить в семье Рафаила Михайловича Сеченова, женой которого была родная тетка Александра – Екатерина Васильевна Ляпунова. Уже в детстве проявился талант Александра и его братьев. Было очевидно, что им просто необходимо продолжать обучение. В 1870 г. Софья Александровна с детьми переехал в Нижний Новгород.

Окончив гимназию, А.М. Ляпунов осенью 1876 г. поступил на отделение естественных наук физико-математического факультета Петербургского университета. Чувствуя в себе способности к математическим наукам, он уже через месяц перешел на математическое отделение. Еще до окончания университетского курса, в возрасте 22 лет, А.М. Ляпунов потерял мать, поэтому забота о младшем брате легла на его плечи. В 1880 г. после окончания университета Ляпунов был оставлен при кафедре механики для подготовки к званию профессора.

Знаменательным в жизни Ляпунова стал 1881 г. Тогда были опубликованы две его первые работы: «О равновесии твердых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосудах определенной формы» и «О потенциале гидростатических давлений». В работах проявились самостоятельность и талант молодого ученого. В выборе темы для магистерской диссертации Ляпунову помог его учитель П.Л. Чебышёв. Он предложил очень сложную и интересную задачу о формах равновесия вращающейся жидкости. На решение поставленной Чебышёвым задачи потребовалось два года.

Защита Ляпуновым диссертации с присуждением степени магистра прикладной математики состоялась в январе 1885 г. и дала ему право преподавать. Весной 1885 г. А.М. Ляпунов был утвержден на должность приват-доцента Петербургского университета. Он уже собирался читать курс лекций там, но получил предложение занять вакантное место на кафедре механики в Харьковском университете. Осенью 1885 г. Ляпунов переехал в Харьков и в звании приват-доцента начал читать лекции по всем курсам кафедры. Академик Стеклов, ученик Ляпунова, вспоминал, что Александр Михайлович быстро завоевал уважение и исключительное почтение студентов, хотя из-за черной бороды и густых насупленных бровей имел мрачный вид.

В 1886 г. он женился на своей двоюродной сестре Наталье Рафаиловне Сеченовой.

Вплоть до 1892 г. Ляпунов один читал все разделы аналитической механики: кинематику, динамику точки, динамику системы точек, статику и динамику твердого тела, теорию притяжения, гидростатику и гидродинамику. К этим

курсам позднее прибавились курсы интегрирования дифференциальных уравнений динамики, теории возмущенного движения и теории вероятностей. Все курсы, которые читал Ляпунов, отличались наиболее универсальной постановкой решаемых проблем. Из общих решений поставленных задач вытекали частные решения конкретных задач.

В стенах Харьковского университета Ляпунов опубликовал ряд интересных с научной точки зрения работ по теории потенциала и теории устойчивости. В последующих работах харьковского периода Ляпунов развивал теорию устойчивости механических систем и связанные с нею вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общая задача об устойчивости движения сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений. Задача была поставлена творцом аналитической механики Лагранжем. Ее решали многие математики, начиная с самого Лагранжа, определившего устойчивость изолированного положения равновесия в случае минимума потенциальной энергии. Широкое распространение получили приемы замены системы дифференциальных уравнений «по первому приближению», когда отбрасываются все члены, содержащие неизвестные в степенях выше первой. Единственная попытка строгого решения вопроса устойчивости принадлежала Пуанкаре, но он ограничился лишь некоторыми простейшими случаями.

В работах Ляпунова исследованы на устойчивость дифференциальные уравнения возмущенного движения общего вида. Им впервые исследован общий случай системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Для такой системы он создал общую теорию характеристических чисел и на ее основе доказал существование асимптотических решений. Кроме того, он занимался вопросами теории вероятностей.

В 1893 г. Ляпуновым была защищена докторская диссертация на тему «Общая задача об устойчивости движения». В этой фундаментальной работе всесторонне рассмотрена проблема устойчивости движения систем с конечным числом степеней свободы.

В 1900 г. А.М. Ляпунов был избран членом-корреспондентом, а в 1901 г. – ординарным академиком Петербургской академии наук. В 1902 г. он переехал в Петербург. Вскоре Александр Михайлович оставляет педагогическую деятельность и посвящает все время научным исследованиям. Работы Ляпунова второго (петербургского) периода относятся к исследованию форм равновесия равномерно вращающейся жидкой массы, т. е. теории фигур небесных тел. Исследования этой теории ранее проводили Ньютон, Маклорен, Якоби, Ковалевская, Клеро, Лаплас, Пуанкаре и другие математики. Но только Ляпунову удалось создать строгую теорию рассматриваемой проблемы. Этим исследованиям Ляпунов посвятил последние 15 лет жизни. Наиболее важные результаты изложены в большой работе 1914 г. «О фигурах равновесия однородной вращающейся жидкости, мало отличающихся от эллипсоидальных» и в работе 1916 г. «Новые рассмотрения в теории фигур равновесия, близких к эллипсоидальным в случае однородной жидкости».

В научном наследии А.М. Ляпунова видное место занимают работы по математической теории потенциала и по теории вероятностей.

В 1908 г. он принимает участие в IV Международном конгрессе математиков, проходившем в Риме. Его избирают членом нескольких иностранных академий и научных обществ.

Ляпунов стал инициатором опубликования трудов Леонарда Эйлера, список которых содержал около 900 позиций. Благодаря настойчивости Ляпунова удалось добиться финансирования этого проекта правительствами России и Швейцарии.

В июне 1912 г. семью Ляпуновых постигло несчастье: после тяжелой болезни скончалась мать Натальи Рафаиловны – Екатерина Васильевна Сеченова, в результате чего обострились старые недуги жены Ляпунова. По совету докторов летом 1917 г. Ляпуновы уезжают в Одессу. События Первой мировой войны и Октябрьской революции 1917 г. Ляпунов переживал очень тяжело. К осени 1918 г. он был крайне изнурен и морально, и физически. В тот год он читал лишь одну лекцию в неделю в Харьковском университете. Эта работа приносила ему единственный доход, так как пенсию из Петербурга перестали пересылать в виду революционных событий. В это время у Ляпунова начинает активно развиваться катаракта.

31 октября 1918 г. от туберкулеза легких скончалась его жена. После свадьбы супруги Ляпуновы дали клятву не жить друг без друга. В день смерти жены Александр Михайлович выстрелил в себя и через три дня умер в университетской клинике, не приходя в сознание.

Ляпунов обессмертил свое имя, создав целую науку об устойчивости и равновесии движущихся механических систем. Он вывел законы, согласно которым можно точно рассчитать, какую форму примет поверхность вращающейся жидкости. Анализ движения твердого тела с полостями, целиком или частично заполненными жидкостями, важен в современной теории корабля, в общей теории гидравлических систем. Практически при проектировании и создании любых механизмов и машин необходимо исследование их устойчивости при различных внешних условиях. В середине XX в. особенно актуальными стали вопросы устойчивости полета ракет и других летательных аппаратов.

В настоящее время теория Ляпунова положена в основу автоматического управления производственными процессами. Особую важность приобрела проблема устойчивости движения искусственных спутников Земли. Ляпунов поднял престиж отечественной науки за рубежом и воспитал многих учеников.

В.А. Стеклов

Стеклов Владимир Андреевич родился 9 января 1863 г. в Нижнем Новгороде в семье ректора духовной семинарии Андрея Ивановича Стеклова. Его мать Екатерина Дмитриевна была близкой родственницей выдающегося критика Николая Александровича Добролюбова. Дома Володя получил подготовку, достаточную для поступления в гимназию, которая называлась Нижегородским Александровским институтом. Начиная с шестого класса в круг интересов мальчика вошли физика,

химия, математика и искусство. Также Владимир увлекался музыкой, пением, театром настолько, что по окончании гимназии думал о том, чтобы посвятить себя искусству.

Однако после окончания гимназии Стеклов поступил на физико-математический факультет Московского университета. На первом курсе он получил «двойку» по физической географии и решил перевестись на медицинский факультет. Мест не оказалось. Он вновь поступил на первый курс математического факультета, но уже в Харьковский университет. Отныне и навсегда он устанавливает для себя строгий, напряженный распорядок рабочего дня. Его любимым учителем становится молодой профессор, талантливый математик и механик А.М. Ляпунов. В 1887 г. Стеклов окончил обучение со степенью магистра наук и остался преподавать в университете. В первое же лето после окончания университета он выполнил научную работу о движении твердого тела в жидкости.

Интересы В.А. Стеклова с самого начала его научной деятельности были очень разносторонними: теория упругости, гидродинамика, высшая алгебра и математическая физика, которой он уделял наибольшее внимание. В 1902 г. он получил степень доктора прикладной математики после защиты диссертации «Общие методы решения основных задач математической физики» и в том же году был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук, а в 1912 г. – ее действительным членом. Харьковский период деятельности Владимира Андреевича продолжался до 1906 г. С апреля 1906 г. в течение 20 лет он жил и трудился в Петербурге.

В 1919 г. В.А. Стеклов был избран вице-президентом Академии наук и председателем ее хозяйственного комитета. В тот период во всей полноте проявился научный и организаторский талант знаменитого ученого. Он наладил печатание научных трудов, организовал приобретение книг и журналов за границей. Владимир Андреевич был членом комиссии по изучению производительных сил при Совнаркоме и директором Физико-математического института Академии наук, который в то время стал центром организационной и научно-исследовательской работы по физике и математике.

Стеклов являлся профессором университета и главой созданной им научной школы математической физики, историком математики, философом и писателем, академиком и общественным деятелем. Он был горячим патриотом, любил свой народ, его культуру и историю. Ученик Стеклова – академик В.И. Смирнов писал: «Любовь к русской музыке, привычка приводить изречения Петра Великого, Ломоносова, Лобачевского – все это было… выражением подлинной, кровной связи его с русской культурой, и сам В.А. Стеклов является одним из крупнейших представителей этой культуры» [85]. Стеклов имел богатырскую внешность, говорил низким басом и любил передразнивать других. В молодости он мечтал о карьере певца.

23 февраля 1926 г. в Казани отмечали 100-летие открытия неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским. По дороге в Казань Стеклов простудился и после болезни скончался 30 мая 1926 г.

Многие результаты исследований и открытия В.А. Стеклова вошли в мировую математическую науку с его именем. В их числе фундаментальные

функции Стеклова, теория замкнутости Стеклова, теорема Стеклова, функция Стеклова $F(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt$, свойства которой обладают рядом преимуществ по сравнению со свойствами исходной функции $f(x)$. Его имя носит всемирно известный Математический институт Российской академии наук.

Н.М. Гюнтер

Гюнтер Николай Максимович родился 5 декабря 1871 г. в Петербурге, окончил в 1894 г. Петербургский университет и был оставлен в нем для подготовки к научной деятельности. Его учителями были А.А. Марков и А.Н Коркин.

С 1893 г. Гюнтер преподавал математику на Высших женских курсах, а позднее – в Петербургском университете и Институте инженеров путей сообщения. В дореволюционные годы он издал несколько учебников – большой курс «Аналитической геометрии», «Введение в анализ», «Высшую математику» и много литографических пособий. Гюнтер – один из авторов широко известного «Сборника задач по высшей математике», многократно переиздававшегося в XX в.

Николая Максимовича отличала огромная любовь к педагогической деятельности. Его лекции всегда были наполнены особой культурой математической точности и строгости, ясным выражением мыслей.

В магистерской диссертации «О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (1903) Гюнтер рассматривал линейные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых являются рациональными функциями независимой переменной. В докторской диссертации «К теории характеристик систем уравнений в частных производных» (1913) он продолжил исследования французских математиков Адамара, Делассю, Рикье и других.

Последующие работы Гюнтера связаны с проблемами математической физики. Они примыкают к исследованиям А.М. Ляпунова и В.А. Стеклова. В 1920-х годах Гюнтер занимался теоремами существования решений дифференциальных уравнений гидродинамики при некоторых предположениях на конечном промежутке времени. Большую известность он получил как автор руководств по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка, вариационному исчислению, теории потенциала. Вместе с Я.В. Успенским и другими учеными Гюнтер составил задачник, известный как «задачник десяти авторов», который служил высшей школе более четверти века.

В 1920 г. в Педагогическом институте при университете был организован математический кружок. В 1921 г. этот кружок был преобразован в Петербургское физико-математическое общество. Гюнтер активно участвовал в работе этого общества и вскоре стал его председателем. Он был участником Международного математического конгресса в Торонто в 1924 г.

В том же году Гюнтер был избран членом-корреспондентом АН СССР. В 1927 г. он получил премию Главнауки Наркомпроса СССР за цикл работ, посвященных доказательству существования решений уравнений гидродинамики при некоторых весьма общих условиях с возможно меньшим числом ограничений.

В декабре 1928 г. в Ленинграде было организовано Общество математиков-материалистов при Ленинградском отделении Коммунистической академии, состоявшее из политически активных, но в профессиональном плане слабых математиков. Громкими фразами об отрыве теории от практики и о партийности естествознания они организовали нападки на Н.М. Гюнтера. В 1929 г. состоялись выборы а Академию наук СССР. Ленинградские ученые выдвинули три кандидатуры в академики: И.М. Виноградова, Н.М. Гюнтера и Б.Н. Делоне. Выбрать должны были одного. Делоне взял самоотвод, а кандидатура Гюнтера не прошла по политическим соображениям. Над его головой уже сгущались тучи. Академиком избран был Иван Матвеевич Виноградов [54].

Гюнтер вынужден был уйти с поста председателя Ленинградского математического общества. Это позволило ему остаться профессором университета. На Первом Всесоюзном съезде математиков в 1930 г. он читал обзорный доклад «О некоторых научных работах академика В.А. Стеклова».

Когда в стране началась охота на инакомыслящих ученых, из математиков первыми под каток попали Д.Ф. Егоров и Н.М. Гюнтер. После «егоровщины» в конце 1930 г. в Москве, в марте 1931 г. начались гонения на Гюнтера в Ленинграде.

На Втором Всесоюзном математическом съезде Гюнтер читал доклад «Интегралы Стилтьеса в математической физике и в теории интегральных уравнений». Он заведовал кафедрой дифференциальных уравнений Ленинградского университета до самой смерти за исключением периода с 1932–1937 гг.

1930-е годы были завершением научно-педагогической деятельности Н.М. Гюнтера. Всего в Ленинградском университете он проработал 47 лет и более 30 лет в Институте инженеров путей сообщения. Преподавал он и в других ленинградских вузах. Только за три недели до смерти, последовавшей в 1941 г., он оставил педагогическую деятельность.

В.И. Смирнов

Смирнов Владимир Иванович родился 10 июня 1887 г. в Петербурге. Вся его жизнь связана с родным городом. В 1910 г. Смирнов окончил Петербургский университет. Его любимыми учителями были В.А. Стеклов и А.А. Марков. В 1912 г. Смирнов стал профессором математики в Петербургском (Ленинградском) институте инженеров путей сообщения, где работал до 1930 г. В 1915 г. Смирнов получил ученое звание профессора Ленинградского университета, где работал до конца жизни, продолжая и развивая традиции петербургской математической школы.

Первые научные работы Смирнова посвящены теории функций комплексного переменного. Им рассматривались вопросы униформизации многозначных аналитических функций, исследовались фуксовы группы и фуксовые функции при наличии бесконечного числа производящих подстановок соответствующей группы. Он занимался обращением дифференциального уравнения типа Фукса с четырьмя особыми точками. В 1925 г. Смирнов организовал в Ленинградском университете кафедру теории функций комплексного переменного.

Смирнов исследовал полноту системы ортогональных на спрямляемом замкнутом контуре многочленов, а также изучал вопросы, связанные с предельными значениями аналитических функций. В 1930-е годы Смирнов продолжал исследования в области математической физики, аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного. В середине 1930-х годов он вместе с Г.М. Фихтенгольцем начал исследования по функциональному анализу.

С 1924 по 1947 г. Смирнов работал над пятитомником «Курс высшей математики», за который в 1948 г. получил Государственную премию. Фактически этот пятитомник – единственное в мировой литературе руководство по математике учебно-энциклопедического характера, написанное для инженеров с высокой математической подготовкой, но использовавшееся и профессиональными математиками. Первый том выдержал более 20 изданий. Остальные тома издавались реже, потому что включали специальные сведения. Они выдержали не менее 9 изданий. Их постоянно совершенствовали и переводили на иностранные языки.

В 1932 г. Смирнов совместно с С.Л. Соболевым предложил метод решения задач теории упругости с использованием теории функций комплексного переменного, открыв тем самым большие возможности в решении целого ряда актуальных задач механики. Ими, например, был разработан новый метод решения некоторых задач теории распространения волн в упругих средах с плоскими границами. Смирновым были исследованы функционально-инвариантные решения линейных уравнений эллиптического типа с любым числом переменных.

В 1929–1935 гг. Смирнов работал в Сейсмологическом и Математическом институтах АН СССР. В 1932 г. избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1936 г. ему присвоена ученая степень доктора физико-математических наук, в 1943 г. его избрали академиком. В годы Отечественной войны Смирнов руководил работами по важнейшей оборонной тематике. В Елабуге, куда была эвакуирована большая часть Ленинградского университета, Смирнов возглавил группу математиков, занимавшихся аэродинамикой и гидродинамикой.

В послевоенные годы Владимир Иванович работал над теорией сопряженных функций, занимался изданием и переизданием пятитомника. Некоторые его исследования положили начало новому направлению в теоретических исследованиях по сейсмологии. Смирнов публиковал работы по дифференциальным уравнениям в частных производных, по вариационному исчислению, прикладной математике и истории математики. Он возглавлял академическую комиссию по истории физико-математических наук и Ученый совет

Архива АН СССР, принимал активное участие в издании трудов М.В. Остроградского, А.М. Ляпунова, А.Н. Крылова, Н.М. Гюнтера.

Смирнов был выдающимся педагогом и организатором. В университете он руководил в разное время шестью математическими кафедрами. Его лекции были столь интересны, что их приходили слушать студенты других потоков. Смирнов активно участвовал в организации физического факультета Ленинградского университета и совершенствовании системы математического образования для физиков. Под его руководством или по его инициативе начали и продолжали работу многочисленные научные семинары, в том числе первые в Ленинграде семинары по функциональному анализу и теории операторов, а также по приближенным методам анализа. Международную известность приобрел руководимый им семинар по математической физике.

В течение 20 лет Смирнов возглавлял Институт математики и механики Ленинградского университета. Он был президентом (а затем почетным президентом) Ленинградского математического общества, членом редколлегии ряда специальных журналов и издательств, председателем созданной в 1957 г. Эйлеровской комиссии.

Смирнов был человеком эрудированным: помимо математики, он интересовался философией, историей, литературой, музыкой. В течение 50 лет он не пропускал ни одного хорошего концерта в Ленинградской филармонии, сам играл на рояле, помнил наизусть партитуры любимых опер, все основные симфонии Бетховена и других классиков. Смирнов обладал потрясающей памятью: курс университетской математики он знал полностью и при написании пятитомника практически не обращался к другим книгам. Он был очень скромным человеком, чрезвычайно приятным собеседником [54].

В год 80-летия Смирнову было присвоено звание Героя Социалистического Труда. Он награжден четырьмя орденами Ленина, а также рядом других орденов и медалей.

Умер В.И. Смирнов 11 февраля 1974 г. в Ленинграде.

Глава 7

НЕМЕЦКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

> Насколько трагической является многовековая политическая история Германии, настолько счастливой является история ее высшего образования.
>
> *Г. Вейль*

Система обучения в университетах Германии в XIX в.

К середине XIX в. в Европе центр математической мысли переместился из Франции в Германию, где сформировалась более прогрессивная система организации высшего образования. Герман Вейль в книге «Математическое мышление» [22] дает следующую характеристику немецким университетам.

Немецкие университеты в Средние века были такими же, как и во всей Европе. В начале XVIII столетия в Германии произошли изменения, положившие начало объединению преподавания и научных исследований. Философский факультет, игравший в Средние века подчиненную роль, стал центром главных научных исследований и источником знаний, на которых базировались все профессии, представленные в университете. Эта традиция началась с философского факультета Прусского университета в Галле. Вскоре король Англии Георг II, который был одновременно правителем Ганновера, организовал университет Георга Августа в Гёттингене. Эти университеты заняли ведущее положение в интеллектуальной жизни нации. В 1810 г. в Германии, оккупированной наполеоновской армией, по проекту Вильгельма фон Гумбольдта был основан Берлинский университет. Он стал образцом для всех других университетов страны.

В Германии всегда царил дух милитаризма, в почете были две социальные группы: военные и студенты. Там же нашла свое продолжение наполеоновская традиция уважения к математике с точки зрения военных интересов. Считалось, что студенты на каникулах должны продолжать занятия дома, а не зарабатывать себе на жизнь, так как физический труд не соответствовал их социальному статусу.

Университеты были самоуправляемой корпорацией с собственной юрисдикцией. Ректор избирался на год из профессоров университета. Поступив в университет, студент сам решал, что будет изучать. На старших курсах обучение проходило без зачетов и экзаменов. Студент также самостоятельно выбирал преподавателей, лекции которых хотел бы прослушать, практические занятия и семинары, в работе которых собирался участвовать. Не было никакого контроля посещаемости. Обычно студент два или три раза

переходил из университета в университет в зависимости от того, насколько популярен был преподаватель, у которого он намеревался обучаться. Студенты не платили за обучение, но вносили умеренную сумму за каждый прослушанный ими курс лекций.

Лектор по своему усмотрению выбирал темы лекций. Для поддержания авторитета он стремился излагать студентам результаты своих последних исследований. Использование материала учебников считалось плохим тоном. Лекции наиболее популярных ученых собирали до 500 студентов. Кроме практических занятий, большую роль в учебном процессе играли семинарские занятия, на которых студенты приобщались к научно-исследовательской работе.

По окончании университета студент, если он был намерен заниматься научной карьерой или поступить на государственную службу, должен был сдать государственный экзамен. Например, комиссия, принимающая экзамены на звание школьного учителя, назначалась государством из числа профессоров университета и школьных работников. Одним из условий допуска к экзамену было обучение в университете в течение определенного времени (трех или четырех лет). Такая система подготовки ученых способствовала чрезвычайно высокому уровню научных исследований. В результате во второй половине XIX в. Германия заняла лидирующие позиции в математике.

Развитию математики способствовало и создание в 1826 г. «Журнала чистой и прикладной математики», который по имени основателя часто называют журналом Крелля. Так как в нем публиковались в основном работы по абстрактной математике, его в шутку называли «Журнал чистой, неприкладной математики».

Доход профессора составляли: оклад, выплачиваемый государством, и проценты от взносов студентов, посещавших его лекции. Назначение профессора на должность было пожизненным, и оклад сохранялся при выходе в отставку. Защита диссертации и ученая степень доктора философии не давали права читать лекции по математике в университете. Для получения этого права необходима была так называемая хабилитация. Она заключалась в выполнении еще одного оригинального математического исследования, которое должно было получить одобрение факультета. После этого присваивали звание приват-доцента и давали право чтения лекций без официальной зарплаты. Доценты получали определенный процент от платы, вносимой студентами за обучение. Поскольку таких студентов, как правило, было мало, то молодой доктор для того, чтобы иметь средства к существованию, обычно сдавал государственный экзамен, который дает право стать учителем гимназии.

Карл Вейеритрасс

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм родился 31 октября 1815 г. в Остенфельде (Бавария) в семье секретаря мэра города, позже – налогового инспектора. Из-за частых переездов отца Карлу пришлось поменять много школ. После окончания католической гимназии в Падерборне он поступил в Боннский университет, где изучал юриспруденцию, финансы и экономику. Математику он осваивал самостоятельно. В 1838 г., по окончании восьмого семестра, у Карла было сильное переутомление, он бросил университет, не сдавая экзамены, и провел полгода в отчем доме. Отец постарался, чтобы Карлу позволили обучаться в Академии теологии и философии Мюнстера. Там он получил право преподавать в средней школе. Помимо математики, его обязали преподавать также физику, ботанику, географию, историю, немецкий язык и чистописание.

В 1842–1848 гг. Вейерштрасс служил преподавателем католической прогимназии в Дойч-Кроне (Западная Пруссия), в 1848–1855 гг. – в Брауншвейге в учебном заведении, готовящем католических священников.

Первые его статьи по математике о функциях Абеля 1841 и 1842 гг. остались незамеченными. Статья 1854 г. «Для теории абелевских функций» вызвала большой интерес, и университет Кенигсберга присудил Вейерштрассу степень почетного доктора. Он получил отпуск для оформления результатов, опубликованных до того лишь в кратком, предварительном, виде. Полная версия теории инверсии гиперэллиптических интегралов была представлена в 1856 г. После этого ему предлагали кафедру в любом австрийском университете на выбор. Он принял предложение Королевского Политехнического университета в Берлине, где тогда работали Кронекер, Куммер, Борхардт.

Знаменитые лекции Вейерштрасса по математике привлекали студентов из многих стран. Темы лекций охватывали различные разделы математики. Им были прочитаны следующие курсы: «Применение ряда Фурье и интеграла Фурье в математической физике», «Введение в теорию аналитических функций», «Теория эллиптических функций и их применение к проблемам геометрии и механики», «Введение в анализ», «Интегральное исчисление». Своей славой Вейерштрасс обязан исключительной тщательности рассуждений, «вейерштрассовой строгости», что проявилось не только в его теории функций, но и в вариационном исчислении. Он уточнил смысл понятий минимума функции, производной и таким образом устранил неясности в формулировках основных понятий анализа. Карл Вейерштрасс был воплощением математической скрупулезности как в методологии, так и в логике рассуждений. Примером тому может служить открытие равномерной сходимости функциональных рядов. С Вейерштрасса начинается то сведение принципов математического анализа к простейшим арифметическим понятиям, которое называют арифметизацией математики.

Зимой 1859/60 гг. у Вейерштрасса стали появляться признаки переутомления, за которыми в 1861 г. последовало полное нервное расстройство. Только через год он смог возобновить чтение лекций. В 1864 г. 49-летнему ученому дали должность ординарного профессора.

В Берлинском университете Вейерштрасс и его коллеги Куммер и Кронекер были ведущими профессорами математики. Кронекер дружил с Вейерштрассом, но теория множеств Кантора, принятая Кронекером в штыки, стала яблоком раздора в их отношениях. Кронекер, опираясь на философские соображения, признавал действительное существование лишь целых, в крайнем случае – рациональных чисел. Он хотел полностью изгнать из математики иррациональные числа и создал новое направление, сторонники которого считали вейерштрассово обоснование теории функций неудовлетворительным.

Вейерштрасс мало печатался, но конспекты его лекций широко распространялись, и постепенно он приобрел в научном мире беспримерный авторитет. Многие его ученики позже стали известными учеными: Больд, Кантор, Киллинг, Клейн, Ли, Минковский, Шварц, Штольц. Среди его учеников была и Софья Ковалевская. Именно с помощью Вейерштрасса Ковалевская получила степень почетного доктора и должность в Стокгольме в 1883 г. Они переписывались в течение 20 лет, с 1871 по 1890 г. Переписка составила более 160 писем, но Вейерштрасс сжег письма Ковалевской после ее смерти.

Вейерштрасса считают отцом современного анализа: он придумал тесты на сходимость ряда и внес вклад в теорию периодических функций, функций действительного переменного, эллиптических функций, функций Абеля; им исследованы сходимость бесконечных произведений и вычисление вариаций, развита теория билинейных и квадратичных форм.

В течение последних трех лет жизни Вейерштрасс был прикован к инвалидному креслу. Причиной смерти, последовавшей 19 февраля 1897 г., стала пневмония.

Бернхард Риман

Риман Георг Фридрих Бернхард родился 17 сентября 1826 г. в деревне Брезеленц в Ганноверском королевстве в семье лютеранского священника. Когда мальчику исполнилось 10 лет, с ним стал заниматься учитель, которого Бернхард вскоре превзошел. Еще в гимназии он за шесть дней изучил книгу Лежандра по теории чисел, содержавшую около 900 страниц.

В 1846 г. Риман поступил на богословский факультет Гёттингенского университета, затем перешел на философский, где слушал лекции Гаусса по методу наименьших квадратов. Через год он продолжил обучение в Берлинском университете, но в 1849 г. вернулся в Гёттингенский, куда в то время был приглашен Вебер, который распознал гениальность Римана и при-

близил к себе этого робкого студента. В 1850 г. Риман стал членом только что основанного тогда гёттингенского физико-математического семинара, быстро поднялся в нем до положения одного из руководителей и стал ассистентом Вебера по физическому практикуму.

В декабре 1851 г. Риман получил степень доктора за работу «Основы общей теории функций комплексного переменного». Как Д'Аламбер и Коши, он исходил из гидродинамических интерпретаций теории. Следствием использования конформных отображений стало появление нового понятия римановой поверхности, что позволило ввести в анализ топологические идеи. В то время топология была еще недостаточно исследованным разделом математики. Диссертация Римана, написанная сжато, была настолько неортодоксальной в трактовке затронутых вопросов, что многие математики предпочли ее игнорировать. Вейерштрасс в то время был уже известным профессором Берлинского университета, его считали основателем строго построенной теории функций. Вскоре он обнаружил в работе Римана прореху, на которую сам Риман, уверенный в справедливости полученных им результатов, не обращал внимания. У математиков это вызвало продолжительное и почти всеобщее «непризнание» созданной Риманом теории. Хотя идеи Римана поддерживались убежденными в его правоте учениками, только через пятьдесят лет после появления диссертации Римана Гильберту удалось дать исчерпывающие ответы на все вопросы, неразрешенные Риманом до конца. Это была реабилитация принципа, названного Риманом принципом Дирихле.

По традиции претендент на должность экстраординарного профессора должен выступить перед профессорами университета. В 1954 г. Риман сделал доклад на тему «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Содержание работы не одобрили – Римана на должность не утвердили. Значение этого доклада, с которого началась риманова геометрия, было оценено гораздо позже.

В 1855 г. умер Гаусс и на его кафедру был приглашен Дирихле, который знал о математических способностях Римана еще по Берлину. При поддержке Дирихле Риман был назначен приват-доцентом и стал читать лекции по результатам собственных исследований: о функциях комплексного переменного, и в частности об эллиптических и абелевых функциях, о гипергеометрических рядах и трансцендентных функциях. В лекциях он приводил пример непрерывной функции, не имеющей производной. Математики не хотели серьезно относиться к таким функциям и называли их «патологическими», но современный анализ показал, насколько такие функции естественны [42].

На начальном этапе работы доцентом Риман, будучи робким по природе, часто подвергался насмешкам со стороны коллег. Он был болезненным, часто у него бывало мрачное настроение, доходившее до приступов меланхолии. Отгородившись от окружающего мира, Риман тихо жил своей необычайно богатой внутренней жизнью. Внешне он был тих и чудаковат, внутренне – полон сил и энергии.

Риман рассматривал гипотезы, на которых основана геометрия. Пространство он вводил как топологическое многообразие произвольного числа

измерений. Этот объединяющий принцип позволил Риману не только классифицировать все существовавшие виды геометрии, включая еще весьма неясную тогда неевклидову геометрию, но дал также возможность создать любое число новых видов пространства, многие из которых впоследствии с пользой были введены в геометрию и математическую физику.

В 1857 г. Риман получил место экстраординарного профессора и издал работу «Теория абелевых функций». Вейерштрасс, написавший работу на ту же тему, узнав о труде Римана, отозвал свою работу и не стал ее публиковать. Правда, вскоре Вейерштрасс нашел пробел в работе Римана, за который Риман подвергся издевательской критике со стороны профессора философии Дюринга. Этот недочет устранил Шварц.

На 1857–1859 гг. приходится расцвет творчества Римана. После смерти Дирихле в 1859 г. Риман был избран ординарным профессором и занял кафедру, возглавляемую до него Гауссом и Дирихле.

Последней работой Римана по математике было исследование «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» (1859). Эта работа стала фундаментом для исследований других математиков на многие десятилетия.

Интересы Римана переместились в область математической физики. У него имеются работы, посвященные исследованию формы Земли. Написанная в 1861 г. работа «Об одном вопросе из области теплопроводности» содержит аппарат квадратичных дифференциальных форм, позже использованный Эйнштейном в теории относительности.

Всего лишь три года смог Риман наслаждаться своей славой. Осенью 1862 г. вскоре после женитьбы он простудился, простуда вызвала обострение туберкулеза. С тех пор Риман жил в Италии, изредка возвращался в Гёттинген, но не возобновлял работу в университете. Вебер и Вальтергаузен трижды добивались правительственных субсидий на лечение Римана. Когда здоровье позволяло, он продолжал трудиться. Последняя работа Римана – «Механизм уха» – была напечатана посмертно. Бернхард Риман умер 20 июля 1866 г. Ему не было и 40 лет.

За 15 лет в науке Риман выполнил основополагающие исследования по теории аналитических функций, геометрии, топологии, теории чисел, аналитической теории дифференциальных уравнений, тригонометрическим рядам, теории интеграла. На их основе в XX в. в математику вошли метрические и топологические пространства, был создан функциональный анализ – раздел, в котором обобщаются основные операции математического анализа: предельные переходы, дифференцирование, интегрирование.

Имя Римана на века останется в науке. В математике используются такие понятия, как риманова геометрия, риманова поверхность, римановы пространства, риманова кривизна, дзета-функция Римана, условия Коши – Римана, интеграл Римана, теорема Римана – Роха, лемма Римана – Лебега и другие.

Выдающийся математик Феликс Клейн, который студентом слушал лекции Римана, считал, что никто другой не оказал более значительного влияния на современную математику, чем Риман.

Юлиус Дедекинд

Дедекинд Юлиус Вильгельм Рихард родился 6 октября 1831 г. в Брауншвейге в семье профессора. В 1848 г. он поступил в Коллегиум Каролинум, а в 1850 г. – в Гёттингенский университет, где слушал лекции Гаусса.

Дедекинд был последним учеником Гаусса и под его руководством написал диссертацию по теории интегралов Эйлера. С 1854 г. он преподавал в Гёттингене теорию вероятностей и геометрию, а после смерти Гаусса работал под руководством Дирихле, по рекомендации которого с 1858 г. стал преподавать в Цюрихском политехникуме. Там Дедекинд читал курсы по абелевым и эллиптическим функциям и теории Галуа. С 1862 по 1912 г. он работал профессором Высшей технической школы в Брауншвейге, где и его отец.

Основные труды Дедекинда связаны с теорией действительных чисел, математической логикой и теорией множеств. В 1872 г. он познакомился с Кантором. Так как их взгляды во многом совпадали, они быстро нашли общий язык и подружились. Дедекинд был основоположником и вдохновителем немецкой школы абстрактной алгебры XIX в. Им создан ряд общих концепций, лежащих в основе современной алгебры (дедекиндово кольцо, дедекиндова решетка). Ему принадлежит современное определение идеала.

Кроме собственных значительных работ по математике, Дедекинд известен тем, что издал сочинения Гаусса, Римана и Дирихле. Он обладал способностью формулировать свои идеи предельно ясно и стал основоположником нового стиля в математике.

Умер Дедекинд 12 февраля 1916 г. в Брауншвейге.

Феликс Клейн

Клейн Кристиан Феликс родился 25 апреля 1849 г. в Дюссельдорфе в семье чиновника. Еще студентом он стал ассистентом известного геометра Плюккера в Бонне. В 1868 г. после смерти Плюккера Клейн подготовил к печати рукописи своего учителя. Это определило и тематику его дальнейших самостоятельных исследований.

Используя результаты, полученные Артуром Кэли, Камилем Жорданом и другими математиками, Клейн в 1871 г. с позиций проективной геометрии поставил точку в доказательстве непротиворечивости геометрии Лобачевского и Больяй. Если выбрать в качестве определяющей характеристики соответствующий тип кривой второго порядка (эллипс, параболу, гиперболу или их вырожденные случаи), то многие известные к тому времени геометрии (Евклида, Лобачевского, Римана и других) можно трактовать как частные случаи проективной геометрии.

Наиболее важные из полученных Клейном результатов относятся к теории групп. Благодаря его работам теория групп стала одним из важнейших разделов математики. С ее развитием стал возможен синтез геометрических и алгебраических понятий, рассмотренных в трудах математиков от Гаусса и Монжа до Римана и Грассмана.

В 23 года Клейн был назначен профессором в Эрлангенском университете. Его вступительная лекция, известная под названием «Эрлангенская программа», стала эпохальным событием в математике. В ней с помощью теоретико-групповых понятий Клейну удалось классифицировать и объединить различные геометрии, созданные в XIX в. Любая геометрия объявлялась теорией инвариантов особой группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одной геометрии к другой. Этот подход Клейна позволил объединить многие различные геометрии: евклидову, афинную, проективную, все неевклидовы и ряд других.

Клейн был признанным лидером математики в Германии в последней трети XIX столетия. С самого начала своей карьеры он сочетал творческие и организационные способности и стремился разрушить барьер между абстрактной и прикладной математикой. Он был красивым темноволосым человеком с черной бородой и светящимися глазами. Современники отмечали величественность Клейна и даже применяли к нему эпитет «царственный». Он был женат на дочери философа Гегеля. Клейн был добрым человеком, хотя держал сослуживцев, даже Гильберта, на некотором расстоянии. Правительство присвоило Клейну титул «тайного советника», и он всегда настаивал на обращении к нему согласно этому титулу.

Спустя десятилетия идеи, изложенные в «Эрлангенской программе», нашли применение в различных естественных науках. Русский кристаллограф и геометр Евграф Степанович Фёдоров, используя идеи Клейна, открыл кристаллографические группы, ставшие научной основой кристаллографии и носящие теперь его имя. Теория групп нашла применение в ядерной физике, квантовой теории, физике элементарных частиц, теории относительности (группа преобразований Лоренца).

В обширных исследованиях, принадлежащих ему и его многочисленным ученикам, Клейн применил понятие группы к линейным дифференциальным уравнениям, к эллиптическим и модулярным функциям, к абелевым и автоморфным функциям. Он обнаружил и установил теорему униформизации, однако в ее реализации его опередил Пуанкаре. В разработке теории автоморфных функций с 1883 г. происходило своеобразное соревнование Клейна и Пуанкаре. Соперничество с Пуанкаре в построении теории автоморфных функций фактически закончилось вничью, но подорвало здоровье 33-летнего Клейна.

Клейн обладал развитой интуицией. Он мог, глядя на самые трудные проблемы, угадать их решение, но у него не хватало терпения провести логически совершенное доказательство теорем, в справедливости которых он был убежден.

В период между 1882 и 1898 гг. были изданы монографии Клейна, в которых излагались методы и результаты его обширных исследований римано-

вой теории функций, касающихся теории икосаэдра и эллиптических модулярных функций, первая часть теории автоморфных функций и первая часть теории волчка.

В 1886 г. Клейн переехал в Гёттинген, в котором жил до конца жизни. Стараниями Клейна Гёттингенский университет с традициями, заложенными Гауссом, Дирихле и Риманом, стал мировым центром математических исследований. В университете Клейн читал факультативные курсы по самым разным вопросам: от теории чисел до технической механики. Его лекции заслуженно были признаны классическими. Он заранее обдумывал план расположения формул, диаграмм и цитат. Во время лекции на доске ничего не стирал. К ее окончанию каждый квадратный сантиметр доски был аккуратно заполнен. Лекции Клейна воодушевляли слушателей, записи этих лекций, размноженные на стеклографе, были источником многих специальных сведений для нескольких поколений математиков.

Клейн считал, что факты появления новых математических результатов нельзя отделять от их исторического фона. По его мнению, процесс познания начинается с середины и далее развивается не только по восходящей, но и по нисходящей линии, теряясь в неизвестности. Нужно пытаться в обоих направлениях пробиться сквозь туман неведомого. Математика играет весьма существенную роль в формировании нашего духовного облика. Занятие математикой – подобно мифотворчеству, литературе или музыке – это одна из областей творческой деятельности человека, в которой проявляется его сущность, стремление к интеллектуальной деятельности, которая является одним из проявлений мировой гармонии.

Феликс Клейн был инициатором многих проектов: издания тридцатитомной математической энциклопедии, создания Международной школьной комиссии, ставившей себе целью изучение развития педагогических методов в цивилизованных странах и т. п. Студенты, называвшие его в своем кругу «великий Феликс», шутили: «В Гёттингене есть два сорта математиков – первые делают то, что им нравится, а не то, что нравится Клейну; вторые делают то, что хочет Клейн, а не то, чего они хотят. Клейн не относится ни к тем, ни к другим. Значит, Клейн не математик» [66].

Клейн всегда был патриотом. В 1870 г., когда началась война Германии с Францией, он поспешил из Парижа домой, чтобы добровольно вступить в армию. В 1914 г. после начала Первой мировой войны Клейн вместе с Эрлихом, Фишером, Нернстом, Планком, Рентгеном, Вассерманом и Вином подписал декларацию к культурному миру, опубликованную германским правительством. За это он был исключен из Парижской академии, в то время как Гильберту, не подписавшему декларацию, разрешено было остаться ее членом. Во время войны резко сократилась издательская и организационная деятельность Клейна, и он больше времени уделял истории и популяризации математики. Им написаны книги «Элементарная математика с точки зрения высшей», «Высшая геометрия», «Лекции об икосаэдре», «Четыре знаменитые задачи древности», «Лекции о развитии математики в XIX столетии».

При Клейне Гёттингенский университет превратился в центр математической и физической мысли, учиться в котором было мечтой многих

студентов. Лекции там читали Ф. Клейн, К. Рунге, Э. Ландау, Д. Гильберт, Э. Цермело, Г. Вейль, Г. Минковский, М. Борн, Дж. Франк. Часто приглашались из других университетов Г. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Зоммерфельд, Н. Бор, М. Планк, П. Эренфест.

Клейн осуществлял организационное руководство геттингенской математической школой в течение примерно 30 лет (1890–1920). К концу этого тридцатилетия Клейн стал болеть и лишь формально оставался руководителем школы. Вопрос о преемнике не мог не возникнуть. То, что во главе геттингенской математики идейно стоял Давид Гильберт, было бесспорным для всех.

Феликс Клейн, оставившийся в памяти людей на долгие годы, был первооткрывателем новых путей в теории групп, абстрактной алгебре и топологии.

Умер Клейн в июне 1925 г. На его могиле простая надпись: «Феликс Клейн, друг, искренний и неизменный» [66].

Давид Гильберт

Гильберт Давид родился 23 января 1862 г. в городке Велау вблизи Кёнигсберга в семье окружного судьи Отто Гильберта и купеческой дочери Марии Терезы. Отец учил его пунктуальности, бережливости, дисциплине и уважению законов. Мать дала ему первые уроки математики и астрономии.

Осенью 1880 г., после окончания лучшей гимназии города Кёнигсберга, в которой когда-то учился Иммануил Кант, Давид Гильберт поступил на математический курс философского факультета Кёнигсбергского университета. В то время студенты часто переходили из одного университета в другой. Во втором семестре Гильберт учился в Гейдельбергском университете, а затем вернулся в Кёнигсбергский. Весной 1882 г. он подружился с будущим знаменитым математиком Германом Минковским.

Следует отметить одну особенность математического мышления Гильберта. Многих удивляла его медлительность в понимании идей, которые другие схватывали на лету. Сам он позже говорил Харальду Бору: «То, что мне удалось что-то сделать в математике, объясняется, на самом деле, тем, что я всегда находил все очень сложным. Когда я читаю или когда мне что-то рассказывают, мне почти всегда это кажется очень трудным и практически невозможным понять. Тогда я не могу не задать себе вопрос, а не может ли это быть проще. И в некоторых случаях, оказывалось, что это действительно намного проще» [66].

После окончания университета Гильберт защитил диссертацию, посвященную свойствам инвариантности некоторых алгебраических форм. Тему диссертации, предложенную ему руководителем Линдеманом, Гильберт раскрыл новым, оригинальным способом. Пройдя хабилитацию в мае 1885 г., Гильберт поехал в Лейпциг к Клейну. Доклад Гильберта на семинаре в 1885 г.

понравился Клейну, который позже писал: «Когда я услышал его доклад, я сразу же понял, что у этого человека большое будущее в математике» [66].

Летом 1886 г. в Париже Гильберт познакомился с известными французскими математиками Пуанкаре, Жорданом и Эрмитом. В Кёнигсберге в июле 1886 г. он получил звание приват-доцента, дающее право на чтение лекций, и решил в каждом семестре читать лекции по разным курсам, не повторяясь. Собственные его научные работы в это время относились исключительно к теории алгебраических инвариантов.

В 1888 г. Гильберт отправился в Эрланген, где встретился с «королем инвариантов» Паулем Горданом. В теории инвариантов уже в течение 20 лет существовала проблема Гордана, являющаяся чисто математической и вызванная внутренним развитием математики. Нужно было проверить, существует ли базис, т. е. конечная система инвариантов, через которые рационально выражается любой другой из бесконечного числа инвариантов.

Первым шагом на пути решения проблемы Гордана было доказательство Гильбертом более коротким и простым способом знаменитой теоремы Гордана для бинарных форм. 6 сентября 1888 г. Гильберт послал короткую заметку в журнал Гёттингенского научного общества, в которой сделал набросок совершенно неожиданного и оригинального способа доказательства теоремы Гордана, годного одновременно для форм от любого числа неизвестных. Многие математики, привыкшие к громоздким выкладкам в теории инвариантов, не поверили в возможность существования лаконичного доказательства.

Главное значение работы заключалось в применении арифметических методов к алгебраическим проблемам. Решение Гильберта не было конструктивным; оно лишь доказывало существование базиса, но не давало явной конструкции для его построения. Оно не понравилось Гордану: «Это не математика. Это теология» [42]. Гордан был против публикации доказательства в таком виде, а Гильберт ничего не хотел менять. Позже, в 1892 г., ему удалось предложить метод, позволяющий за конечное число шагов получить искомую конструкцию.

Гильберт был первым, кто осознал значение и силу косвенных, не конструктивных доказательств, хотя и не был первым, кто их применил. При решении проблемы Гордана он нашел свой метод, которым в дальнейшем успешно пользовался. После решения проблемы Гордана Гильберт больше не занимался теорией инвариантов.

В октябре 1892 г. Гильберт дал новое доказательство трансцендентности чисел e (впервые получено Эрмитом) и π (впервые получено Линдеманом). Он женился, получил должность профессора и занялся теорией чисел. В 1893 г. Германским математическим обществом ему и Минковскому было поручено подготовить обзор по теории чисел и отобрать идеи, наиболее перспективные для дальнейших исследований. Минковский занимался рациональными числами, а Гильберт – алгебраической теорией чисел. Львиную долю работы сделал Гильберт. Начав работу в Кёнигсберге, он через три года закончил ее в Гёттингене, куда переехал по приглашению Клейна в 1895 г.

Теорию чисел Гильберт считал «зданием редкой красоты и гармонии» [66]. Работы Куммера, Кронекера и Дедекинда в этой области были чрез-

вычайно сложными и недоступными для большинства математиков. Тщательно изучив результаты их исследований, и вообще все изданное по теории чисел со времен Гаусса, Гильберт упростил доказательства многих теорем и обнаружил глубокие связи между теорией чисел и другими областями математики. Его монументальный обзор появился в 1896 г. Заполнив пробелы большим количеством своих собственных исследований, он придал теории чисел величественную унифицированную форму. Сложнейшие результаты недавних лет нашли свое место в ясно и просто изложенной теории. Позднее работу Гильберта назвали «истинной жемчужиной математической литературы».

В Гёттингене Гильберт продолжил собственные исследования в теории чисел. Главный его интерес состоял в обобщении закона взаимности на поля алгебраических чисел. В классической теории чисел квадратичный закон взаимности, известный еще Лежандру и строго доказанный 18-летним Гауссом, считался перлом теории чисел. Гильберту удалось переформулировать его и изложить в простой и красивой форме, которая имела смысл и для полей алгебраических чисел. Это позволило ему угадать формулировку закона взаимности для степеней, больших двух, хотя он и не смог доказать его для всех случаев.

Венцом разработок в этой области была статья Гильберта «О теории относительно абелевых полей». В этой программной работе он дал набросок обширной теории, получившей известность как теория полей классов. В этом Гильберту явно помогла математическая интуиция. Статье суждено было стать началом исследований по полям алгебраических чисел, но этим занимались другие математики, так как его заинтересовала геометрия, курс которой он начал читать в 1898–1899 гг.

После открытия неевклидовых геометрий некоторые математики пытались исключить все скрытые предположения, нарушающие логическую красоту труда Евклида. Наибольших результатов достигли Паш и Пеано. Гильберт положил в основу геометрии независимые аксиомы, позволяющие доказать все теоремы геометрии Евклида. В 1899 г. он публикует небольшую по объему книгу «Основания геометрии», в которой систематически излагает все полученные им результаты. Эпиграфом к этой работе Гильберт выбрал слова Канта: «Любое человеческое знание начинается с интуиции, затем переходит к понятиям и завершается идеями» [66]. Книга получила восторженные отзывы и стала математическим «бестселлером». Созданный Гильбертом метод изложения материала в последующие годы стал общепризнанным и получил название «метаматематика».

Аксиоматический метод, в основе которого лежит изложение теории в виде цепочки (первичные понятия – аксиомы – теоремы), Гильберт сделал доминирующим. Он предъявил к системе аксиом следующие требования:

1) *полноты*, т. е. аксиома должна быть такой, чтобы из нее можно было вывести любую теорему;

2) *независимости*, поэтому отсутствие одной из аксиом системы делает невозможным доказательство, по крайней мере, одной теоремы;

3) *непротиворечивости*, а значит невозможность получения противоречащих друг другу теорем.

Для Гильберта сочетание абстрактного и традиционного языков было особенно эффективным. Он исследовал взаимную независимость своих аксиом. Его метод основан на построении моделей, причем если модель противоречит одной из аксиом и удовлетворяет требованиям остальных, значит, первая аксиома не является следствием остальных.

Фреге считал недостатком системы аксиом Гильберта невозможность установить с их помощью, что собой представляет точка, например, являются ли его – Фреге – карманные часы точкой. Гильберт, напротив, подчеркнул, что в том и состоит суть аксиоматики, что она позволяет вместо точек, прямых, плоскостей говорить о стульях, столах и пивных кружках. Лишь свойства, явно указанные в аксиомах, играют роль в дедуктивных рассуждениях. Это как в шахматах, где свойства фигур определяются не их формой, а правилами игры.

Одну из знаменитых проблем математики конца XIX в. называли принципом Дирихле. Этим принципом пользовался Риман в своей диссертации в 1851 г., он и дал принципу название. Риман считал, что задача, которая «разумна физически», будет «разумна математически». На физической интуиции было основано предположение о том, что всегда существует решение краевой задачи для уравнения Лапласа. Гаусс считал, что эта задача может быть сведена к задаче минимизации двойного интеграла функций с непрерывными частными производными, имеющих заданные граничные значения. Для одной из этих функций интеграл должен принимать точную нижнюю границу своих значений. Вейерштрасс подверг этот принцип критике, уже после смерти Римана, указав пример, в котором нельзя было найти функцию, минимизирующую интеграл.

В сентябре 1899 г. Гильберт представил статью, которая, по его словам, является первой попыткой «воскрешения принципа Дирихле». В этой статье он показал, что при дополнительных ограничениях на функции, участвующие в задаче, можно добиться того, что принцип Дирихле будет выполняться. Спустя шесть лет Гильберт привел второе доказательство возможности применения принципа Дирихле. В дальнейшем принцип Дирихле развивал ученик Гильберта Рихард Курант.

В Париже летом 1900 г. состоялся Второй Международный конгресс математиков. Гильберту было предложено выступить с докладом. В биографической книге «Гильберт» Констанс Рид так описывает внешность своего героя во время этого доклада: «…он был среднего роста и гибкого телосложения, быстрый, с выделяющимся высоким лбом, лысый, за исключением нескольких тонких пучков еще красноватых волос. На крупном носу устойчиво сидели очки. Маленькая бородка и несколько беспорядочные усы скрывали рот, удивительно широкий и благородный для такого крупного подбородка. Ясные голубые глаза за блестящими стеклами очков смотрели невинно, но твердо» [66].

Гильберт выступил с докладом о перспективах развития математики в XX в. и сформулировал проблемы, решение которых, по его убеждению,

сыграет важную роль в развитии математики. О содержании доклада было рассказано в гл. 2. Доклад Гильберта полностью захватил умы ученых всего математического мира. Авторитет Гильберта давал основание полагать, что перечисленные проблемы удовлетворяют сформулированным им критериям великих математических проблем и что настанет время, когда они будут полностью решены.

Зимой 1900/1901 гг. один из студентов принес на семинар Гильберта работу шведского ученого Ивара Фредгольма по интегральным уравнениям. Со времен Абеля теория интегральных уравнений развивалась очень медленно. Фредгольм дал красивое решение одного класса таких уравнений, которое проводило аналогию между интегральными и алгебраическими линейными уравнениями. Гильберт увлекся интегральными уравнениями. В первой работе, опубликованной в виде сообщения Гёттингенского научного общества, он предложил простой и оригинальный вариант теории Фредгольма, который раскрывал ее основную идею более точно, чем работа самого Фредгольма. Теорию интегральных уравнений Гильберт превратил в орудие, позволившее ученым овладеть областями математики, в которых царила полная неразбериха. Рихард Курант писал: «Можно без преувеличения сказать, что именно благодаря исследованиям Гильберта впервые выявилось истинное значение теории интегральных уравнений» [66].

В 1904 г. Гильберт посылает научному обществу второе сообщение, в котором он представляет аналог приведения квадратичной формы от n переменных к главным осям. Используя комбинацию идей анализа, алгебры и геометрии, он развил свою теорию собственных функций и собственных значений, тесно связанную с физической теорией собственных колебаний.

Однако Гильберт пошел еще дальше и создал теорию бесконечно многих переменных, ставшую широко известной как теория гильбертовых пространств.

Популярность Гильберта в начале XX в. была огромна. Чтобы послушать его лекции, в аудиторию иногда набивалось несколько сотен человек. Ни состав, ни количество слушателей не производили на него никакого впечатления. Известный польский математик Гуго Штейнгауз писал: «Если бы сам император вошел в зал, Гильберт не прореагировал бы» [66].

В конце 1908 г. Гильберт получил решение проблемы Варинга. Это было замечательным достижением, хотя, по оценке Хинчина, доказательство было «не только тяжеловесным в своем формальном оформлении, основанном на сложных аналитических теориях… но также не обладало прозрачностью в идейном отношении» [66].

Осенью 1910 г. Венгерская академия наук объявила о присуждении второй премии Больяй «Давиду Гильберту, который глубиной мыслей, оригинальностью методов и строгой логикой доказательств уже оказал значительное влияние на прогресс математических наук» [66].

В 1912 г. Гильберт начинает заниматься физикой, главной целью считая введение аксиоматики в физику. Он полагал, что в физике, несмотря на ее триумфальные достижения, отсутствует порядок. К сожалению, десятилетняя работа над этой проблемой не привела к ожидаемым результатам, так

как многообразие экспериментальных фактов огромно. Их накопление происходит слишком быстро, а значение и относительный вес слишком изменчивы, чтобы аксиоматический метод в физике был бы также полезен, как в математике.

Успешным можно считать применение Гильбертом интегральных уравнений в кинетической теории газов и элементарной теории излучения. Его асимптотическое решение фундаментального уравнения Максвелла – Больцмана, интегрального уравнения второго порядка, позволило четко выделить две группы экспериментальных физических законов, к которым приводит эта теория. Работу Гильберта по общей теории относительности можно рассматривать в качестве предвестника единой теории гравитации и электромагнетизма. В ноябре 1915 г. Эйнштейн представил в Берлинскую академию две работы, посвященные общей теории относительности, а Гильберт в Гёттингене – свою первую заметку «Основания физики». Им была доказана теорема о лагранжевости уравнений Эйнштейна релятивистской гравитации. Эта теорема долгое время оставалась недостаточно оцененной, а впоследствии оказала заметное влияние на теоретическую физику. Тем самым Гильберт подтвердил всесилие аксиомы, требующей, чтобы каждая фундаментальная физическая теория была лагранжевой.

В 1924 г. ученик Гильберта Рихард Курант опубликовал первый том «Методов математической физики». Он пригласил Гильберта быть соавтором, хотя книга написана была только им. По словам Куранта, книга выражала «дух Гильберта», «оказавшего такое решающее влияние на математические исследования и образование» [66]. После открытий Гейзенберга и Шрёдингера в физике эта книга не устарела, а стала более актуальной, так как изложенный в ней математический аппарат оказался наиболее адекватным для квантовой механики.

Житейские трудности не обходили Гильберта стороной. Его очень тяготило нездоровье единственного сына Франца во время Первой мировой войны. Узнав о смерти французского математика Дарбу, Гильберт посвятил ему статью. После выхода ее в свет разгневанная толпа студентов потребовала отречения Гильберта от статьи о «вражеском математике» и полного уничтожения тиража журнала. Гильберт потребовал извинений ректора за поведение студентов, пригрозив отставкой. Извинения были получены.

Вновь обратиться к математике Гильберта заставил кризис ее основ. Первыми предвестниками этого кризиса стали открытые в теории множеств парадоксы. В конце войны молодой голландец Брауэр, выразил сомнение в том, что законы классической математики имеют абсолютную ценность, и предложил программу, призванную покончить с кризисом оснований математики. Так появилось новое направление, получившее название интуиционизма. К Брауэру присоединился ученик Гильберта Герман Вейль. По его словам, Брауэр «открыл нам глаза и заставил нас увидеть, насколько общепринятая математика зашла дальше таких утверждений, справедливость и реальный смысл которых основан на очевидности» [66]. В соответствии с концепциями интуиционизма, от многого, включая теоремы существования, основную часть анализа, канторовскую теорию бесконечных множеств, нужно отказаться.

Гильберт не мог принять такое «увечье» математики. Еще в 1904 г. на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге он предложил математико-логическую программу исследований для ликвидации всех сомнений в надежности оснований математики и методов математических рассуждений. Он вернулся к этой программе и предложил превратить математику в формализованную систему, объекты которой – математические теоремы и доказательства – выражались бы на языке символической логики в виде предложений, имеющих только символьную, а не смысловую структуру. Эти объекты должны быть выбраны так, чтобы адекватно представлять данную математическую теорию, т. е. охватывать все ее теоремы. Непротиворечивость этой формальной системы будет доказываться с помощью методов, которые Гильберт назвал финитными. Под финитностью понималось, что рассматриваемые суждения, утверждения или определения должны точно соответствовать объекту, используемые методы должны отличаться явной практичностью, чтобы их можно было эффективно контролировать.

Состояние здоровья Гильберта постоянно ухудшалось. Осенью 1925 г. было определено, что он страдает злокачественной анемией. Благодаря участию математиков разных континентов его удалось вылечить с помощью нового метода, к тому времени открытого в Америке.

Спор между Гильбертом и Брауэром вышел за рамки личных неприязненных отношений и стал выражаться в том, что они препятствовали публикации не нравившихся им исследований. Эйнштейн, разгневанный этими склоками, оставил свой пост одного из трех главных редакторов «Анналов». После войны немецких математиков не приглашали ни на одну из международных конференций. В 1928 г. итальянцы пригласили немцев на Международный конгресс математиков в Болонье. Голландец Брауэр, бывший ярым немецким националистом, вместе с Бибербахом предлагал отклонить приглашение. Гильберт, еще не оправившийся от болезни, лично возглавил делегацию немецких математиков.

В 1930 г. Гильберта проводили в отставку с большими почестями, но он продолжал регулярно читать лекции. В том же 1930 г. Курт Гёдель, 25-летний специалист по математической логике, опубликовал статью, которая нанесла смертельный удар по реализации математических замыслов Гильберта. Хотя Гильберт поднял математическую логику на совершенно новый уровень, доказать непротиворечивость арифметики в том объеме, в каком он хотел, оказалось невозможно.

Гёделю удалось доказать неполноту формализованной теории чисел и теорему, из которой следует, что не существует финитного доказательства непротиворечивости формальной системы, достаточно полной, чтобы формализовать все финитные рассуждения.

Гильберт не только сам был великим математиком, но и вырастил плеяду блестящих ученых: Э. Шмидта, Г. Вейля, К. Каратеодори, Р. Куранта и других математиков.

В последние годы жизни Гильберт продолжал напряженно трудиться. Доклады Гильберта в Гёттингенском научном обществе по-прежнему служи-

ли образцом доступности изложения материала. Требования к качеству докладов по математике у него были очень высокими. Грубость, с которой он мог обрушиться на того, чей доклад не соответствовал его требованиям, была хорошо известна. Многие крупные математики Европы и Америки опасались читать доклады в Гёттингене.

Нельзя не отметить мужественную гражданскую позицию Гильберта во время Второй мировой войны. В период нацизма 73-летний отставной профессор продолжал шокировать окружающих своими парадоксальными высказываниями и бороться против запрета его коллегам и ученикам еврейской национальности работать в университете. Ему самому пришлось давать объяснение, почему он, пруссак, ариец, носит библейское имя Давид. Вслед за евреями, спасаясь от нацистского режима, один за другим уехали из Германии его друзья, ученики и коллеги. В день его смерти 14 февраля 1943 г. рядом с ним была только жена. В последний путь его проводили не более дюжины человек.

Со смертью Гильберта наука потеряла одного из своих самых великих творцов. После него едва ли можно встретить математика, чья работа не была бы связана в той или иной степени с работами Гильберта. В истории математики навсегда останутся такие понятия, как гильбертово пространство, неравенство Гильберта, преобразование Гильберта, инвариантный интеграл Гильберта, теорема Гильберта о неприводимости, теорема Гильберта о базисе, аксиомы Гильберта, подгруппа Гильберта, поле классов Гильберта, символ Гильберта.

Герман Минковский

Минковский Герман родился 22 июня 1864 г. в Алексотах недалеко от Каунаса в семье торговца. Из-за преследования евреев в царской России их семья в 1872 г. переехала в Кёнигсберг, где Герман поступил в гимназию. Он обладал математическим талантом и часто помогал преподавателям решать трудные задачи. За пять с половиной лет Минковский окончил восьмилетний курс гимназии и поступил в 1879 г. в Кёнигсбергский университет на год раньше благодаря рано открывшемуся математическому таланту.

Минковский был робким круглолицым мальчиком в профессорском пенсне. В возрасте 18 лет в 1882 г. ему совместно с известным математиком Генри Смитом была присуждена премия Парижской академии наук за решение задачи о представлении числа в виде суммы пяти квадратов. Камиль Жордан писал Минковскому из Парижа: «Молю Вас, работайте, чтобы стать великим математиком» [66]. Минковский вернулся из Берлина, где слушал лекции в течение трех семестров, и подружился с Гильбертом. Математическими исследованиями они занимались вместе под руководством Адольфа Гурвица, 25-летнего экстраординарного профессора. В 1885 г. Минковский получил степень доктора философии и был призван на

год в армию. Служба в армии привела к отставанию Минковского в математических исследованиях от Гильберта. Минковский увлекся физикой.

Не сумев трудоустроиться в Кёнигсберге, хабилитацию Минковский готовил в Бонне, но при любой возможности приезжал в Кёнигсберг, где присоединялся к Гильберту и Гурвицу в их ежедневных прогулках. В 1893 г. он получил должность экстраординарного профессора в Бонне. Интерес Минковского к физике иссяк, и он стал заниматься теорией чисел. Его подход к теории чисел был геометрическим. Он стремился выразить соотношения между алгебраическими числами с помощью геометрии. Эрмит писал Минковскому, что его результаты в теории чисел намного превосходят, результаты самого Эрмита. Минковский и русский математик Г.Ф. Вороной заложили основы «геометрии чисел», связав ее с кристаллографическими исследованиями. Минковским досконально исследованы пространственные целочисленные решетки. Германское математическое общество поручило ему и Гильберту подготовить обзор по теории чисел. Обзор был разбит на две части. Минковскому велели изложить материал по рациональным числам, а Гильберту – по аналитической теории чисел. Вскоре Гильберт переехал в Гёттинген, а Минковский в 1894 г. занял его профессорскую должность в Кёнигсберге.

Если у Гильберта успешно проходила работа над обзором, то Минковский был занят преимущественно циклом лекций по теории множеств и своей книгой по геометрии чисел. Он редактировал часть обзора, написанного Гильбертом, практически не работая над своей частью. Книга «Геометрия чисел» является примером арифметической теории, оперирующей строгим образом с геометрическими понятиями. От геометрии чисел он перешел к работам по теории многогранников и положил начало теории выпуклых тел, важному разделу геометрии. В 1896 г. им доказаны многие теоремы и неравенство, носящие его имя. В этом же году Минковский переехал в Цюрих, где преподавал математику в Цюрихском Политехникуме. Одним из его студентов был Альберт Эйнштейн.

В 1897 г. Минковский женился на Августе Адлер, дочери владельца кожевенной фабрики. В 1902 г., благодаря стараниям Гильберта, Минковский вернулся из Швейцарии в Германию, в Гёттинген, что еще больше укрепило их дружбу.

Однажды на лекции по топологии Минковский заявил, что проблема четырех красок не решена только потому, что ею занимались математики третьего сорта, и решил доказать ее. Это длилось несколько недель. Одним дождливым утром во время грозы он сказал, что небеса разгневаны его высокомерием и признал свое доказательство теоремы о четырех красках неверным [66].

В Гёттингене Минковский вернулся к теории чисел и получил серьезные новые результаты. Затем вместе с Гильбертом Минковский стал заниматься физикой, которой увлекался еще в Цюрихе. Под влиянием работ Г.А. Лоренца он заинтересовался загадками электродинамики движущихся сред, решением которых он плотно занялся в 1905 г. Его удивила разработка Эйнштейном специальной теории относительности, так как он был невысокого мнения о математических способностях своего бывшего студента.

Летом 1908 г. Минковский достиг вершины творческой активности. Он внес в теорию относительности свою идею о пространстве-времени, дающую прозрачное математическое представление рассматриваемых явлений. Книга «Пространство и время» (1909), в которой даны геометрические интерпретации кинематики специальной теории относительности в четырехмерном пространстве с гиперболической метрикой, получила всемирное признание. Минковский сформулировал постулат об инвариантности физических законов относительно преобразований группы Лоренца. Им введено так называемое пространство Минковского, написаны работы по математической физике, гидродинамике и теории капиллярности.

10 января 1909 г. Минковский испытал приступ аппендицита, ночью была сделана операция. 12 января он скончался в больнице.

Гильберт, редактировавший посмертные публикации работ Минковского, сказал о нем на собрании Гёттингенского научного общества: «Несмотря на тот факт, что он был чрезвычайно скромен и нарочно держался на заднем плане, у него было внутреннее убеждение, что многие из принадлежащих ему работ переживут работы других современных авторов и получат, в конце концов, общее признание. Он ценил открытую им теорему о разрешимости линейных неравенств в целых числах, свое доказательство существования разветвлений в числовых полях и сведение кубического неравенства, выражающего свойство максимальности сферы, к квадратичному неравенству наравне с самыми лучшими достижениями великих классиков в области геометрической теории чисел» [66]. Именем Минковского назван кратер на обратной стороне Луны.

Герман Вейль

Вейль Герман родился 9 ноября 1885 г. в небольшом городке Эльмсхорн недалеко от Гамбурга в семье управляющего местным банком. По окончании гимназии в 1904 г. он поступил в Гёттингенский университет. Директор гимназии, в которой он учился, был двоюродным братом Гильберта, он и направил одаренного ученика к своему знаменитому кузену. Вейль стал одним из лучших учеников Гильберта. Кроме Давида Гильберта, огромное влияние на Вейля оказали Клейн, преподававший в то время в Гёттингенском университете, и голландец Брауэр.

В 1908 г. Вейль окончил университет, защитил диссертацию и получил степень доктора философии. В своих первых печатных работах он исследовал роль ортогональных функций в гильбертовых пространствах. Этому вопросу посвящена диссертация Вейля, связанная с сингулярными краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений, и его работы 1910–1911 гг., в которых разрабатывалась теория интегральных и дифференциальных (обыкновенных и в частных производных) уравнений. В 1908–1913 гг. он читал лекции в Гёттингенском университете. Первая его

книга «Идея римановой поверхности», изданная в 1913 г., а затем неоднократно переиздававшаяся, является синтезом развиваемых Клейном идей теории функций, топологических идей, идущих от Брауэра, и дифференциально-геометрических идей Гильберта. Книга отличается высокими педагогическими и литературными достоинствами, присущими всем произведениям Вейля.

Если Гильберт гордо именовал себя «чистым» математиком, а Клейн проявлял глубокий интерес к физике и физическим соображениям, то для Вейля характерен сплав чисто математических и физических увлечений, в связи с чем в его работах математические построения являются фундаментом для содержательных физических теорий, а физические соображения зачастую являются основополагающими для изящных математических конструкций. Совместное влияние Гильберта и Клейна на Вейля и явилось основой его универсальности, глубокого понимания сущности математики «в целом», не отделимого от внимания и интереса к самым разным разделам математики и к конкретным задачам.

В 1913 г. Вейль женился на Елене Йозеф, которая занималась переводами с испанского на немецкий, и переехал из Гёттингена в Цюрих. Он был робким, молчаливым, но умел быть вдохновенным и красноречивым, если ему удавалось преодолеть застенчивость.

Вейль стал работать на одной кафедре в Политехникуме с Эйнштейном, разрабатывавшим в то время общую теорию относительности. Они оказывали заметное влияние друг на друга. Математическая часть «Общей теории относительности», изданной Эйнштейном в 1916 г., написана под влиянием Вейля, а уже в 1917 г. Вейль читает в Политехникуме курс лекций по общей теории относительности. Эти лекции составили содержание его книги «Пространство, время, материя», вышедшей в 1918 г. и переиздававшейся почти каждый год. Книга переведена на многие европейские языки. В ней Вейль сформулировал свою систему аксиом геометрии, в основе которой лежат понятия «вектор» и «точка», а основными (неопределяемыми) отношениями являются алгебраические операции векторной алгебры. Эта книга стала классической по физике и геометрии, а в 1925 г. получила престижную международную премию им. Н.И. Лобачевского.

В 1916 г. опубликована работа Вейля «Об определении замкнутой выпуклой поверхности ее линейным элементом». Она начала цикл исследований по геометрии «в целом», и в ней была сформулирована задача, позже названная проблемой Вейля. Вейль предлагал доказать существование и единственность любой (гладкой) выпуклой поверхности, заданной своей метрикой, т. е. расстоянием между любыми двумя точками поверхности. Решить эту проблему пытались многие математики, в том числе Л.А. Люстерник и А.Д. Александров. Первое решение проблемы Вейля о существовании абстрактно заданной выпуклой поверхности было получено в 1930-х годах Гансом Леви. Доказательство единственности впервые дал в 1927 г. С. Кон-Фоссен. Его результаты передоказывались и уточнялись многими математиками. Самые сильные результаты в этом направлении получил в 1949 г. А.В. Погорелов.

Теория чисел у Г. Вейля в этот период представлена большой статьей «О равномерном распределении чисел по модулю единица», опубликованной в 1916 г. В ней обосновано использование в теории чисел «тригонометрических сумм» (чаще их называют суммами Вейля). Идеи этой работы были использованы в 1919 г. Харди и Литлвудом для решения проблемы Варинга и в 1937 г. И.М. Виноградовым для решения проблемы Гольдбаха.

В 1918 г. вышла книга «Континуум», небольшая по объему, но важная по содержанию. Она посвящена вопросам обоснования математики, философии науки и проблемам математической логики. В ней Вейль занял резко критическую позицию по отношению к формализму в математике и классическому математическому анализу, опирающемуся на понятие множества. Вслед за Л. Брауэром, о работах которого он тогда не знал, им открыт период современного подхода к основаниям математики, характеризующегося неклассической логической установкой. Вейль был крупным представителем интуиционизма. В «Континууме» изложена попытка обоснования математического анализа, отличавшая Вейля от Брауэра. Однако в 1921 г. в работе «О новом кризисе основ математики» Вейль отказался от своей трактовки и присоединился к Брауэру.

Из пяти книг и 40 статей, опубликованных Г. Вейлем в 1913–1923 гг., следующей по значимости после книги «Пространство, время, материя» является работа «Математический анализ: проблемы пространства», которая содержит лекции, прочитанные в Испании в 1922 г. Другие работы этого периода посвящены граничным задачам теории дифференциальных уравнений, вопросам распространения электромагнитных волн, общей теории относительности Эйнштейна, дифференциальной геометрии обобщенных пространств, топологии, вопросам статистической физики, проблемам математической логики.

В 1923 г. по приглашению Ф. Клейна Г. Вейль читает курс лекций в Гёттингене. Новое большое направление математического творчества, на долгие годы ставшее для Вейля основным, было начато рядом публикаций 1924 г. Это были работы по теории представлений групп преобразований, теории инвариантов таких групп и физическим приложениям этих теорий. Важным результатом работ стала публикация в 1928 г. замечательной книги «Теория групп и квантовая механика». Вейль широко использует принцип отображения симметрии в физических процессах. Источниками симметрии являются, во-первых, изотропность пространства (равноправие всех направлений в пространстве), а в теории относительности – необходимость выполнения формул «преобразований Лоренца» четырехмерного пространства-времени, во-вторых, симметрия изучаемых физических объектов (атомов, молекул, кристаллов). Вейль вносит существенный вклад в квантовую механику не только своими работами, но и личным общением с создателями новой физики – Э. Шрёдингером, М. Борном, В. Паули. Он находит новую, интегральную, форму перестановочных соотношений, ставшую особенно полезной в квантовой теории поля, и указывает физикам, что «дырки» в теории Дирака не могут быть протонами.

Эти годы для Вейля – время напряженных философских поисков и раздумий. В 1926 г. выходит его книга «Философия математики и естествознания». Философские взгляды Г. Вейля близки взглядам русского мыслителя Павла Александровича Флоренского. Во второй половине 1920-х годов Г. Вейль, продолжая исследования в уже освоенных им научных направлениях, начал заниматься чисто алгебраическими вопросами, вытекающими из теории групп.

До 1930 г. Вейль жил в Цюрихе. После ухода Гильберта в отставку на его место в Гёттинген был приглашен Вейль. Перед этим он отклонил очень выгодное предложение из Принстонского университета занять там профессорскую должность. Его часто приглашали заведовать кафедрами в немецкие университеты. Не без колебаний он отклонял эти приглашения, но перед соблазном стать преемником своего учителя в Гёттингене не устоял. Пребывание Вейля в Гёттингене оказалось недолгим. Уже через два года он стал жалеть, что вернулся. Ему, чистокровному немцу, приход к власти нацистов, который становился все более вероятным, ничем, казалось бы, не угрожал, если бы не одно обстоятельство: он был женат на еврейке. Вейль принадлежал к той части интеллигенции Германии, общекультурные интересы которой не совпадали с доктриной фашизма. Позже Вейль назовет 1930–1933 гг. самым мрачным периодом своей жизни. Из Гёттингенского университета уволили практически всех ученых-евреев, вместе с ними покинул университет и немец Г. Вейль. Он переехал в США, в Принстон (Институт перспективных исследований).

Это необычное учреждение, организованное в 1930 г., начало функционировать в 1933 г. Оно сочетает в себе особенности высшего учебного заведения и научно-исследовательского института, в то же время отличаясь от них. От учебного заведения институт отличается отсутствием обязательной учебной программы, а от НИИ – отсутствием узкой специализации. Каждый член института является одновременно студентом и преподавателем, имея возможность заниматься самостоятельной научной работой. Во главе Института перспективных исследований стоит совет попечителей во главе с директором. На протяжении многих лет директором был Роберт Оппенгеймер. Первыми профессорами института стали О. Веблен и А. Эйнштейн.

В Принстоне Герман Вейль еще больше укрепил свою славу блестящего математика и человека с разносторонними интересами. Он помог устроиться в США многим своим коллегам, бежавшим из Германии от преследований нацистов.

Вейль продолжал разрабатывать научные направления, начатые им ранее. Его коллегами были Нейман, Эйнштейн, Гёдель, Паули. В 1935 г. он совместно с Брауэром опубликовал статью «Спиноры в n-мерном пространстве», содержащую полную теорию спинорных представлений группы вращений комплексного евклидова пространства. В 1939 г. была опубликована работа «Классические группы», объединяющая результаты многолетних исследований Вейля в теории инвариантов и представлений групп. Им были написаны интересные статьи по комплексному умножению абелевых функций, по теории потенциала, дифференциальной геометрии, механике и книга

«Симметрия», которую он сам называл лебединой песней. Идея симметрии являлась главной темой его научных исследований.

В 1951 г. Герман Вейль вышел в отставку и вернулся в Цюрих. 8 декабря 1955 г. на 71-м году жизни он скончался.

Рихард Курант

Курант Рихард родился 8 января 1888 г. в польском городе Люблинеце в еврейской семье, которая часто переезжала: Глац, Бреслау, Берлин. Он учился в университете в Бреслау и Цюрихе, затем в Гёттингенском университете, где принадлежал к числу непосредственных учеников Гильберта.

Рихард Курант исследовал задачи вариационного исчисления, среди которых его особенно интересовали принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. Вопрос о нахождении минимума функционала в классических задачах вариационного исчисления сводится к нахождению решения дифференциального уравнения. Исследование таких уравнений может представлять большие трудности.

Математики XIX в. пытались обойти эти трудности, допуская, что при положительном функционале должна существовать функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, на которой достигается минимум функционала. Это допущение Риман назвал принципом Дирихле и положил его в основу созданной им геометрической теории функций, одного из центральных математических достижений XIX в. Гильберт доказал, что этот принцип справедлив. Курант в диссертации на тему «О применении принципа Дирихле к проблеме конформных отображений» (1910) упростил и модифицировал подход Гильберта и применил его к фундаментальным проблемам геометрической теории функций [7].

В 1910 г. Курант получил степень доктора и до Первой мировой войны работал в Гёттингенском университете сначала в качестве ассистента, а затем приват-доцента.

С принципом Дирихле связана классическая экстремальная задача анализа и геометрии – задача Плато. Начиная с самого раннего периода развития вариационного исчисления, многие крупные математики брались за решение задачи отыскания поверхностей наименьшей площади, натянутых на заданную кривую. Физические эксперименты (например, опыты бельгийского физика Плато) приводили к интуитивному убеждению, что такого рода задачи разрешимы. Действительно, если погрузить замкнутый проволочный контур в мыльный раствор, то образуется пленка, которая по закону поверхностного натяжения принимает в качестве своего положения равновесия форму минимальной поверхности.

Задача Плато, т. е. доказательство существования минимальной поверхности, натянутой на заданный замкнутый контур, в течение долгого времени не поддавалась решению. Риман, Вейерштрасс, Шварц, Дарбу и другие

математики, связав задачу Плато с теорией гармонических функций, дали ее решение в ряде частных случаев. Методы, разработанные Курантом и его учениками, оказались применимыми к задачам об устойчивом равновесии минимальных поверхностей с фиксированными и свободными границами и к задачам о неустойчивых минимальных поверхностях. Эти результаты изложены в книге Куранта «Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности».

В 1914 г. Курант был призван в армию и принимал участие в сражениях на французском фронте. Он работал над задачей использования в войсках беспроволочной связи. Это привело его к знакомству с современной электроникой. Служба в армии прервала научную деятельность Куранта более чем на четыре года. После демобилизации в 1919 г. он был назначен профессором в университет Мюнстера, а в 1920 г. вернулся в Гёттинген, где сменил Феликса Клейна на посту заведующего кафедрой.

Гильберт избегал всякой организационной и административной деятельности. Из его учеников Курант выделялся большим организаторским талантом. Неудивительно, что после отхода Клейна от активной работы при содействии Гильберта организационное руководство гёттингенской математической школой постепенно переходило в руки молодого энергичного Куранта, обладавшего редким пониманием психологии людей. Руководящее положение Куранта окончательно утвердилось, когда во второй половине 1920-х годов по его инициативе началось строительство нового здания Математического института Гёттингенского университета. Курант стал официально главой этого института и взял на себя работу по планированию и руководству строительством. Ему помогал старший ассистент Отто Нейгебауэр, который был одним из самых близких его друзей [7].

Курант оставался руководителем своей собственной математической школы, исследовавшей дифференциальные уравнения с частными производными, интегральные уравнения, вариационное исчисление и примыкающие области абстрактной и прикладной математики. Им была написана двухтомная монография «Методы математической физики». Курант считал влияние идей своего учителя Гильберта на содержание монографии настолько значительным, что с его согласия работа была выпущена как произведение двух авторов. В монографии дано новое изложение теории интегральных уравнений Фредгольма и созданной Курантом вариационной теории собственных функций. Удивительная по своей красоте и завершенности, она нашла многочисленные приложения и является одним из лучших достижений современного анализа. Физики получили в монографии математический аппарат, который необходим для применения в квантовой механике и атомной физике, созданных в 1920-е годы. Монография стала настольной книгой для математиков, работающих в различных областях анализа и теории уравнений с частными производными.

В 1927–1929 гг. вышли два тома лекций Куранта по дифференциальному и интегральному исчислению. Придавая важное значение выпуску монографий и учебников повышенной сложности, Курант основал в издательстве Шпрингера и долгое время редактировал серию монографий по различным

разделам математики. Вместе с Нейгебауэром он издал лекции Клейна по истории математики XIX в.

В 1928 г. была опубликована работа Куранта, Фридрихса и Леви «О разностных уравнениях математической физики», посвященная применению метода конечных разностей к изучению уравнений с частными производными. Она сыграла большую роль в разработке приближенных методов решения задач теории дифференциальных уравнений и математической физики, в развитии численного анализа. В работе изложены математические методы, необходимые для эффективного использования современных вычислительных машин в проблемах математической физики и техники.

Курант впервые приехал в США в 1932 г. как приглашенный профессор в Принстонский и Калифорнийский университеты. В 1933 г. после разгрома Математического института в Гёттингене нацистским правительством Курант навсегда покидает Германию. Сначала он уехал в Англию, где в течение года был профессором Кембриджского университета, а в 1934 г. в США. Курант становится приглашенным профессором Нью-Йоркского университета. Вскоре его назначили главой математического отделения Нью-Йоркского университета.

В 1941 г. была опубликована популярная книга Куранта и профессора Колумбийского университета Роббинса «Что такое математика? Элементарный подход к идеям и методам». В течение Второй мировой войны математики из группы Куранта, обладая большим опытом в применении математики к решению практических задач, с успехом работали над проблемами военной тематики.

В 1948 г. вышла книга Куранта и Фридрихса «Сверхзвуковые течения и ударные волны», посвященная математическим вопросам газовой динамики и предназначенная для математиков, физиков и инженеров. В 1950-е годы ряд работ Куранта посвящен изучению задачи Коши для линейных и квазилинейных систем уравнений гиперболического типа. В работе «О распространении разрывов в волновом движении» (1956), написанной совместно с П. Лаксом, был сформулирован обобщенный принцип Гюйгенса для гиперболических уравнений и исследован вопрос о характере разрывов обобщенного решения задачи Коши. Эта работа имела в дальнейшем многочисленные продолжения.

Работавшая под руководством Куранта группа ученых образовала ядро организованного в 1946 г. Института математики и механики при Нью-Йоркском университете. Этот институт вскоре стал одним из крупнейших в мире центров математических исследований и математического образования. В 1952 г. он получил название Института математических наук, а с 1964 г. называется Курантовским. В нем ведут активные исследования по всем разделам математики ученые из многих стран мира, ежегодно приглашаемые на различные сроки для чтения лекций и ведения семинаров.

В 1958 г. в соответствии с законами США, Курант по возрасту покинул пост директора Математического института. Он в течение ряда лет входил в состав руководства Международного математического союза и был избран иностранным членом многих академий мира.

Курант играл на рояле, хорошо аккомпанировал и участвовал в камерных ансамблях. Он был страстным лыжником и любителем пеших прогулок даже в преклонном возрасте. В 1958 г. на 71-м году жизни, он переплывал раздувшуюся после дождей реку Везер, что было не так просто и для более молодых участников заплыва – течение в Везере всегда было сильным [7].

Умер Курант 27 января 1972 г. в Нью-Йорке.

Разгром немецкой математической школы нацистами

Во время Первой мировой войны молодых немецких математиков не призывали в армию, и Германия сумела сохранить свой научный потенциал, в отличие от Франции, многие талантливые ученые которой погибли на фронте. После войны безусловной мировой столицей математики стал Гёттинген. Вокруг Ф. Клейна, Д. Гильберта, Г. Минковского, К. Рунге в Гёттингенском университете образовались ведущие научные школы, решавшие проблемы не только чистой, но и прикладной математики и математической физики. Многие такие исследования выполнялись по заказу промышленности и военных. Расцвет математики в Гёттингене способствовал бурному развитию теоретической и экспериментальной физики. Трудами Макса Борна и его ученика Вернера Гейзенберга была существенно продвинута квантовая физика, Людвигом Прандтлем и Теодором фон Карманом сформулированы законы гидромеханики, основанные на экспериментах в Гёттингенской аэродинамической трубе [16].

Версальский мирный договор поставил политическую и экономическую жизнь Германии в жесткие и даже жестокие рамки. Не избежала международных санкций и наука. Как уже упоминалось, немецким ученым был объявлен бойкот. Организаторы международных математических конгрессов в Страсбурге (1920) и Торонто (1924) не пригласили ни одного математика из Германии. В 1928 г. запрет был снят, и на конгресс в Болонье могла бы приехать представительная немецкая делегация. Многие немецкие математики отклонили приглашение, отчасти в знак протеста против предыдущего бойкота, отчасти из-за входящей в программу конгресса экскурсии по «освобожденному Южному Тиролю», бывшему до войны немецким. Наиболее активно агитировали против участия в конгрессе берлинские математики во главе с Бибербахом, Шмидтом и фон Мизесом. Их поддерживал пользующийся в то время большим авторитетом голландец Брауэр. Противоположную позицию занимал Давид Гильберт, поддержанный его коллегами из Гёттингена – Рихардом Курантом, Эдмундом Ландау и Эмми Нётер. Они одобряли совместную работу с зарубежными учеными.

В 1928–1929 гг. споры берлинской и гёттингенской математических школ еще больше обострились. На этот раз оживленно обсуждался вопрос (печатать или нет?) о статьях иностранных авторов в журнале «Математические анналы», выходившем в издательстве Шпрингера.

Брауэр и Бибербах считали, что иностранцы, замеченные в антинемецких высказываниях, не могут публиковаться в немецком журнале. Еще в 1925 г. при составлении специального тома «Анналов», посвященного памяти Берн-

харда Римана, ряду французских авторов было отказано в публикации по политическим мотивам.

После конгресса в Болонье Гильберт стал добиваться исключения Брауэра из редколлегии «Математических анналов». Рихарду Куранту удалось убедить Шпрингера в правоте своего геттингенского коллеги, и Брауэр больше не редактировал новые тома. Редакторами-составителями стали Давид Гильберт, его ученик Людвиг Отто Блюменталь и Эрих Гекке [66]. Эти ожесточенные споры среди немецких математиков были вызваны различными причинами: традиционным соперничеством берлинского и геттингенского университетов, противоборством двух школ в подходе к основаниям математики (интуиционизм Брауэра против формализма Гильберта), несовпадением политических убеждений (либералы из Гёттингена против патриотов из Берлина).

Началась эмиграция ученых в Америку. Наука и университетское образование в США бурно развивались, по всей стране требовались новые преподаватели и исследователи, опыт и знания европейских ученых были весьма кстати. Подбором кадров для американских университетов и институтов занимались многие организации. Среди них был активен Международный комитет по образованию, созданный рокфеллеровским фондом. Комитет выдавал стипендии талантливым молодым ученым из Европы. Многие из них оставались потом в Америке навсегда. Немало сделал для привлечения зарубежных ученых Стефен Дагген, руководитель Нью-Йоркского института международного образования. На базе этого института уже после 1933 г. была организована работа «Чрезвычайного комитета» для поддержки ученых-евреев, эмигрировавших из Германии. Наиболее известным из них был Джон фон Нейман.

До 1933 г. ведущие физики и математики мира стремились в Гёттинген, как паломники в Мекку. Грядущую катастрофу предвидели немногие. Всего за четыре дня до прихода Гитлера к власти, 26 января 1933 г., Рихард Курант приветствовал очередной отказ своего коллеги от переезда в США.

Специальным разъяснением, опубликованным 11 апреля 1933 г., в § 3 этого закона определялось, кто понимался под «неарийцем»: тот, у кого кто-то из дедушек или бабушек были неарийцами (прежде всего, евреями). Меньше чем через месяц, 6 мая 1933 г. действие этого закона распространили на приват-доцентов, которые не считались государственными служащими. Уже в течение первого года действия закона была уволена почти четверть преподавателей высшей школы. Математики пострадали больше других: гонения затронули 187 преподавателей и исследователей, из них 134 эмигрировали из Германии. Ученых увольняли из университетов по всей Германии, но интенсивность чисток была неодинаковой. Например, в Кёнигсберге отправили в бессрочный отпуск шесть математиков, во Франкфурте – восемь, а в Брауншвейге, Фрейбурге и Мюнстере – по одному.

Почти две трети изгнанных преподавателей работали в Гёттингене и Берлине. В Гёттингене оказались уволенными 27 ведущих математиков, 24 из них вынуждены были эмигрировать. В Берлине искали спасения за границей 39 из 49 ученых, попавших под действие гитлеровского закона о чиновниках.

После присоединения в 1938 г. Австрии и захвата Чехословакии такой же жестокой чистке подверглись университеты (17 из 24) Вены и Праги (6 из 14). Немецкие университеты потеряли лучших преподавателей и исследователей. Среди уволенных берлинских математиков были известные ученые Альфред Брауэр, Ганс Фройденталь и Рихард фон Мизес. Все они вскоре покинули страну.

Самый сильный урон из-за увольнений математиков в 1933–1934 гг. понесла геттингенская школа Гильберта, для которого профессиональные качества его учеников и сотрудников всегда были важнее их национальности. Потеряли работу первоклассные ученые с мировыми именами. Директор Института математики Рихард Курант формально не подпадал под действие закона о чиновниках, так как в годы Первой мировой войны был на фронте. Однако уже 25 апреля 1933 г. университет уведомил его телеграммой, что на основании нового закона он отправляется в бессрочный отпуск «до окончательного решения вопроса». После мучительных колебаний Курант все же уехал из Германии: сначала в Великобританию, а в 1934 г. в США. С большим трудом получил он место профессора в Нью-Йоркском университете, где создал математический институт, который сейчас носит его имя.

После увольнения Куранта Герман Вейль несколько месяцев работал вместо него директором Математического института. Вейль встречался с правительственными чиновниками, писал письма, но существенно помочь институту, оказавшемуся под прессом нацистов, уже не смог. В конце летнего семестра 1933 г. он с семьей переехал в США и стал сотрудником Принстонского института перспективных исследований, от предложений которого еще год назад отказывался.

Одновременно с Курантом была уволена одна из самых блестящих математиков своего времени Эмми Нётер, первая женщина приват-доцент в Гёттингене, заложившая вместе со своим учеником Ван-дер-Варденом основы современной алгебры. Помимо еврейского происхождения, Эмми вменяли в вину социалистические и пацифистские взгляды.

Профессора Эдмунда Ландау, который был ординарным профессором с 1909 г., администрация университета предупредила, что с лета 1933 г. он не будет читать лекций. Вскоре из-за бойкота пронацистски настроенных студентов лекции Ландау были прерваны, а сам он был вынужден уехать из Гёттингена.

Еще несколько профессоров, среди которых Пауль Бернайс и Ганс Леви были уволены 27 апреля 1933 г. Исчезли из Гёттингена многие молодые математики, ставшие знаменитыми после войны, например Курт Малер, Штефан Варшавский. К началу 1934 г. единственным ординарным профессором университета оставался Густав Герглоц [16].

Во время одного официального банкета в Гёттингене в 1934 г. Давид Гильберт оказался рядом с Бернгардом Рустом, министром образования. Гитлеровский министр поинтересовался у профессора, не пострадала ли математика после устранения еврейских ученых. «Математика в Гёттингене? – уточнил Гильберт. – Да она просто не существует больше» [66].

Несмотря на усиливающиеся притеснения евреев в Германии, старшие из них не могли решиться на отъезд, так как они, согласно строгим официальным постановлениям, должны были оставить здесь все свои сбережения и отправляться в эмиграцию с 10 марками в кармане. Уже в первые годы после 1933 г. в Америку эмигрировало так много людей с академическим образованием, что для пожилого профессора начать там новую жизнь оказалось довольно-таки трудным делом. В Европе же отдельные государства предоставляли иностранцу длительное убежище исключительно в тех случаях, когда он был достаточно обеспечен и привозил с собой свой капитал.

Собственно террор в больших масштабах начался в Германии 10 ноября 1938 г. выступлениями против евреев, инспирированными правительственными органами; при этом, как известно, сжигались синагоги и были разгромлены многие еврейские фирмы, а уже существовавшие концентрационные лагеря были переполнены евреями.

Расположенный в восточной части ФРГ, вдали от основных магистралей и крупных промышленных центров, Гёттинген, указанный во всех туристских проспектах как прославленный университетский город, после Второй мировой войны перестал быть самым крупным математическим центром страны. Тем не менее университет вырос, увеличилось число студентов.

Глава 8

ФРАНЦУЗСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Франция – одна из ведущих математических держав, с давними математическими традициями и с процветающей ныне математической школой.

А.Б. Сосинский

Система образования во Франции

Рассмотрим вкратце историю становления образования, в том числе математического, во Франции. В 1530 г. король Франции Франциск I учредил в Париже «Коллегию королевских лекторов» – высшее учебное заведение нового типа, ставшее известным как Коллеж де Франс. Задача Коллеж де Франс – «способствовать прогрессу наук своими трудами и исследованиями, обучением, которое ведется по этим трудам и исследованиям научными миссиями за границей и публикациями». В Коллеже не сдают экзамены, и не присуждают ученых степеней и званий. Поэтому Коллеж не имеет согласованных с кем-либо программ и учебных планов. Профессора ежегодно сами выбирают тематику своих лекционных курсов, соотнося ее с выполняемой ими научной работой. Слушатели, как правило, уже имеют высшее образование и просто желают повысить свой уровень знаний.

В революцию 1789 г. все академии и университеты Франции были закрыты. Сохранился лишь Коллеж де Франс и только потому, что не выдавал никаких дипломов, не предоставлял никому документированных привилегий.

Первого сентября 1795 г. для подготовки нужных революции военных инженеров была создана Политехническая школа. В 1804 г. Наполеон дал школе военный статус, даровал ей знамя и девиз: «Во имя Родины, Наук и Славы!» Первый год обучения посвящен военной службе, в ходе которой студенты осваивают лейтенантскую подготовку в войсках. Став офицерами, они получают двухгодичную научную подготовку. Обязательными для изучения, кроме математики, физики, химии, биологии и информатики, были экономика и гуманитарные науки. С учетом высокой предварительной подготовки абитуриентов полученное образование эквивалентно уровню американского магистра наук, специализирующегося по физике.

Современная система французского образования складывалась на протяжении последних двух столетий. Она считается одной из самых передовых в мире. Ее основные особенности: преобладание государственных учебных заведений, бесплатное обучение для всех, включая иностранцев. Во Франции своя система дипломов и ученых степеней, особое деление на циклы.

Начальное образование во Франции является обязательным и бесплатным. В школу дети идут в возрасте 6 лет. Принятая во Франции система

школьного образования разделена на три цикла: начальная школа (5 лет обучения), коллеж (4 года), лицей (2–3 года). Обязательными являются первые два блока. После начальной школы французы поступают в коллеж, который считается первой ступенью среднего образования. После шести лет обучения в коллеже выпускники идут в различные лицеи, где получают профессиональное образование или готовятся к сдаче экзаменов на степень бакалавра. Во Франции отсутствуют элитарные школы, где имеет место «конкурс родителей», т. е. школьник может учиться только в школе того микрорайона, в котором проживает.

Система французского высшего образования заметно отличается от российской. Во Франции она включает часть системы подготовки специалистов среднего звена. Более 300 тыс. студентов обучаются по двухгодичной программе с четкой профессиональной ориентацией в секциях старших техников и технологических институтах. Выпускники этих учебных заведений получают дипломы, позволяющие сразу по окончании обучения работать в сфере обслуживания, гостиничном или туристическом бизнесе или продолжить обучение.

Полученная в лицее степень бакалавра считается первым этапом высшего образования, и только со степенью бакалавра можно поступить в университет. Непосредственно университетское образование во Франции состоит также из трех циклов. По окончании первого двухлетнего цикла обучения французские студенты получают диплом об общем университетском образовании, который у работодателей не слишком котируется.

Обучение на протяжении второго цикла расширяет и углубляет знания, полученные за время первого цикла. Через год выдается диплом лиценциата, через два – диплом магистра, через три года – диплом инженера.

Для тех, кто хочет получить диплом более высоких уровней во французских университетах или в дальнейшем обучаться в докторантуре, предусмотрен третий цикл обучения, на который принимают только студентов, имеющих степень магистра. Третий цикл предполагает углубленное изучение избранной специальности и сопровождается самостоятельной научной работой, тему которой претенденты обязаны сформулировать до поступления. Обучение в докторантуре занимает еще три-четыре года.

Интересующиеся математикой студенты стремятся подготовиться к конкурсу для поступления в Высшую нормальную школу (ВНШ) в Париже. Подобные школы есть также в Лионе, Бордо, Тулузе, Страсбурге и других крупных городах. Конкурсные экзамены состоят из нескольких математических экзаменов, письменных и устных, с максимальной суммой баллов около 600, и служат одновременно для поступления во все педвузы Франции. Абитуриент, набравший наибольшую сумму баллов, и второй по числу набранных баллов выбирают любую ВНШ (как правило все выбирают Парижскую), а остальные выбирают любую высшую школу, еще не укомплектованную.

На отделение математики и информатики в Парижскую высшую нормальную школу принимают всего 40–45 человек. Таким образом, конкурс составляет от 3000 до 4000 человек на место. Математики-исследователи во Франции делятся на тех, кто учился в Парижской высшей нормальной школе

и всех остальных, несущих всю жизнь комплекс неполноценности, как «не сумевшие поступить» [71]. Все это обеспечило высокий авторитет французским математикам. В данной главе рассказывается о наиболее ярких представителях французской математики конца XIX – первой половины XX в.

Анри Пуанкаре

Пуанкаре Жюль Анри родился 29 апреля 1854 г. в Нанси (Лотарингия, Франция) в семье профессора медицинского факультета Леона Пуанкаре. Он является двоюродным братом французского президента (1913–1920) Раймона Пуанкаре. Родственников удивляла и тревожила необычная рассеянность маленького Анри, о которой будут рассказывать легенды. Она свидетельствовала о его врожденной способности почти полностью отвлекаться от действительности, глубоко уходя в свой внутренний мир. В детстве Анри заболел дифтерией с осложнением в виде паралича ног и мягкого неба. Болезнь отступила быстро, но говорить мальчик долго не мог. Для лежащего Анри слух стал единственным, что связывало его с остальным миром. Много лет спустя психологи, обследуя гениального ученого, отметили у него красочное восприятие звуков. Каждый гласный звук ассоциировался у него с каким-то цветом. Эта особенность сохранилась до конца жизни. После болезни Анри очень переменился не только внешне, но и внутренне. Он стал робким, мягким и застенчивым. Отличная слуховая память позже привела его к своеобразной манере усвоения знаний без фиксации на бумаге. На всю жизнь осталось у него пренебрежение к «писанине», поэтому лекции он не конспектировал.

Пуанкаре был прилежным, любознательным учеником. Несмотря на успехи в математике, он учился на отделении словесности, усиленно штудируя латынь, изучая античных и новых классиков. На занятиях по математике он отвечал на вопросы сразу, опуская промежуточные рассуждения. Ответы его были настолько лаконичными и точными, что его часто просили давать больше пояснений. В 1871 г. он стал бакалавром словесности и изъявил желание участвовать в экзаменах на степень бакалавра наук. Подвела его письменная работа по математике, которую Анри попросту провалил. Университетские профессора отнеслись к его провалу как к досадному недоразумению, и ему была присуждена степень бакалавра наук [36].

В июле 1873 г. Пуанкаре получил первую премию по математике на Общем конкурсе. На экзаменах в Политехническую школу он без труда занял первое место. Исход экзаменов в Высшую нормальную школу был менее удачным: Анри по конкурсу занял лишь пятое место и в октябре 1873 г. вернулся в Политехническую школу. В октябре 1875 г. он поступает в Горный институт, куда принимались наиболее талантливые выпускники Политехнической школы.

С 1879 г. Пуанкаре начал преподавать математику в высших учебных заведениях. Два года он вел курс математического анализа на факультете

наук в Кане, где опубликовал серию из 25 заметок и несколько обширных работ. Эти работы привлекли внимание Вейерштрасса, о чем он написал в письме к Софье Ковалевской.

Диссертацию «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных» Анри Пуанкаре успешно защитил 1 августа 1879 г.

В 1881 г. Пуанкаре предложили должность преподавателя на факультете наук в Парижском университете, где он читал лекции по анализу. Первым серьезным вкладом Пуанкаре в развитие математической теории были исследования в теории дифференциальных уравнений, интегрирование которых было важнейшей проблемой не только для математики, но и для всех естественных наук. К концу XIX в. дифференциальные уравнения выступали основной формой представления точного знания, и умение их интегрировать являлось потребностью, которую диктует время. Пуанкаре поставил перед собой задачу расширения класса используемых функций. В статье немецкого математика Лазаря Фукса он натолкнулся на идею возможного построения новых функций, которые позволят описывать решения дифференциальных уравнений так же, как абелевы трансцендентные функции позволяют описывать решения алгебраических уравнений. За строками прочитанной статьи Пуанкаре увидел гораздо больше перспектив, чем Фукс. Он проверяет выводы Фукса, устраняет сомнительные места и развивает собственные идеи.

В переписке с Фуксом Пуанкаре предлагает новые функции назвать фуксовыми. Он не только доказал, что фуксовы функции существуют, но на основе обобщения эллиптических функций сконструировал их практически. Первая заметка Пуанкаре о фуксовых функциях опубликована в феврале 1881 г., и до 1884 г. он опубликовал на эту тему серию из 30 заметок и несколько обширных мемуаров. Эллиптические функции оказались частным случаем фуксовых функций.

Открытие Пуанкаре позволило решить проблему интегрирования линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами. Пуанкаре решил обобщить полученные результаты исследований и стал рассматривать дифференциальные уравнения как источник неизвестных периодических функций, являющихся их решениями. Он доказал, что искомые функции остаются неизменными при дробно-линейных преобразованиях переменной величины, от которой они зависят. Он использовал теорию групп преобразований и показал, что результат упрощается, если воспользоваться математическим аппаратом, применяемым для исследований неевклидовых геометрий.

Аналогичные исследования проводил Феликс Клейн. По предложению Клейна, поддержанного другими математиками, фуксовы функции стали называться автоморфными. Между Клейном и Пуанкаре началось своеобразное соревнование в получении новых результатов. Обстоятельный медленный стиль работы Клейна, методично осваивавшего каждую ступеньку новых результатов, отставал от стиля работы Пуанкаре, перепрыгивающего сразу через несколько ступенек. В итоге Клейн, который мог бы проделать сам всю работу за больший промежуток времени, не выдержал соревнования,

и после сильнейшего нервного переутомления перенес глубокую депрессию. В результате он утратил способность доводить свои исследования в новых разделах математики до логического конца.

Разработав теорию автоморфных функций, Пуанкаре ясно осознавал недостаточную наглядность аналитического решения дифференциального уравнения. Он стал проводить исследования в новом разделе математики, который назвал качественными методами дифференциальных уравнений. Хотя первые идеи в этом направлении были сформулированы в магистерской диссертации Н.Е. Жуковского, а развиты в работах А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Пуанкаре проводил исследования в рамках как абстрактной теории дифференциальных уравнений, так и в ее приложении к небесной механике, а Ляпунов строил теорию устойчивости и сталкивался с теми же проблемами. Подходы к проблемам и методы решения задач у них были различными.

Когда дифференциальное уравнение движения небесного тела проинтегрировано, и решение получено в виде сложной формулы с использованием трансцендентных функций, трудно сказать что-либо о траектории движения тела в целом. Недостаток информации ощущается тем более, если не удается найти запись решения в виде формулы. Пуанкаре попытался извлечь качественные сведения о движении тела из самого дифференциального уравнения, минуя непроходимые порой трудности интегрирования. Он стремился по внешнему виду уравнения выяснить геометрию определяемого им пути движения и его характеристики: форму траектории, наличие периодичности, область пространства, внутри которой происходит движение, наличие особых точек, в которых происходят аномалии движения, и т. п. Последний вопрос особенно важен. Чтобы представить себе всю кривую в целом, нужно знать характер расположения ее особых точек и что в них происходит.

Особым точкам Пуанкаре уделял внимание еще в диссертации. Подробно эти точки исследованы в серии работ «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», выполненных в 1881–1884 гг. Пуанкаре рассмотрел четыре типа особых точек, названных им «седло», «фокус», «центр» и «узел». Кривые, представляющие собой решения дифференциальных уравнений, либо замкнутыми линиями охватывают центр, либо неограниченными спиралями навиваются на фокус, либо бесконечно удаляющаяся в одну сторону кривая упирается другим своим концом в узел, либо кривая, исходящая из одного узла или фокуса, заканчивается в другом узле или фокусе.

Пуанкаре ввел еще понятие «предельный цикл», когда имеется одна особая замкнутая кривая, а все другие кривые наматываются на эту кривую либо изнутри, либо снаружи, не пересекая ее, и даже не соприкасаясь с ней. Он указал на принципиальное значение предельных циклов и замкнутых, или периодических, интегралов. Они были использованы в более поздних исследованиях по небесной механике и не утратили своего значения и в современной теории нелинейных колебаний. Камиль Жордан так оценил эту работу: «Она выше обычных похвал. К ней в полной мере можно отнести слова, некогда написанные Якоби Абелю: “Ее автору удалось решить задачу, о которой до него никто не смел и мечтать”» [36].

Введенные Пуанкаре понятия сделали решения некоторых видов дифференциальных уравнений наглядными и легко обозримыми. Даже не зная решения дифференциального уравнения, можно было по его внешнему виду делать выводы о характере определяемого уравнением движения. Качественное решение не подменяло аналитическое, а дополняло, расширив его возможности.

В 1885–1886 гг. Пуанкаре опубликовал еще две работы, в которых дал качественную теорию более сложных дифференциальных уравнений второго порядка. Теория центров, изложенная в третьей работе, была перекрыта исследованиями русского математика А.М. Ляпунова.

С 1885 г. Пуанкаре читал лекции по математической физике, с 1886 г. – по теории вероятностей. Лекции, которые Пуанкаре читал в Сорбонне, каждый год по новому курсу, были изданы слушателями. Эти лекции охватывают значительную часть точных наук: теорию потенциала, оптику, электричество, теплопроводность, капиллярность, электромагнетизм, гидродинамику, небесную механику, термодинамику, теорию вероятностей. В 1886 г. лекции Пуанкаре по теории потенциала и механике жидкости слушал в Сорбонне Гильберт, который был на восемь лет моложе Пуанкаре. В письме к Феликсу Клейну Гильберт так писал о лекторе: «Он читает свои лекции очень ясно и понятно для моего образа мышления, хотя, как заметил здесь один французский студент, пожалуй, слишком быстро. Он производит впечатление очень молодого и несколько нервного человека. Даже после нашего знакомства он не кажется очень дружелюбным; я думаю, что это объясняется его явной застенчивостью, которую мы не смогли преодолеть из-за отсутствия у нас лингвистических способностей» [66].

Курс математической физики, прочитанный Пуанкаре в Сорбонне, изложен в серии книг: «Теория вероятностей», «Термодинамика», «Электричество», «Оптика», «Теория упругости», «Теория света», «Электромагнитные колебания», «Распространение тепла». По просьбе Высшей школы ведомства связи Пуанкаре прочитал несколько курсов по различным техническим проблемам: телеграфному уравнению, теории телефона и беспроволочной телеграфии.

В 1887 г. в возрасте 33 лет Пуанкаре был избран членом Академии наук Франции и, «обрастая» все новыми и новыми почетными постами и званиями, вскоре сделался признанным главой французской математики. После Коши до Пуанкаре этот почетный статус имел профессор Парижской высшей нормальной школы и Парижского университета Шарль Эрмит.

С 1889 г., когда шведский король Оскар II объявил конкурс на лучшее исследование по проблеме «трех тел», Пуанкаре стал заниматься небесной механикой. Для решения задач небесной механики Пуанкаре исследовал расходящиеся ряды и построил свою теорию асимптотических разложений, разрабатывал теорию интегральных инвариантов, исследовал устойчивость орбит и форму небесных тел. Подобно Эйлеру, он за короткий срок переосмыслил и обновил складывающийся в течение двух столетий математический аппарат небесной механики. В работах по этой тематике им сделаны многие математические открытия, оформившиеся в курсах «Уравнения в вариациях»

и «Интегральные инварианты». В трехтомном трактате «Новые методы небесной механики» (1892–1899) он исследовал периодические и асимптотические решения дифференциальных уравнений, ввел методы малого параметра, метод неподвижных точек. Разработанный им метод интегральных инвариантов стал классическим средством теоретического исследования не только в механике и астрономии, но и в статистической физике, и в квантовой механике.

Вклад Пуанкаре в небесную механику был столь значительным, что на вакантное место главы кафедры небесной механики Сорбонны его утвердили единогласно. Оставив кафедру математической физики и теории вероятностей, которой руководил десять лет, с осени 1896 г. профессор Пуанкаре уже ведет курсы по некоторым разделам небесной механики. Он читает курсы: «Новые методы небесной механики», «Лекции по небесной механике», «Лекции о фигурах равновесия жидкой массы», «Лекции о космогонических гипотезах».

От алгебраических работ и исследования дифференциальных уравнений и периодических решений Пуанкаре перешел к фундаментальным исследованиям по топологии. Им создана так называемая комбинаторная топология, являющаяся самостоятельным разделом математики. Пуанкаре назвал ее «Analysis situs», что дословно означает «Анализ положения». Ему топология виделась в будущем как геометрия относительных положений, качественная геометрия. До 1904 г. Пуанкаре написал пять дополнений к основной работе «Анализ положения». Он преобразовал «истинно топологическую» формулу Эйлера для вершин, ребер и граней многогранников таким образом, что она стала применима для пространств любого числа измерений. Пусть дан многогранник, имеющий В вершин, Р ребер и Г граней. Эйлер доказал, что для многогранников имеет место соотношение

$$В - Р + Г = 2.$$

Пуанкаре обобщил теорему Эйлера на случай n-мерного пространства. Пусть вершинам, ребрам, граням и т. д. в n-мерном пространстве соответствуют 0-, 1- , 2- … $(n - 1)$-мерные образы, число которых обозначим через N_0, N_1, N_2, N_3… N_{n-1}. Тогда для образов, соответствующих простым многогранникам, имеет место равенство

$$N_0 - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^{n-1}N_{n-1} = 1 - (-1)^n.$$

При $n = 3$ мы получим формулу Эйлера.

В 1904 г. Пуанкаре доказал, что всякая двумерная поверхность, имеющая ту же фундаментальную группу, что и сфера, топологически ей эквивалентна. Он полагал, что по аналогии то же самое верно и для трехмерных поверхностей. Эту гипотезу математики пытались доказать в течение всего XX в., и только в 2002 г. она была доказана Григорием Яковлевичем Перельманом из лаборатории геометрии и топологии Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

У Пуанкаре была изумительно развита интуиция. Это проявлялось во всех его работах, но особенно – в работах по топологии. Основной стер-

жень всего дальнейшего развития топологии Пуанкаре увидел во введенном им понятии гомологии. Вторым основным топологическим понятием, введенным Пуанкаре, было понятие фундаментальной группы. Оно легло в основу гомотопической топологии, которую после Пуанкаре развивали Брауэр, Хопф, Гуревич и другие. Пуанкаре является также основателем теории векторных полей, тесно связанной с теорией неподвижных точек непрерывных отображений.

Последней геометрической теоремой Пуанкаре, в доказательстве которой им были получены только частные результаты, была теорема о существовании неподвижной точки для определенного класса непрерывных отображений плоского кругового кольца на себя. Эти результаты он опубликовал в 1911 г., понимая важность теоремы для развития математики и сознавая, что из-за начавшейся болезни может не успеть получить полное доказательство. Вскоре после смерти Пуанкаре эта теорема в общем виде была доказана молодым американским математиком Дж. Д. Биркгофом, сразу прославившимся этим результатом [6].

Пуанкаре интересовался также вопросами философии математики. В начале XX в. Пуанкаре и Гильберт считались крупнейшими математиками планеты, причем пальму первенства отдавали Пуанкаре. Между ними разгорелась дискуссия на тему «Формализуема ли математика?». Ход этой дискуссии осветил И.Р. Шафаревич в докладе на собрании Японского математического общества 28 сентября 1993 г.

Гильберт считал, что математика формализуема, и путем ее формализации надеялся получить доказательство непротиворечивости арифметики. Пуанкаре не соглашался с ним. Позже теорема неполноты Геделя, по-видимому, позволила решить вопрос в пользу Пуанкаре.

Пуанкаре подчеркивает роль интуиции в математическом рассуждении. Он говорит, что математическое рассуждение имеет «род творческой силы» и тем отличается от цепи силлогизмов. Особым образом он выделяет математическую интуицию, которая, как он считал, содержит бесконечное число силлогизмов, как бы сжатое в одной формуле. Читая высказывание Пуанкаре о том, что математик в принципе отличается от шахматиста тем, что он не может быть заменен никаким механическим устройством, можно предположить, что ему не хватило нужного термина, чтобы сформулировать свою мысль короче: «Математик не может быть заменен компьютером». Им написана серия работ, которые объединены в четырех книгах: «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод», «Последние мысли».

Особенно интересны взгляды Пуанкаре на роль эстетического чувства в математическом творчестве. Он говорит, что математическое открытие приносит чувство наслаждения. Если бы математика была лишь собранием силлогизмов, она была бы доступна всем – для ее освоения требовалась бы лишь хорошая память. Известно, что большинству людей математика дается с трудом. Пуанкаре видит причину этого в том, что силлогизмы складываются в математике в структуру, обладающую красотой. Чтобы понимать математику, надо «увидеть» эту красоту, а для этого требуются эстетические способности, которыми обладают не все.

В 1905 г. Венгерская академия наук учредила премию в 10 тыс. золотых крон ученому, чей вклад в развитие математики за последние 25 лет был наибольшим. Эта премия стала известна как премия Больяй. Фактически было только два претендента – Пуанкаре и Гильберт. Премию вручили Пуанкаре, математическая карьера которого началась в 1879 г., когда Гильберт был еще учеником гимназии.

Пуанкаре оказал непосредственное влияние на развитие теоретической мысли в период кризиса классической физики. В 1904 г. на Международном конгрессе математиков в Сен-Луи (США) он сформулировал закон, который позже назвал постулатом относительности. Летом 1905 г. в статье «О динамике электрона» он изложил идеи, вошедшие в качестве основной части в теорию относительности Эйнштейна.

Пуанкаре был не только выдающимся математиком и физиком, но и известным философом. Именно его философия помешала Пуанкаре считаться автором теории относительности. Пуанкаре считал, что в постулатах геометрии и механики нет абсолютной истины. Они выбраны не из соображений правильности, а из соображений удобства. Евклидова геометрия является наиболее удобной из всех непротиворечивых геометрий. Принцип инерции удобен, но его нельзя проверить, потому что не существует точки, в которой на тело не действовала бы ни одна сила. Прямых линий так же не существует в природе. Абсолютного движения нет. Так как существует только относительное движение, то утверждение о суточном вращении Земли не более истинно, чем утверждение Птолемея о суточном вращении небесной сферы вокруг Земли.

Теория относительности не родилась бы в голове Эйнштейна, если бы с ранней юности в ней не поселился навязчивый вопрос: «Как соотносятся математика и реальный мир?» Эйнштейн считал, что теория относительности отражает реальный мир, и ученый неволен в выборе геометрии, его математика должна проверяться окружающим миром. По мнению Пуанкаре, теория относительности не более правильна, а более удобна для объяснения определенных явлений в реальном мире. Поскольку все знания являются не абсолютной, а относительной истиной, то реальный мир и математика никак не связаны. Каждый может выбирать себе любую геометрию – Евклида, Лобачевского, Римана или свою собственную непротиворечивую систему аксиом, из которой логически следуют все теоремы. Быть может, именно мнение об относительном значении теории относительности помешало Пуанкаре считаться ее автором, ведь он был самым выдающимся математиком своего времени. Минковский часто говорил студентам в Гёттингене: «Эйнштейн излагает свою глубокую теорию с математической точки зрения неуклюже – я имею право так говорить, поскольку свое математическое образование он получил в Цюрихе у меня». Гильберт во время публичной лекции сказал: «Знаете ли вы, почему Эйнштейн высказал самые оригинальные и глубокие в наше время вещи о пространстве и времени? Потому что он ничего не знал о философии и математике времени и пространства!» [66]. Тезис Пуанкаре о произвольности геометрии в начале XX в. был для физиков слишком революционным, и они к нему были не готовы. По-настоящему они восприняли его только во второй половине XX в.

Деятельность Пуанкаре отличалась исключительной продуктивностью и многосторонностью. Им написано более 500 мемуаров и книг. Даже в зрелом возрасте он с удивительной легкостью овладевал любой проблемой, возникающей в точных науках.

Подобно Коши, Пуанкаре публиковал свои работы очень быстро, поэтому не всегда удавалось придать им законченный вид, особенно ранним. Находясь под постоянным наплывом множества идей в самых различных областях математики, он «не успевал быть строгим». Когда интуиция давала ему уверенность, что сформулированную им теорему можно доказать безукоризненно, он намечал только путь к доказательству, завершение которого предоставлял другим математикам [6].

Впоследствии у Пуанкаре сформировался блестящий и ясный стиль, который в сочетании с неисчерпаемым запасом замечательных и глубоких идей принес огромный успех его трудам по философии математики, получившим широкую известность.

Американский историк науки Э. Белл отметил многогранность научного мышления Пуанкаре, назвав его «последним универсалистом». Последним потому, что он и Гильберт замыкают шеренгу великих математиков, снискавших славу универсалистов. Многие зарубежные академии и университеты избрали его своим иностранным членом. Он неоднократно получал приглашения выступить за границей с изложением своих идей или работ, а в те времена такие приглашения были большой редкостью.

В Советском Союзе труды Пуанкаре до 1970-х годов практически не печатались из-за того, что Ленин критиковал философские взгляды Пуанкаре в работе «Материализм и эмпириокритицизм». Трехтомник его работ был издан благодаря Н.Н. Боголюбову и В.И. Арнольду.

В 1912 г. резко ухудшившееся состояние здоровья вынудило Пуанкаре согласиться на серьезную, хотя не слишком сложную хирургическую операцию. Она прошла успешно, но 17 июля 1912 г. в послеоперационный период Пуанкаре умер от эмболии.

Жак Адамар

Адамар Жак Соломон родился 8 декабря 1865 г. в Версале в семье преподавателя латинского языка и учительницы музыки. В школьные годы получал награды на общих конкурсах лицеев Франции по латыни и греческому языку. После окончания лицея в 1884 г. он сдает вступительные экзамены одновременно в Высшую нормальную и Политехническую школы в Париже. Хотя Адамар установил рекорд всех предшествующих лет для поступающих в Политехническую школу (1875 баллов из 2000 возможных), он становится слушателем Высшей нормальной школы.

В студенческие годы он публикует работы «Об улитке Паскаля» и «О гипоциклоиде с двумя точками возврата» и сдает экзамен на право пре-

подавания математики в лицее. В 1892 г. он защищает диссертацию на тему «Исследование функций, заданных рядами Тейлора» и женится на Луизе Анне Тренель, с которой прожил в браке 68 лет.

С 1893 г. Адамар читает лекции в университете Бордо, портовом городе на юго-западе Франции. За четыре года интенсивной творческой работы вышло 39 его публикаций, благодаря которым Адамар был признан в математическом мире.

В 1897 г. он возвращается в Париж и начинает читать лекции в Сорбонне на кафедре дифференциального и интегрального исчисления. На I Международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1897 г. он читает доклад «О некоторых возможностях приложения теории множеств». Его доклад на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г. «Об уравнениях в частных производных с вещественными характеристиками» открыл цикл работ по динамическим задачам механики сплошной среды.

В 1902 г. Адамар читает лекции в Принстоне (США) по теории упругости, методам математической физики, геометрической оптике. Одной из самых значительных работ Адамара являются его «Лекции о распространении волн и уравнениях гидродинамики», вышедшие в 1903 г. Эта тема была развита Адамаром в 1904 г. на III Международном конгрессе математиков в Гейдельберге в докладе «О фундаментальных решениях линейных уравнений в частных производных». За мемуар «О задаче анализа, связанной с изгибом закрепленной пластины» Адамар в 1907 г. получил премию Вайана. В 1912 г. Адамар покидает Сорбонну, становится профессором Коллеж де Франс и членом Академии наук Франции вместо умершего Пуанкаре.

В 1922 г. в США выходит самая известная монография Адамара «Лекции по задаче Коши для линейных уравнений в частных производных». Он дополняет и переиздает оба тома «Элементарной геометрии», и печатает двухтомник «Курс анализа Политехнической школы».

Жак Адамар читал доклады на Международных конгрессах 1928 и 1932 гг., а на конгрессе в Осло в 1936 г. его избрали президентом Международной комиссии по математическому образованию.

Адамар был неутомимым путешественником, любил длительные пешие прогулки, плавание, походы в горы. Он собирал ботанические коллекции в горах Мексики, в возрасте старше 60 лет совершил восхождение на Монблан.

В 1941 г. из-за войны Адамар с женой и дочерью Жаклин уезжают в Америку, где он читает лекции в Колумбийском университете. В Париж Адамар вернулся в 1945 г.

На Международном конгрессе математиков в Гарварде в 1950 г. Адамар был избран одним из трех почетных президентов конгресса. В мае 1956 г. 90-летний Адамар принял участие в работе Четвертого конгресса румынских математиков.

Последняя награда была вручена Адамару в 1962 г. в честь 50-летия его избрания в Академию наук. Умер Адамар 17 октября 1963 г. Похоронен он на кладбище Пер-Лашез [50].

Эмиль Борель

Борель Эмиль родился 7 января 1871 г. на юге Франции (Авейрон) в небольшом городке Аффрикане в семье протестанского пастора и дочери фабриканта сукон.

Эмиль пробыл в родительском доме до 11 лет. В 1882–1892 гг. он учился в лицее города Монтобана и был очень хорошим учеником. В 1888 г. он поступил в Коллеж святой Варвары в Париже.

В 1889 г. Борель получил первые премии на двух конкурсах и был принят одновременно в Политехническую и Высшую нормальную школу. С согласия своего отца он выбрал вторую. Предварительно Эмилю надлежало пройти военную службу. Молодому человеку разрешили посещать занятия в университете того города, в котором он служил. В 1892 г. он окончил Высшую нормальную школу.

Свой творческий путь Борель начинал как геометр. Его первые работы написаны под влиянием Дарбу в городе Лилле. За три года он опубликовал в ведущих математических журналах страны 22 работы. В 1894 г. Борель защитил диссертацию «О некоторых вопросах теории функций». Эта работа, объемом меньше 45 страниц, стала значительным событием. В приложении к диссертации была доказана лемма Бореля, широко применяемая в анализе и в теории меры. С ее помощью были доказаны три важнейшие теоремы о непрерывных функциях: Больцано – Коши, Вейерштрасса и Кантора.

В 1897 г. Борель возвращается в Париж. Начинается наиболее значительный период его научной деятельности. Он исследует теорию аналитических функций, пишет серию монографий по теории функций комплексного переменного, которая стала значительным событием в математическом мире. Основным достоинством этих работ было применение теоретико-множественного подхода к комплексному анализу. Задумав свою серию книг, Борель не сомневался, что традиция всеобъемлющих книг по анализу к началу века практически себя изжила, и создание трактата по теории функций, подобного «Теории поверхностей» Дарбу, одному человеку не под силу. Он стремится сделать свое начинание коллективным делом, привлекая не только французских, но и иностранных математиков. Наряду с книгами Бореля, Лебега, Бэра, в борелевской серии вскоре появляются книги Линделёфа (Стокгольм), Вольтерры (Рим), Ф. Рисса (Будапешт), Блюменталя (Берлин), Неванлинны (Хельсинки), Карлемана (Копенгаген), Лузина (Москва), Серпиньского (Варшава). При жизни Бореля вышло 50 книг этой серии, десять из которых были написаны им самим. Все это были оригинальные сочинения, в которых создатели новых направлений и теорий анализа излагали материал подчас буквально по горячим следам своих открытий.

Период с 1897 по 1912 г. в творчестве Бореля является наиболее богатым результатами. В эти годы во Франции работало множество выдающихся математиков. Чтобы выделиться на их фоне, требовались особые достижения. Но именно так расценила Французская академия наук работы Бореля,

удостоив его самых высоких наград. В возрасте 27 лет Борель получает премию Академии по математическим наукам, в 1901 г. – премию Понселе, в 1904 г. – премию Вайана за работу «Мемуар о перемещениях по сферической траектории», в 1905 г. – премию Пти Дармуа.

В 1901 г. Борель женился на Маргарите Аппель, дочери своего учителя. Маргарита была талантливым литератором, автором психологических романов, которые она писала под псевдонимом Камилла Марбо. Борель интересовался не только математикой. Им написана книга о бридже и статьи о других азартных играх. В 1905 г. премию Пти Дармуа он потратил на основание литературно-философского научно-популярного журнала, в котором сотрудничали Анри Пуанкаре, физики Мария Кюри, Поль Ланжевен, Жан Перрен, философ Анри Бергсон и политики Леон Блюм, Эдуард Эррио и Жак Дюкло.

Добившись к 40 годам поразительных успехов во внедрении теоретико-множественного подхода к исследованию функций, Борель неожиданно для многих отошел от главного направления своих исследований.

В 1911 г. Борель возглавил Высшую нормальную школу в Париже. Он организует публикацию серии популярных книг «Новая научная коллекция» и сам пишет несколько книг этой серии.

В Первую мировую войну Эмиль Борель командовал артиллерийской батареей и проводил исследования с целью решения военных задач.

В 1919 г. в Парижском университете освободилась должность руководителя кафедры математической физики и теории вероятностей. Желание Бореля занять эту должность, которую когда-то занимали Ламе и Пуанкаре, было удовлетворено.

В 1920 г. Борель отказался от поста руководителя Высшей нормальной школы и вместе с Пенлеве отправился в пятимесячную поездку по Китаю. Интересен такой эпизод этой поездки. Вдоль пути поезда, в котором ехали Пенлеве и Борель, сражались две китайские армии. Генералы, командовавшие этими армиями, узнав о том, кто следует в поезде, договорились о временном перемирии, чтобы дать поезду возможность двигаться дальше.

В 1920-х годах Борель решил обобщить множество исследований, проведенных за предыдущие 50 лет по теории вероятностей и ее приложениям. Со свойственной ему энергией Борель берется за осуществление этого мероприятия, которое, как и серия монографий по теории функций, стало коллективным начинанием. Борель в нем играл главную роль и как автор, и как организатор. Была создана своего рода энциклопедия сведений по теории вероятностей, отвечающая той эпохе. Стремительное развитие теории вероятностей, начавшееся в конце 20-х годов XX в. и вызванное преимущественно работами русских математиков, привело к тому, что серия не успевала за всеми новыми публикациями в этой области. В связи с этим Борель задумал новую серию – «Коллекция монографий по теории вероятностей». Заключительную часть этой серии составила одна из книг Бореля по теории азартных игр.

Кроме математики, Бореля интересовало очень многое: аналитическая механика, статистическая механика, теория относительности, азартные игры, генетика, экономика, вопросы преподавания, авиация.

В 1921 г. Бореля выбирают в Академию наук. В 1924–1936 гг. он был депутатом парламента, в 1927 г. – мэром Аффрикана. Депутат Борель стал инициатором нескольких мероприятий, среди которых следует отметить основание в 1928 г. Института Анри Пуанкаре. Он был даже морским министром в кабинете Пенлеве и принимал участие в длительном походе эскадры кораблей. На посту министра Борель добился присвоения некоторым военным судам имен ученых: «Архимед», «Паскаль», «Монж», «Понселе», «Френель», «Пастер», «Анри Пуанкаре».

Борель задумывает и осуществляет издание серии книг «Библиотека научного образования», которая представляет собой собрание научно-популярных произведений по различным дисциплинам. Некоторые книги, вышедшие в этой серии, были довольно популярны, другие – адресованы профессиональным математикам, физикам, механикам, биологам. В этой серии Борель был автором книг «Пространство и время», «Геометрия и мнимые величины», которые с интересом читают и в наши дни. Помимо этого, Борель находил время для написания книг по элементарной математике. Он любил работу педагога, поэтому часто присутствовал на экзаменах в высших военно-морских учебных заведениях Франции.

После захвата Франции Германией зимой 1941 г. Борель вместе с тремя другими членами Французской академии был арестован немцами и заключен в тюрьму Френ. Он заболел: перенес операцию. Недуг отступил. За участие в Первой мировой войне Борель был награжден Военным крестом, а за мужественное поведение во время Второй мировой войны – Медалью сопротивления.

В течение последних 15 лет жизни Борель опубликовал много статей, посвященных различным вопросам арифметики, теории множеств, теории игр, теории вероятностей. М. Фреше считал Бореля создателем теории игр, которой Борель интересовался в начале 1920-х годов. Однако большинство математиков отдают пальму первенства Джону фон Нейману, доказавшему в 1928 г. теорему о минимаксе. На этом, последнем, этапе жизни Борель привлек внимание ученых к исследованиям нескольких проблем в теории простых чисел.

Литературное наследие Бореля составляют более трехсот публикаций. В 1955 г., когда ему шел 85-й год, решил принять участие в Международном конгрессе по статистике в Бразилии. На обратном пути в самолете он упал и получил травму. 3 февраля 1956 г. после нескольких месяцев болезни Эмиль Борель скончался.

Жизнь Бореля была счастливой – долгий, плодотворный и творческий путь, высшие государственные и академические почести, прижизненное признание коллег всего мира. С именем Бореля связаны истоки метрической теории чисел, теории стратегических игр, теории квазианалитических функций.

Анри Лебег

Лебег Анри Леон родился 28 июня 1875 г. в небольшом провинциальном городке Бове недалеко от Парижа в семье рабочего-печатника и учительницы начальной школы. Его отец умер рано, и школьные годы Анри были очень трудными в материальном отношении. Упорство и блестящие способности позволили юноше успешно окончить среднюю школу и поступить в 1894 г. в Высшую нормальную школу в Париже, диплом которой давал Анри возможность стать учителем средней школы. После окончания ВНШ в 1897 г., Лебег следующие два года работал в ней помощником библиотекаря, чтобы глубже изучить новейшую математическую литературу.

В 1898 г. вышла первая публикация Лебега – статья «Об аппроксимации функций». В 1899–1801 гг., работая преподавателем математики в Центральном лицее города Нанси, Лебег публикует результаты своих исследований, полученных при работе над диссертацией.

Чтобы лучше понять значение результатов Лебега, совершим небольшой экскурс в историю математики. Первые 200 лет существования математического анализа развивались идеи Ньютона и Лейбница. В это время сохранялись ранее принятые обозначения, а вводимые новые понятия естественно вытекали из уже имеющихся идей. Математики пользовались понятиями числа, геометрической фигуры, длины, площади, объема, в которые вкладывался тот же смысл, что и в XVII в.

В XIX в. активно проходил процесс уточнения этих математических понятий. После уточнения обнаружилось, что эти понятия охватывают более широкий класс объектов, чем это казалось первоначально, и свойства уточненных понятий оказались отличными от привычных свойств. Например, когда было сформулировано понятие линии, то были найдены непрерывные линии, удовлетворяющие уточненной формулировке и проходящие через любую точку квадрата (линия Пеано), кривые, к которым ни в одной точке нельзя провести касательную и т. п.

После создания Кантором теории бесконечных множеств фигурами стали считать любые точечные множества, в том числе определяемые с помощью бесконечных процессов (например, ковер Серпиньского). Пуанкаре так охарактеризовал подобные исследования: «Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждений наших отцов; никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь» [23].

Молодые математики понимали узость рамок классического анализа, изучавшего только гладкие линии и поверхности. Но для разрывных функций нужно было искать более общие определения длины, площади и объема. В 1898 г. в диссертации Р. Бэра была дана классификация разрывных функций, а в диссертации Э. Бореля изложена новая теория функций.

К ним и примкнул Анри Лебег. Он установил, что среди поверхностей, наложимых на плоскость, есть не содержащие ни одного прямолинейного отрезка, а касательные к кривым двоякой кривизны могут образовывать поверхность, не наложимую на плоскость. Лебег установил необходимые и достаточные признаки того, что поверхность является наложимой на плоскость, и доказал, что наложение на плоскость сохраняет площади.

Лебег старался дать новое определение длины кривой линии, площади поверхности и объема тела и ввел новые понятия, которые теперь носят его имя: мера Лебега, интеграл Лебега, измеримое множество Лебега. Его идеи казались ведущим французским математикам начала XX в. слишком смелыми. Г. Дарбу и К. Жордан дали отрицательные отзывы на предварительные публикации его результатов, и диссертация «Интеграл – длина – площадь» была допущена к защите только в 1902 г.

Эпохальное значение полученных Лебегом результатов для математики XX в. стало понятно позже. Однако уже вскоре после защиты диссертации Лебег был принят на работу в университет города Ренна, где читал лекции на медицинском факультете. В том же, 1902, году его приглашают в Коллеж де Франс, где он прочитал курс лекций по теории интегрирования. Публикация этого курса вышла в печать в 1904 г. под названием «Лекции по интегрированию и отысканию примитивных функций». Лебег полагал, что введенный им интеграл является естественным завершением исторического развития понятия интеграла и теории интегрирования. Он необходим для решения давно назревших проблем и упрощает исследование уже решенных проблем. Применение интеграла Лебега требует расширения меры Пеано – Жордана и уточнения меры Бореля, что достигается введением нового понятия меры. Интеграл Лебега позволяет решить ряд прикладных задач, которые нельзя решить, применяя интеграл Римана.

Лекции и научные работы Лебега отличались безукоризненной ясностью изложения. Их характеризует максимальная простота определений и четкость математических выводов. Человеческими качествами и талантом Лебега восхищался его друг Н.Н. Лузин. Он считал Лебега более способным математиком, чем он сам.

В 1904–1905 гг. Лебег читает курс лекций по тригонометрическим рядам. В 1906 г. он становится профессором университета города Пуатье. Наиболее плодотворным периодом жизни Лебега являются 1903–1910 гг. Он публикует значительную часть своих работ, развивающих идеи диссертации.

В 1910 г. Лебег переезжает в Париж, где работает 11 лет в Сорбонне. В 1912 г. его заслуги признают официально, и он получает премию Уллевига, а через пять лет – премию Сентура. В Первую мировую войну Лебег возглавляет математическую комиссию Службы изобретений, открытий и научного эксперимента. В 1918 г. за решение ряда задач по коррекции траекторий полета артиллерийских снарядов и подготовку справочника для составления таблиц стрельбы он награжден орденом Почетного легиона. В 1921 г. Лебег занимает кафедру математики в Коллеж де Франс, а в 1922 г. избирается в Академию наук.

Дальнейшие исследования Лебега также относились к теории функций действительного переменного. Большая часть его работ относится к теории интеграла. В последующие годы он занимается также элементарной и проективной геометрией, историей математики и популяризацией своих идей, сложных для восприятия.

В 1940 г. во время Второй мировой войны его дом был разрушен. Он заболел, но не бросил работу, а добирался до места на переделанном трехколесном велосипеде. Болезнь обострилась и приняла особо тяжелую форму в последние четыре месяца жизни.

Умер Анри Лебег 26 июля 1941 г.

Теория меры и теория интеграла, созданные Лебегом, служат фундаментом и главным инструментом современной теории дифференциальных уравнений, математической и теоретической физики, теории обобщенных функций, теории операторов, спектральной теории и других разделов современной математики.

Глава 9

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Московская математическая школа, выросшая в стенах Московского университета, свои основные достижения ведет от работ, казалось бы, в узкой области математики – теории множеств и теории функций действительного переменного. Но мы видели, что на этой почве возникло грандиозное научное сооружение...

Б.В. Гнеденко

Организация математических исследований до 1941 г.

Московская математическая школа развивалась позже Петербургской. Московское математическое общество образовалось в 1864 г. из кружка математиков, собиравшихся у профессора Московского университета Н.Д. Брашмана, вышедшего в том году в отставку. Первоначально общество было немногочисленным – всего 13 членов, однако к концу XIX в. оно насчитывало уже свыше 100 человек. Если в первоначальный состав общества входили и математики, и механики, и астрономы, и физики, то постепенно оно становится механико-математическим.

Первым президентом общества был Н.Д. Брашман, а после А.Ю. Давидов. В 1886 г. после смерти А.Ю. Давидова президентом Московского математического общества был избран В.Я. Цингер. Под его руководством в Москве начали проводиться исследования по проективной геометрии. Он привлек к работе в этой области Егорова, Млодзиевского и Андреева. После Цингера президентом общества был Н.В. Бугаев (отец поэта Андрея Белого). В этот период активное участие в работе общества принимали Егоров, Млодзеевский, Умов, Голицын, Жуковский, Власов и другие. С 1903 по 1905 г. общество возглавлял П.А. Некрасов, а в 1905 г. его сменил крупнейший ученый Н.Е. Жуковский, занимавший этот пост до 1921 г. Основные исследования московских математиков в конце XIX в. и в первое десятилетие XX в. проводились в области проективной и дифференциальной геометрии и теории функций комплексного переменного.

В XIX в. петербургская математическая школа занимала главенствующее положение. В середине XX столетия математика в Московском университете по исследованиям в теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, дескриптивной теории множеств, теории рядов Фурье поднялась на мировой уровень. Такой успех московской математики принято связывать с двумя событиями: развитием московской математической школы под руководством Д.Ф. Егорова и Н.Н. Лузина и пе-

реездом столицы из Петрограда в Москву. Первое из этих явлений академик Б.В. Гнеденко назвал «самым крупным явлением в математической жизни нашей страны» [29]. В начале 1910-х годов в Московском университете работал лишь один ученый, имевший международное признание, – Д.Ф. Егоров. А уже в 1930-е годы московская математическая школа стала одной из самых сильных в мире.

До 1917 г. президент Академии наук в России назначался императором. После Февральской революции 1917 г. Академия наук впервые избрала себе президента: им стал исполнявший обязанности вице-президента А.П. Карпинский.

В конце 1917 г. в Академии наук по специальности «математика» было три академика – А.А. Марков, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, по специальности «математическая физика» – академик А.Н. Крылов. А.М. Ляпунов скончался в 1918 г. В 1920 г. академиком избрали ученика А.А. Маркова Я.В. Успенского, занимавшегося теорией чисел.

В феврале 1918 г. общее собрание Академии наук рассмотрело предложенный Народным комиссариатом просвещения проект мобилизации науки для нужд государственного строительства. Для изучения проекта собрание избрало комиссию под председательством академика С.Ф. Ольденбурга. В состав этой комиссии вошел академик В.А. Стеклов, вскоре ставший вице-президентом Академии наук.

Совнарком принял постановление о финансировании работ Академии наук, связанных с выполнением важнейших народнохозяйственных задач. Опубликованное 16 октября 1918 г. «Положение о единой трудовой школе» сделало среднее образование доступным для самых широких масс. При вузах начали организовываться рабочие факультеты (рабфаки), дававшие возможность овладеть программой средней школы, что привело к появлению в высшей школе пролетарской прослойки.

Были открыты вузы во многих городах, и в большинстве из них были организованы кафедры высшей математики. Накануне революции в России было 11 университетов. Физико-математические факультеты были в 9 университетах и на 10 высших женских курсах из 22 с университетской программой. Кафедры математики работали в 20 высших технических учебных заведениях и 4 военных академиях. Каждый физико-математический факультет имел, как правило, 2 математические кафедры – чистой математики и прикладной математики, которая впоследствии была переименована в кафедру механики.

Советская власть приняла жесткие меры для контроля над высшей школой и направлениями развития науки, предложив Академии сосредоточить усилия на изучении естественных производительных сил страны.

В 1924 г. членами-корреспондентами Академии наук СССР были избраны С.Н. Бернштейн, Д.Ф. Егоров, Д.А. Граве, Н.М. Гюнтер, И.И. Иванов. Последние два – представители петербургской математической школы, профессора Ленинградского университета. Одновременно членом-корреспондентом Академии наук был избран выдающийся механик, ученик и сподвижник Н.Е. Жуковского С.А. Чаплыгин.

Значительным событием в жизни советских математиков было участие в Международном математическом конгрессе в Торонто (Канада), состоявшемся 11–16 августа 1924 г. В числе участников были В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер, Н.М. Крылов. Доклад Стеклова был посвящен работам Ляпунова.

В декабре 1925 г. была восстановлена международная премия им. Н.И. Лобачевского, присуждавшаяся Казанским физико-математическим обществом за сочинения, представляющие крупный научный вклад в развитие идей Лобачевского. Первым эту премию получил Г. Вейль.

С 1925 г. начала премировать наиболее выдающиеся работы года Главнаука Наркомпроса СССР. Одним из первых эту премию получил М.А. Лаврентьев за совокупность работ по дескриптивной теории множеств. В 1927 г. были премированы Н.М. Гюнтер и Б.Н. Делоне.

За первые десять лет советской власти значительно расширился диапазон исследований. Некоторые области математики – теория функций, топологии, теория вероятностей – в значительной степени продвинулись именно благодаря советским ученым. В период разрухи математика развивалась интенсивнее других разделов науки потому, что для ее развития не нужно было ни лабораторий, ни реактивов. Достаточно было иметь бумагу, карандаш, научную библиотеку и энтузиазм. Недостаток текущей литературы возмещался научным общением, которое удалось организовать и поддерживать.

Необходимость научного общения привела к созыву Всероссийского съезда математиков, проходившего в Москве с 27 апреля по 4 мая 1927 г. Он был созван по инициативе Научно-исследовательского института математики и механики при 1-м МГУ и Московского математического общества. В его работе приняли участие 378 математиков из Советского Союза. Основными докладчиками были Н.Н. Лузин – «Современное состояние теории функций действительного переменного», С.Н. Бернштейн – «Современное состояние теории вероятностей и ее приложений», П.С. Александров – «Об основных направлениях современной топологии».

Состоявшиеся в 1929 г. выборы в Академию наук пополнили ее состав. Академиками были избраны С.Н. Бернштейн, И.М. Виноградов, Н.М. Крылов, Н.Н. Лузин, С.А. Чаплыгин, членами-корреспондентами – П.С. Александров, Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарёв и почетными академиками – Д.А. Граве и Д.Ф. Егоров.

23 мая 1930 г. был принят новый устав Академии наук, по которому основной задачей Академии явилось подчинение своей научной работы нуждам социалистического строительства.

Характерной чертой советской математики, отличавшей ее от дореволюционной, являлась коллективность работы и организация больших научных школ и новых направлений исследований. Научное сотрудничество выражалось в организации научных семинаров по различным вопросам математики, организации научно-исследовательских кафедр при вузах и специализированных научно-исследовательских институтов. Большую роль играли также региональные и союзные съезды, конференции и совещания по общим и частным вопросам математики.

Первый Всесоюзный съезд математиков проходил в Харькове с 24 по 29 июня 1930 г. На съезде было семь секций, в работе которых участвовали 471 представитель из 54 городов страны и 14 иностранных представителей. На восьми пленарных заседаниях было заслушано 15 докладов. На секциях было прочитано 14 обзорных докладов, а всего на съезде состоялось 167 выступлений.

Во вступительном докладе «Роль математики в строительстве социализма» О.Ю. Шмидт отметил: «Математика представляет собой одну из наиболее разветвленных наук, настолько разветвленных, что когда кто-нибудь делает математический доклад, то очень небольшое число присутствующих может следить за ним компетентно. Это таит в себе опасность общего разброда, опасность отрыва от питающих корней, опасность заблуждений в дебрях леса, откуда не выбраться и где напрасно расточаются силы и гибнут таланты. Успех в том, чтобы рядом со специальными работами была и работа синтетическая, чтобы основа математики – методология – была в центре нашего внимания, чтобы каждый отдельный математик, удаляясь в лес специальных изысканий, видел спасительные огни» [40].

Второй Всесоюзный математический съезд проходил в Ленинграде с 24 по 30 июня 1934 г. В его работе приняли участие 732 представителя от научных и учебных учреждений 50 городов. На съезде работали девять секций, всего было сделано 235 докладов. В отличие от Первого съезда было больше докладов прикладного характера и меньше о роли марксизма и диалектического материализма в математике.

В 1930-е годы было организовано несколько десятков специальных и региональных конференций и совещаний.

В 1930–1931 гг. была реорганизована система высшего образования. За основу принималась узкая специализация инженеров. Сроки их подготовки были сокращены до трех-четырех лет. Удельный вес предметов физико-математического цикла был следующим: математика – 50 %, механика – 30, физика и химия – 20 %. Вузы были переданы в ведение главных управлений Высшего совета народного хозяйства (ВСНХ) и разукрупнены. Уменьшилось число часов на предметы физико-математического цикла, что сказалось на качестве усвоения специальных предметов на старших курсах. Ученые забили тревогу, и с 1933 г. началось новое преобразование высшей школы в целях создания более благоприятных условий для развития науки.

В 1934 г. в Москве проходила Первая Международная конференция по тензорной дифференциальной геометрии, а в 1935 г. – Первая Международная топологическая конференция.

В 1919 г. по инициативе академика В.А. Стеклова, вице-президента Академии наук, был организован Математический кабинет, ставший в 1921 г. Физико-математическим институтом. Директором института был назначен Стеклов, после смерти которого в 1926 г. институт стал носить его имя. В 1934 г. решением правительства из Ленинграда в Москву вместе с Академией наук СССР переведен и Физико-математический институт. Он был разделен на два научных учреждения: Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР и Физический институт им. П.Н. Лебедева АН СССР. Вместе

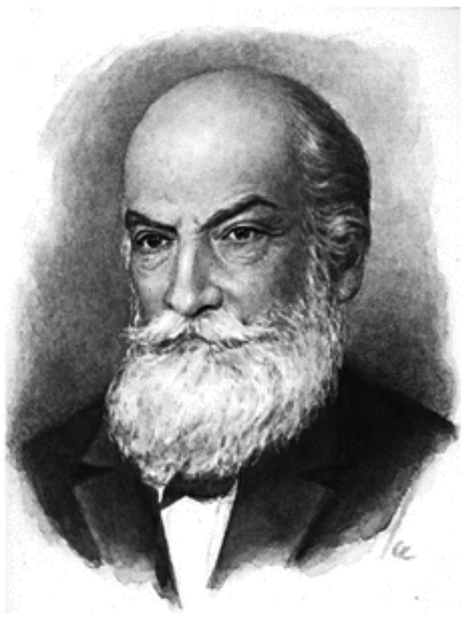
с институтом в Москву переехали ленинградские математики И.М. Виноградов, Н.Е. Кочин, С.Л. Соболев и Б.Н. Делоне. В том же году были введены кандидатские и докторские ученые степени, а также звания доцента и профессора. Присвоение ученых степеней и званий научным работникам стало проходить под государственным контролем. До этого преподаватель вуза назывался доцентом или профессором по решению того вуза, в котором он работал, в соответствии с исполняемыми им обязанностями. Ученой степени кандидата наук вообще не существовало. После введения ученых степеней в 1934 г. их присуждение должно было осуществляться учеными советами на основе защиты диссертаций, кандидатских и докторских. Решения ученых советов утверждались экспертным советом Высшей аттестационной комиссии. Но ученые советы должны были состоять из кандидатов и докторов наук. Поэтому на первых порах в 1934–1935 гг. массовый характер приобрело присуждение ученых степеней без защиты диссертаций для формирования ученых советов.

К 1935 г. в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР были образованы девять отделов: теории чисел, которым заведовал директор института И.М. Виноградов, теории функций действительного переменного – Н.Н. Лузин, алгебры – Б.Н. Делоне, теории функций комплексного переменного – М.А. Лаврентьев, теории вероятностей и математической статистики – С.Н. Бернштейн, теории дифференциальных уравнений и математической физики – С.Л. Соболев, механики непрерывных сред – Н.Е. Кочин, теории упругости – Н.И. Мусхелишвили, прикладных методов и приближенных вычислений – А.М. Журавский. В 1939 г. было открыто Ленинградское отделение Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

Некоторые крупные московские математики, особенно тесно связанные с университетом, не перешли в Математический институт им. В.А. Стеклова, а остались работать в Математическом институте МГУ. Среди них были такие блестящие математики, как И.Г. Петровский, П.С. Александров, А.Н. Колмогоров, В.В. Голубев, А.Г. Курош и другие [40].

Объединение петербургской и московской математических школ вывело советскую математику на передовые позиции в мировой науке.

Н.Е. Жуковский



Жуковский Николай Егорович родился 17 января 1847 г. в деревне Орехово Владимирской губернии в семье инженера. В 1864 г. после окончания гимназии с медалью он без сдачи вступительных экзаменов поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, который окончил в 1868 г.

Николай Егорович хотел получить техническое образование и после окончания университета в 1868 г. поступил в Петербургский институт инженеров путей сообщения, выпускником которого был его отец. Ему тяжело давались черчение и геодезия, и после неудачи на экзамене по геодезии весной 1869 г. Жуковский уезжает из Петербурга в деревню, где до осени 1870 г. лечится от сильного переутомления. Он принимает решение заниматься теоретической механикой и сдавать магистерские экзамены в Московском университете. В 1870 г. он преподает физику в женской гимназии, а после сдачи магистерских экзаменов в 1871 г. получает право преподавания в высшем учебном заведении. В 1872 г. он назначен преподавателем математики Императорского московского технического училища (ИМТУ, ныне МГТУ им. Н.Э. Баумана).

С 1874 г. Жуковский был утвержден доцентом кафедры аналитической механики ИМТУ. В 1876 г. им написана магистерская диссертация «Кинематика жидкого тела», опубликованная в восьмом томе «Математического сборника». В диссертации, практически ставшей введением в общий курс гидромеханики, были рассмотрены некоторые случаи плоскопараллельного движения несжимаемой жидкости. Жуковский ввел классификацию особых точек дифференциального уравнения первого порядка, содержащую четыре основных вида особых точек («узел», «седло», «фокус», «центр»). Позже эти вопросы систематизировал Анри Пуанкаре. Николай Егорович исследовал поведение интегральных кривых в окрестности особой точки каждого вида. Это направление было дополнительным в его работах по механике, и в дальнейшем он не стал этим заниматься.

В 1876 г. Жуковский в первый раз выехал за границу и познакомился с французскими и немецкими учеными. Его интересовали их исследования по созданию летательных аппаратов тяжелее воздуха. Одним из научных направлений его исследований стало воздухоплавание.

С 1878 г. интересы Николая Егоровича Жуковского были связаны с механикой. В этом году им была создана в ИМТУ кафедра теоретической механики (на 20 лет раньше, чем в Московском университете), руководителем которой он был более 40 лет. До Жуковского в русских учебных заведениях теоретическая механика даже не считалась самостоятельной научной дисциплиной и развивалась как прикладная математика. Преподавание строилось на базе классических французских курсов, основанных на идеях Лагранжа. Эти курсы механики, излагаемые как часть анализа без чертежей, были рассчитаны на студентов французской Политехнической школы, обладающих высокой математической подготовкой, и с трудом усваивались студентами ИМТУ.

Жуковский разработал курс механики, в котором изложение велось в простой геометрической форме, соответствующей мышлению инженера. Он систематически внедрял векторный метод изложения материала, более адекватный многим понятиям механики. По словам академика Л.С. Лейбензона, курс механики Жуковского был настолько прост и понятен студентам, что получил распространение по всей России. Кафедра теоретической механики Императорского московского технического училища во главе с Жуковским стала, по существу, всероссийской кафедрой механики.

Исследования Жуковского оказали значительное влияние на развитие методов конформных отображений в теории функций комплексного переменного по определению гидродинамических сил, в том числе подъемной силы при обтекании крыла воздушным потоком. В 1882 г. Николай Егорович получил ученую степень доктора прикладной математики, защитив диссертацию на тему «О прочности движения». В 1886 г. он стал экстраординарным профессором Московского университета по кафедре механики, а в 1887 г. – профессором ИМТУ.

В деятельности Жуковского исследования теоретического и прикладного характера органично сочетались. Его математические интересы лежали в области уравнений математической физики и области теории функций комплексного переменного. Он добился серьезных результатов в части приближенных методов решения уравнений математической физики и открыл применение теории функций комплексного переменного к решению сложных задач гидромеханики и аэромеханики.

Жуковский обобщил принцип наименьшего действия. Первым этот принцип высказал Мопертюи в 1744 г., а математически строгую формулировку ему придал Эйлер. Последующие обобщения были сделаны Лагранжем и Якоби.

Научное творчество Жуковского отличается широтой и разнообразием тематики. Это исследования по аэродинамике и авиации, гидродинамике и гидравлике, теории фильтрации, механике неизменяемых систем, математике и астрономии. Он создал теорию ветряных двигателей, применяя математический аппарат, разработанный им для воздушных гребных винтов. Жуковский решил задачи газовой динамики, рассчитывая силы сопротивления при движении артиллерийских снарядов, движущихся со сверхзвуковой скоростью. Ему принадлежит заслуга становления аэромеханики как самостоятельной науки. Основополагающие работы, которые принесли Жуковскому мировую известность и позволяют по праву считать его «отцом русской авиации», посвящены проблемам аэрогидромеханики и самолетостроению.

Особое значение имеют исследования Жуковского в совершенно новой для того времени области знаний – теоретической и экспериментальной аэродинамике. Здесь его идеи остаются основополагающими и в настоящее время. В 1882 г. Жуковский опубликовал работу «О парении птиц», в которой теоретически обосновывалась возможность свободного парения с набором высоты. На Всемирном воздухоплавательном конгрессе в Париже в 1889 г. Жуковский сделал доклад на тему «Некоторые теоретические соображения о летательных аппаратах», ставший событием этого форума. В 1906 г. изданы его работы «О присоединенных вихрях» и «Падение в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси». Затем он

публикует работу «Теоретические основы воздухоплавания», в которой комплексно ставит многие вопросы теории, конструирования, производства и применения летательных аппаратов.

Аэродинамическая труба, построенная Жуковским в ИМТУ в 1902 г. была одной из первых в Европе. Затем были построены другие аэродинамические трубы. В 1910–1911 гг. Жуковский установил два класса теоретических профилей крыла. Позже он разработал соответствующую математическую теорию и предложил четырехпараметрическое семейство профилей крыльев, названное его инициалами «обобщенными профилями НЕЖ». Жуковский заложил основы теории расчета подъемной силы крыла самолета, разработал метод для исследования и конструирования теоретических профилей рулей, создал вихревую теорию гребного винта, занимался исследованиями в области аэродинамики больших скоростей, исследовал вопросы прочности самолета.

Мировую известность Н.Е. Жуковскому принесли работы по теории гидравлического удара жидкости, текущей в трубах. Особенно популярна его работа 1899 г. «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах». Разработанные им методы решения задач фильтрации со свободной поверхностью успешно применяются и в настоящее время.

В 1905 г. он избран президентом Московского математического общества, постоянным членом которого был с 1876 г.

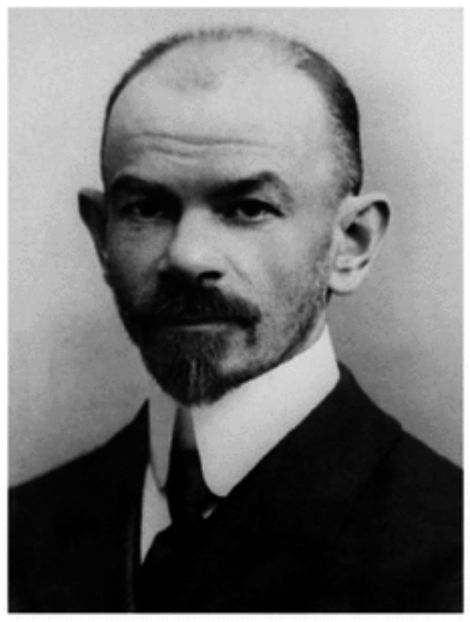
В 1916 г. Н.Е. Жуковский и В.П. Ветчинкин организовали при ИМТУ авиационное расчетно-испытательное бюро, основными задачами которого были разработка методов расчета самолетов, лабораторные и летные испытания существующих самолетов. После сделанного Н.Е. Жуковским доклада в 1918 г. на II Всероссийском авиационном съезде было принято решение о реорганизации бюро в высший автономный научный орган, обслуживающий нужды русской авиации.

В последние годы жизни Н.Е. Жуковский занимался вопросами организации и становления Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ), открытого 1 декабря 1918 г. Андрей Николаевич Туполев, ученик Жуковского, писал о своем учителе: «Мне хочется обратить внимание еще на одну черту Николая Егоровича: на его способность решать крупнейшие организационные вопросы. Он создал ЦАГИ, аэродинамическую лабораторию МВТУ, Военно-воздушную академию и ряд других организаций, и мне кажется, что это вытекало из натуры Николая Егоровича» [46].

Академик С.А. Чаплыгин сказал, что Н.Е. Жуковским, благодаря гигантскому диапазону его интересов, были созданы не школа, а школы. Впервые после Галилея Жуковскому удалось представить научные проблемы механики во всей их совокупности.

17 марта 1921 г. Н.Е. Жуковский скончался. Л.А. Люстерник рассказывал, что в день похорон с аэродрома на Ходынке студенты прикатили к МВТУ фюзеляж самолета, и гроб с телом Жуковского был поставлен на этот фюзеляж. Во время опускания гроба в могилу прогремел залп присутствовавшего на похоронах воинского подразделения. В 1921 г. это было очень редким событием [54]. Именем Жуковского названы город в Московской области, Центральный аэрогидродинамический институт, Военно-воздушная инженерная академия.

Д.Ф. Егоров



Егоров Дмитрий Федорович родился 10 декабря 1869 г. в Москве в семье директора Московского учительского института. После окончания Московского университета в 1891 г. был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Защитил магистерскую (1893) и докторскую (1901) диссертации. Всю жизнь преподавал в Московском университете, с 1893 г. – приват-доцент, с 1903 г. – профессор. Работал также в Московском институте инженеров путей сообщения. Первые математические исследования Егорова относятся к дифференциальной геометрии и связанным с ней вопросам теории уравнений в частных производных. Эти исследования, особенно по трижды ортогональным системам и введенным им, так называемым потенциальным поверхностям, являются значительным вкладом в науку.

В начале 1910-х годов Егоров был единственным российским математиком, имевшим широкое международное признание. С его деятельностью связывают развитие математики в Московском университете. Заслуга Егорова состоит в том, что он начал пропагандировать в университете теорию функций, теорию интегральных уравнений, современные методы вариационного исчисления. В 1910 г. Егоров организовал семинар по анализу, который сыграл важную роль в создании московской математической школы, объединил и направил работу целой плеяды молодых математиков во главе с Н.Н. Лузиным. В нем принимали участие С.П. Фиников, В.В. Голубев, В.В. Степанов, И.И. Привалов. Егоров умело руководил научной работой своих учеников: ставил перед ними актуальные задачи, разработка которых открывала широкие перспективы для дальнейших исследований.

В 1911 г. после студенческих беспорядков были уволены ректор и два проректора Московского университета. Отношение профессорско-преподавательского состава к этому событию было различным. Около 150 преподавателей, в числе которых были Млодзиевский, Власов, Чаплыгин, Жегалкин, Фиников, подали в отставку. Профессора Егоров, Андреев, Лахтин считали, что нельзя бросать университет на произвол судьбы, и остались.

Математическая эрудиция Егорова и читаемые им курсы привлекли многочисленных учеников. Приблизительно в 1910 г. Егоров заинтересовался теорией множеств и теорией функций. Поскольку измеримые функции обладают бóльшим количеством особенностей по сравнению с гладкими (непрерывными и дифференцируемыми) функциями математического анализа XIX и XX вв., эти особенности нужно было изучить. В 1911 г. Егоров, а вслед за ним Лузин, доказали две теоремы, которые проникли в суть нового понятия. Теорема Егорова о том, что всякая сходящаяся почти всюду последовательность измеримых функций сходится равномерно на замкнутом множестве, дополнение к которому имеет сколь угодно малую меру, в некоторой степени предопределила открытие Лузиным так называемого *C*-свойства: «Всякая измеримая функция непрерывна на множестве, дополнение к которому имеет

сколько угодно малую меру». Согласно теореме Лузина, все измеримые функции могут быть превращены в непрерывные, если только их значения изменить на множестве сколь угодно малой меры. Понятно, что это множество меняется от функции к функции, зависит от ее свойств. Теорема Лузина позволила вполне разобраться в строении измеримых функций и показала, что все измеримые функции с точки зрения меры являются, так сказать, «испорченными» непрерывными, но «испорченными» на множествах сколь угодно малой меры. Обе эти теоремы стали ценными орудиями исследования в руках последующего поколения московских математиков. За этими открытиями последовала цепь выдающихся результатов Лузина и его учеников по метрической теории функций, приведшая к созданию одной из самых значительных школ Московского университета – московской школы теории функций» [5].

Дмитрий Федорович Егоров очень любил музыку, был женат на дочери известного скрипача Гржимали. В 1971 г. в интервью П.С. Александров вспоминал: «…все мы испытывали на себе влияние не только Николая Николаевича Лузина, но и Дмитрия Федоровича Егорова, имевшего, кстати сказать, очень большой моральный авторитет. И он воспринимался все-таки как глава школы, несмотря на то, что в чисто математическом отношении, в таком вот в творческом, Лузин был на первом месте. Егоров превосходил его своей эрудицией, чрезвычайно большой, но, конечно, в смысле творческой продуктивности Лузин стоял выше» [54].

К Егорову студенты не решались подходить с вопросами. Лекции он читал необыкновенно аккуратно. При чтении курса теории дифференциальных уравнений с частными производными исписывал огромную доску сплошь формулами и завершал запись точно по звонку в правом нижнем углу доски. В отличие от Лузина, его стеснялись и немного побаивались.

Егоров после революции занимался исследованием дифференциальной геометрии и теорией интегральных уравнений. Ему принадлежат первые советские учебники по дифференциальной геометрии, теории чисел и вариационному исчислению. После смерти Н.Е. Жуковского в 1921 г. Егоров возглавил Московское математическое общество. В 1922 г. был организован Научно-исследовательский институт математики и механики при Московском университете, директором которого был также назначен Д.Ф. Егоров.

Усилиями Д.Ф. Егорова в 1924 г. возобновлено издание журнала Московского математического общества «Математический сборник», выходившего с 1866 г. Очередной 31-й том вышел в свет после восьмилетнего перерыва.

Как председатель Предметной комиссии по математике и директор Института математики и механики Московского университета, Д.Ф. Егоров в меру своих возможностей противодействовал проводившейся тогда большевиками политике очищения студенчества от лиц, имевших «плохое» (с точки зрения тогдашних идеологов) социальное происхождение. Только благодаря Егорову многие впоследствии знаменитые математики «сомнительного» происхождения (например, И.Г. Петровский, который был сыном купца) смогли окончить университет и стать учеными.

Разумеется, подобный человек в конце 1920-х годов уже не мог долго сохранить столь важное положение в Московском университете, где во второй половине 20-х годов XX в. порядки наводил ректор А.Я. Вышинский. По требованию «пролетарского студенчества» Егорова сместили с поста председателя Предметной комиссии по математике. Весной 1930 г. его уволили с поста директора Института математики и механики Московского университета.

В ноябре 1930 г. Дмитрий Федорович был арестован и сослан в Казань. Одной из причин ареста была его религиозность. Егоров был церковным старостой. Освободили Егорова в 1931 г. Через несколько месяцев, 10 сентября того же года, в Казани он скончался от рака.

Н.Н. Лузин

Лузин Николай Николаевич родился 9 декабря 1883 г. в Иркутске в семье торгового служащего. Его отец был наполовину русский, наполовину бурят, мать – русская [49]. По другим источникам, он родился в Томске и его мать, а не отец, была забайкальской буряткой [47].

У отца было мелкое торговое предприятие. Николай был единственным ребенком в семье. Желая дать мальчику хорошее образование, в начале 1890-х годов Лузины переехали в Томск. Его определили в Томскую губернскую гимназию. Николай не обладал механической памятью и отставал по математике. Студент-репетитор,
которого пригласил отец, обнаружил, что Николай плохо воспринимает готовые рецепты, но проявляет изобретательность и самостоятельность при решении трудных задач.

Из-за слабого здоровья Николая, имевшего хорошие отметки, переводили из класса в класс без экзаменов. Когда он окончил гимназию, отец ликвидировал свою торговлю, и семья переехала в Москву. В 1901 г. Николай поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Лузин мечтал стать инженером, а для этого решил предварительно получить хорошую математическую подготовку. Лузин был избран секретарем студенческого математического кружка, который вел профессор Н.Е. Жуковский. Профессор Д.Ф. Егоров во время экзамена обратил внимание на студента, отличавшегося оригинальностью ответов. Этим студентом был Лузин. Завязалось знакомство, сыгравшее решающую роль в судьбах обоих математиков. Егоров стал проводить с Лузиным отдельные занятия, задавал ему трудные задачи, приглашал к себе домой.

Во время обучения в университете Лузина интересовали вопросы, связанные с бесконечностью, в частности проблема континуума. В 1905 г. его занятия в университете временно прервались. Из-за участия в революционных событиях ему пришлось уехать в Париж. Во Франции он продолжил заниматься математикой, слушал лекции виднейших французских ученых, в том числе Бореля, Пуанкаре, Адамара и Дарбу. Вернувшись в Москву летом 1906 г., он окончил университет и стал готовиться к получению звания

профессора. В 1907 г. Лузин женился на Надежде Михайловне Малыгиной, дочери вдовы, у которой в 1905 г. он снимал квартиру на Арбате.

После окончания университета Егоров оставил Лузина при университете для подготовки к профессорскому званию – так тогда называли аспирантуру. В 1910 г. Лузин был послан в загранкомандировку для «усовершенствования в математических науках». Осенью 1910 г. он уехал в Гёттинген, и в 1911 г. там была опубликована его первая научная работа. В том же году Лузина зачислили на должность доцента кафедры чистой математики Московского университета. В 1912 г. он переехал в Париж, где до осени работал в семинаре Адамара и завел личное знакомство с Пикаром, Борелем, Лебегом, Данжуа и другими известными математиками.

В 1912 г. в журнале Академии наук Франции была опубликована статья Лузина, в которой доказана теорема, устанавливающая связь между измеримостью и непрерывностью функции действительного переменного на отрезке. Этот результат был получен Лузиным независимо от работ Егорова, однако в современном курсе анализа доказательство теоремы Лузина опирается на теорему Егорова. Так возникла московская школа теории функций Егорова – Лузина.

Еще одним успехом Лузина стало построение тригонометрического ряда (1912), коэффициенты которого монотонно убывают, но сам ряд почти всюду расходится. Результат, полученный Лузиным, противоречил предположению П. Фату (1906) и поразил математиков. В то же время Лузин занимается вопросами поведения степенных рядов на границе круга сходимости. Ему удалось построить степенной ряд, коэффициенты которого стремятся к нулю и который расходится во всех точках окружности своего круга сходимости. Таким образом, Лузин положил начало исследованиям по теории граничных свойств аналитических функций. Одновременно он изучал вопрос о том, можно ли представить любую периодическую функцию, даже имеющую бесконечно много точек разрыва, в виде суммы тригонометрического ряда.

Осенью 1912 г. Лузин вернулся в Москву и стал хлопотать о продлении командировки. В марте следующего года он уехал в Париж для продолжения научной деятельности. К проведению занятий в Московском университете он приступил осенью 1914 г.

После лекций Лузин приглашал лучших студентов в профессорский кабинет для беседы. Он ставил перед ними новые задачи. Получивших хорошие результаты приглашал к себе на квартиру для более подробного разговора. Кроме спецкурса лекций, Лузин организовал семинар по теории функций действительного переменного. В отличие от официального семинара Егорова, этот семинар носил неофициальный характер и посещать его могли не все студенты.

В 1915 г., обобщив результаты своих научных исследований, Лузин написал магистерскую диссертацию на тему «Интеграл и тригонометрический ряд». Особенностью этой работы является то, что, наряду с конкретными результатами, она содержит в каждом разделе новые подходы к решению классических задач. В отличие от диссертационных работ петербургской

математической школы, она содержала мало математических формул и много рассуждений, в которых встречались словосочетания «мне кажется», «я уверен». По этой причине многие петроградские математики, в том числе и академик В.А. Стеклов, не смогли оценить эту работу по достоинству. Несмотря на кажущиеся недостатки работа стала особенно полезной для дальнейшего развития теории тригонометрических рядов. Профессор Д.Ф. Егоров оценил значение диссертации Лузина и представил ее на Ученом совете Московского университета. 27 апреля 1916 г. состоялась защита, причем диссертанту была единогласно присвоена ученая степень не магистра, а доктора наук. Диссертация длительное время служила источником новых научных проблем.

Лузин был блестящим лектором: умел увлечь молодежь, зажечь идеей и привить веру в собственные силы. Неудивительно, что новое поколение было поглощено его лекциями. У Лузина было редкое чувство аудитории. А.П. Юшкевич, слушавший лекции Лузина позже, вспоминал: «Он производил впечатление человека, который у вас на глазах создает науку… Он рассказывал, он задумывался, он припоминал, по-видимому, а может, он делал вид, что он припоминал, но нам казалось, что он тут же творит математику на наших глазах» [54]. Стиль преподавания Лузина стирал границу между процессом обучения и научным исследованием. Он умел внушать ученикам мысль о том, что они могут и должны сами творить науку.

В 1916/17 учебном году Лузин читал спецкурс теоретико-множественной топологии, которой ранее не занимался. В основе спецкурса лежал мемуар (большая журнальная статья) польского математика Янишевского. В этой работе все было изложено сжато. Лузин после прочтения формулировки теоремы из мемуара начинал ее доказывать на доске. Иногда он в шутку спрашивал у студентов: «Как же дальше это доказывается?» Из аудитории сыпались советы, обычно для Лузина бесполезные, но студенты чувствовали себя соавторами этого процесса.

Однажды на трех лекциях подряд Лузин пытался безуспешно доказать одну теорему. Когда все слушатели приготовились к логическому завершению, он признался в ошибке и привел пример, доказывающий неверность теоремы. Лузин был чрезвычайно прост в общении, к нему можно было всегда обратиться за советом.

В первые годы советской власти университет плохо отапливался, поэтому в аудиториях было очень холодно. На студентов, сидящих в полушубках, большое впечатление производило то, что Лузин, входя в аудиторию, снимал с себя даже перчатки и читал лекцию в сюртуке. Это сразу располагало к нему аудиторию.

Главный интерес для Лузина в определенный момент представляла дескриптивная теория функций, изучающая структуры различных сложных точечных множеств, образуемых специальными способами из замкнутых множеств.

В 1917 г. Лузин становится профессором Московского университета. С этого момента быстро начинает развиваться научная школа под его руководством. Своих учеников Лузин с самого начала приучал мыслить творчески, самостоятельно, а также искать дополнительные, нестандартные пути решения, расчленять проблемы и ставить новые. Методы научной работы

школы революционно отличались от тех, которые использовались прежде. Лузин развивал математическую интуицию своих учеников, обучал их техническим приемам математического исследования.

По мнению Люстерника, Лузин был ярким, очень своеобразным и эмоциональным человеком, повышенной возбудимости, с большим потенциалом. Но в тех трудных, послереволюционных условиях собрать такой коллектив молодежи не могли более спокойные люди. Лузин был героем именно трудного времени. Когда жизнь стала налаживаться, его влияние уменьшилось. Противоречивость и сложность характера Лузина рождали в окружающих эмоции от восхищения до отрицания [54].

Сам Лузин в середине 1920-х годов написал ряд работ по дескриптивной теории множеств. Весной 1927 г. он сделал один из основных докладов на Всероссийском съезде математиков в Москве на тему «О современных задачах теории функций действительного переменного», а осенью участвовал в работе съезда польских математиков во Львове.

В 1927 г. Лузина избрали членом-корреспондентом АН СССР. В августе 1928 г. состоялся Международный математический съезд в Болонье, на котором Н.Н. Лузин прочел доклад «О путях теории множеств». До лета 1930 г. он в Париже работал над книгой по теории множеств, изданной на французском языке, в которой подытожил результаты своих учеников по теории множеств и личные достижения. В 1929 г. Лузин становится действительным членом АН СССР сначала по кафедре философии, а затем по кафедре математики. Одновременно Д.Ф. Егорова избрали почетным академиком. Это ухудшило их отношения, так как в академических кругах издавна ходило анекдотическое выражение, что академик отличается от почетного члена академии так же, как «государь» от «милостивого государя». Лузина избрали также иностранным членом Польской АН (1928), почетным членом математических обществ в Польше, Индии, Бельгии, Франции, Италии.

Вернувшийся из парижской командировки Лузин после ареста Егорова добровольно вышел из Московского математического общества, ушел из Московского университета и начал работать в Математическом институте им. В.А. Стеклова, где возглавил отдел теории функций. Это требовало частых поездок в Ленинград. Отделом теории функций Лузин руководил даже после перевода института в Москву и разделения в 1934 г. на Физический и Математический. Политическое доверие к Лузину было поколеблено. Ему и Н.М. Крылову запретили участвовать в работе Международного математического конгресса 1932 г. в Цюрихе.

В 1933 г. вышла монография Лузина «Современное состояние теории функций действительного переменного». В 1935 г. Лузин вернулся на физико-математический факультет МГУ, но проработал там только до лета 1936 г. – пока не начались преследования.

Случившееся оказало большое влияние на Лузина. Б.Н. Делоне, знавший Николая Николаевича не во времена расцвета «Лузитании», а только с 1930-х годов, в интервью в 1973 г. вспоминал, что Лузин «имел странный характер: он подлизывался даже к своей домработнице, даже к своей кошке, и в особенности подлизывался к любому заграничному ученому» [54].

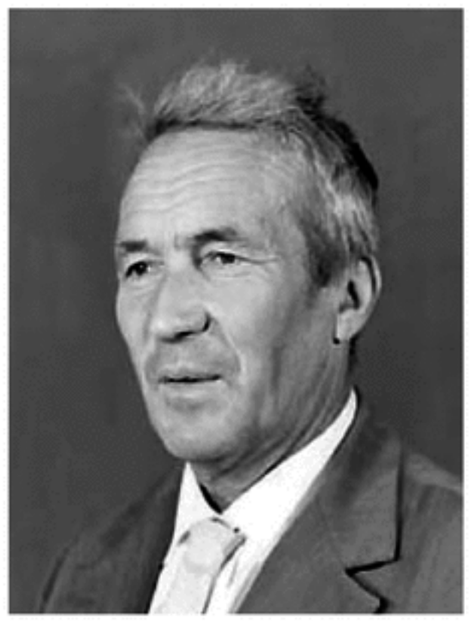
Несмотря на пережитое потрясение, Лузин нашел в себе силы продолжить научную деятельность. Он перешел работать в Институт автоматики и телемеханики. Кроме теоретических проблем дескриптивной теории множеств, Лузин стал много заниматься прикладными вопросами теории дифференциальных уравнений. В 1938 г. он начал работать в области дифференциальной геометрии, где получил интересные результаты в решении так называемых задач изгибания на главном основании.

Много внимания уделял Лузин написанию и редактированию учебников для вузов. Семнадцать изданий выдержал переработанный им учебник Грэнвиля по дифференциальному и интегральному исчислению.

В 1941 г. у Лузина было обнаружено тяжелое сердечное заболевание. Участились сердечные приступы, от одного из которых он и скончался в Москве 28 февраля 1950 г. На заседании секции математики Московского Дома ученых, посвященном 100-летию со дня рождения Лузина, академик Б.В. Гнеденко отметил, что, помимо большого математического таланта, Николай Николаевич обладал умением вдохновить молодежь на подвиги во имя науки. Лузин известен не только благодаря научным результатам, но, что гораздо важнее, и благодаря своим ученикам, многочисленным математикам с мировыми именами, которые внесли огромный вклад в самые различные области науки. Всю жизнь Лузин был центром, притягивающим молодежь, которая питалась его идеями, развивала и углубляла эти идеи [83].

Лузин является одним из крупнейших русских математиков первой половины XX в. Он не только сам получил много важнейших результатов в теории функций действительного переменного и в других разделах математики, но создал и внедрил методику поиска математических талантов, которая вывела российскую математику на передовые позиции в мире и которая успешно работает в настоящее время.

А.Н. Колмогоров



Колмогоров Андрей Николаевич родился 12 апреля 1903 г. в Тамбове. Мать, Мария Яковлевна Колмогорова, младшая из шести дочерей угличского предводителя дворянства, умерла при рождении сына. Мальчика воспитывали сестры матери, одна из которых, Вера Яковлевна, его усыновила. Отец, Николай Матвеевич Катаев, был агрономом, сыном священника. Он фактически не участвовал в воспитании сына. Раннее детство Колмогорова прошло в усадьбе родителей матери в селе Туношне, под Ярославлем. После переезда в Москву в возрасте семи лет Андрей поступил в частную гимназию. Опережая школьную программу, высшую математику он изучил по статьям в Энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона.

В первые послереволюционные годы Колмогорову самому пришлось добывать средства к существованию. В 1919–1920 гг. он работал на строительстве железной дороги Казань – Екатеринбург. В 1920 г. он получил атте-

стат об окончании школы, сдав экзамены экстерном, и одновременно поступил на физико-математическое отделение Московского университета и на металлургический факультет химико-технологического института. Сдав в течение нескольких месяцев экзамены за первый курс университета, Колмогоров, уже в качестве студента второго курса, получил право на 16 кг хлеба и 1 кг масла в месяц, что означало полное материальное благополучие.

С ноября 1920 г. по январь 1922 г. Колмогоров изучал историю Новгорода. По оценке специалистов, эти исследования опередили не только историческую науку 1920-х годов, но и превосходят труды многих современных историков.

На первом курсе университета Колмогоров слушал лекции Лузина по теории функций комплексного переменного. Однажды ему удалось опровергнуть некоторое утверждение, опираясь на которое Лузин решил выстроить прямо во время лекции свое доказательство интегральной теоремы Коши. Колмогоров сразу стал известен в «Лузитании» и в следующем учебном году посещал лекции Лузина и Александрова на правах «своего», получив при этом 16-й номер в иерархии «лузитанцев».

С 1921 г. в рамках семинара Лузина Колмогоров начинает заниматься тригонометрическими рядами, в группе Степанова. Первый полученный им самостоятельный результат – решение поставленной Лузиным задачи о выяснении того, насколько медленно могут убывать коэффициенты ряда Фурье. После этого Лузин торжественно присвоил Колмогорову звание своего ученика и начал заниматься с ним индивидуально. В 1921 г. Колмогоров написал большую работу по дескриптивной теории множеств. Эту работу Лузин не оценил и первая ее часть была напечатана только в 1928 г., а вторая – в 1987 г. Летом 1922 г. 19-летний студент второго курса физико-математического факультета Московского университета Андрей Колмогоров получил выдающийся результат: построил пример интегрируемой по Лебегу функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду.

Впечатление, которое произвела эта работа на математиков, хорошо передают слова Мориса Фреше, сказанные в 1965 г. В.И. Арнольду: «О, Колмогоров! Это тот замечательный молодой человек, который построил почти всюду расходящийся ряд Фурье!» [60]. Этот результат заложил основы нового направления в теории тригонометрических рядов. После примера Колмогорова более сорока лет оставалось неизвестным, существует ли непрерывная функция с тем же свойством. Только в 1966 г. шведский математик Леннарт Карлесон показал, что пример Колмогорова нельзя усилить.

Всего же Колмогоровым опубликовано около 10 работ по тригонометрическим и ортогональным рядам, каждая из которых оказалась началом больших исследований, проводимых в дальнейшем другими математиками.

Параллельно с обучением в университете Колмогоров в течение трех лет, чтобы справиться с материальными трудностями, работал учителем математики и физики в средней школе. Но это не привело к уменьшению интенсивности его математических раздумий. Фундаментальность работ Колмогорова-студента поражает. В 1925 г. он завершил обучение в университете, тогда же вышли его первые публикации по математической логике

и теории меры и интеграла, получившие широкую известность в математическом мире.

Сразу после окончания университета Колмогоров поступает в аспирантуру, и его научным руководителем становится Лузин. В годы аспирантуры он получает выдающиеся результаты в теории функций, теории множеств и математической логике, начинает свои исследования в теории вероятностей, которую он сам считал своей основной научной специальностью.

По вопросам, связанным с теорией вероятностей, Колмогоров тесно контактирует с А.Я. Хинчиным. В отличие от других ученых, занимавшихся теорией вероятностей, они применяли методы, используемые в метрической теории функций. Их первая совместная статья «О сходимости рядов, члены которых определяются случаем», была опубликована в 1924 г. Уже в 1926 г. аспирант Колмогоров находит необходимые и достаточные условия, при которых имеет место закон больших чисел. Эти условия в течение многих десятилетий безуспешно искали крупнейшие математики многих стран. В 1927 г. при доказательстве закона повторного логарифма он создает новый метод исследования в теории вероятностей, где им вообще сделано исключительно много.

В июне 1929 г. во время совместного путешествия по Волге и Кавказу началась дружба Колмогорова с П.С. Александровым. Вместе они ходили в походы, отдыхали летом, а в 1935 г. приобрели у наследников Станиславского дом в деревне Комаровка недалеко от станции Болшево. На долгое время Комаровка стала «филиалом» механико-математического факультета. Там писали книги, туда приезжали ученики Колмогорова и Александрова, там бывали Ж. Адамар, М.Р. Фреше, С. Банах, Х. Хопф, К. Куратовский и другие. Академики и их ученики совмещали отдых в деревне с физической культурой: совершали лыжные прогулки и заплывы в ледяной воде.

Осенью 1929 г. Колмогоров стал научным сотрудником Института математики и механики при Московском университете. Параллельно в 1929–1931 гг. он работал заведующим кафедрой в Индустриально-педагогическом институте им. К. Либкнехта. В начале 1930-х годов он развивает теорию марковских процессов, которую ранее исследовали А. Эйнштейн, М. Планк, М. Смолуховский и Н. Винер, а затем создает аксиоматику теории вероятностей.

Теория случайных процессов стала центральным направлением развития теории вероятностей. Если Хинчин исследовал в основном стационарные случайные процессы, то Колмогоров разрабатывал теорию марковских случайных процессов, описывающих явления диффузии и броуновского движения. За рубежом решением этих вопросов занимался Норберт Винер, будущий «отец кибернетики». Винер отмечал, что в течение 20 лет он и Колмогоров занимались исследованиями в одной и той же области и постоянно наступали друг другу на пятки.

В 1931 г. Колмогоров избран профессором Московского университета, а в 1933 г. назначен директором Института механики и математики при Московском университете. Им была произведена реформа подготовки аспирантов. Новая система в несколько видоизмененной форме сохранилась до сих пор.

Имя Колмогорова обычно связывают с созданием аксиоматики теории вероятностей. Только после выхода в свет (в 1933 г. – на немецком языке, в 1936 г. – на русском) его монографии «Основные понятия теории вероятностей» стало возможным говорить о теории вероятностей как о математической науке в современном понимании, т. е. основанной на системе аксиом. Теперь теория вероятностей, занимающая видное положение как наука о реальных стохастических (вероятностных) связях между явлениями, в рамках абстрактной математики воспринимается как частная глава теории меры или теории булевских алгебр.

Когда в 1930-х годах начались преследования генетики, Колмогоров применил к обработке статистических данных, которые считали опровергающими законы Менделя, разработанный им и представленный в статье «Об эмпирическом определении закона распределения» (1933) аппарат математической статистики. Колмогоров пришел к выводу, что опубликованные статистические данные являются блестящим новым подтверждением законов Менделя. Публикация подобного материала в те годы требовала от автора большой смелости. Сейчас в математической статистике этот метод общепризнан и называется критерием Колмогорова.

Вопросами топологии Колмогоров занимался в 1932 и 1936 гг. Он считал, что его топологические работы не оценены по достоинству потому, что в их основе лежат не комбинаторные принципы, а физические понятия, взятые из гидродинамики и электромагнитной теории.

В 1939 г. Колмогоров был избран действительным членом Академии наук СССР. За труды по теории вероятностей, опубликованные в 1936 и 1938 гг., ему в 1941 г. присуждена Государственная премия. Он всегда любил трудные задачи. Так, внимание Колмогорова привлекла турбулентность – явление, наблюдаемое при течении жидкостей и газов, часто встречающееся и в природе, и в технических устройствах. Его основные работы по теории турбулентности, опубликованные в начале 1941 г., имели физический характер. В их основе лежит глубокое проникновение в самую суть сложных нелинейных процессов, подлинная физическая интуиция. Надо сказать, что над теорией турбулентного движения ученые работают и в настоящее время.

В начале Великой Отечественной войны Колмогоров записался в дивизию народного ополчения, но на фронт его не взяли, а предложили работать на оборону в тылу. Вместе с Математическим институтом им. В.А. Стеклова семья Колмогоровых – Александровых была эвакуирована в Казань. Андрей Николаевич стал заниматься исследованиями в теории стрельбы. Вскоре им был предложен метод искусственного рассеивания для увеличения вероятности попадания торпед в корабли противника [54].

Много времени у Колмогорова занимала организационная работа. С 1954 по 1956 г. и с 1978 до 1987 г. он был заведующим Отделением математики механико-математического факультета Московского университета, с 1954 по 1958 г. – деканом этого факультета, с 1938 по 1946 г. и с 1948 по 1960 г. – заведующим отделом теории вероятностей Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, а с 1983 г. – заведующим отделом математической статистики и теории информации этого института.

В научном плане необычайно плодотворным для Колмогорова был возраст 50–60 лет, когда почти во всех разделах математики были опубликованы его основополагающие работы.

А.Н. Колмогоров и его ученики И.М. Гельфанд и А.М. Яглом заложили фундамент теории информации. Их работы определили высокий стандарт уровня математической строгости, которого с тех пор неизменно придерживаются математики и инженеры, занимающиеся теорией информации. Фактически было открыто новое направление в теории информации. С появлением в 1965 г. статьи А.Н. Колмогорова «Три подхода к определению понятия количества информации» родилась алгоритмическая теория информации, в основе которой лежало понятие колмогоровской сложности конечного объекта. Продолжая исследования, Колмогоров приходит к выводу, что теория информации должна предшествовать теории вероятностей, а не опираться на нее. Строгое построение теории вероятностей на базе теории информации – дело будущего.

По мнению Колмогорова, во всяком крупном открытии имеются элементы неожиданности. В 1950-х годах он обнаружил неожиданные связи теории информации с теорией приближений и теорией динамических систем. В его работах по теории приближений были использованы идеи комбинаторного направления теории информации. Такой подход позволил выработать общий взгляд на проблему составления таблиц значений функций. Эти исследования привлекли внимание Колмогорова к 13-й проблеме Гильберта. Решением этой проблемы занялся его ученик В.И. Арнольд. В выполненном цикле работ 1956–1957 гг. Колмогоров и Арнольд доказали ошибочность гипотезы Гильберта для важного случая.

Колмогоров занимался также знаменитой «задачей трех тел», которая в общем виде не решена до сих пор. Работы Колмогорова и Арнольда по этим вопросам были отмечены Ленинской премией в 1965 г.

Ученик Колмогорова В.А. Успенский так писал о талантах своего учителя: «Широта научных интересов Колмогорова имеет мало прецедентов в XX в. – если вообще есть таковые. Спектр его интересов простирается от метеорологии (Колмогоров был почетным членом Американского метеорологического общества) до теории стиха… К какой бы области знаний ни прикоснулся Колмогоров, она, эта область, после его прикосновения получает новый импульс развития и уже не может изучаться без учета колмогоровского вклада в нее» [44]. Фактически каждая работа Андрея Николаевича в каждой области научного знания произвела полную переоценку ценностей.

Однако лекции Колмогорова было трудно воспринимать. Б.В. Гнеденко рассказывал о распространенной среди студентов и аспирантов шутке, что в изложении Колмогорова трудно понять даже теорему Пифагора. На первую лекцию по математической статистике пришли 80–100 студентов, аспирантов и профессоров, на вторую – около 20 человек, на третью – 3 человека [54]. По воспоминаниям А.П. Юшкевича, Колмогорова отличали такая высота полета и скорость мысли, что иногда он не чувствовал, что аудитория не успевает уследить за его рассуждениями.

В 1960 г. Колмогоров организовал при кафедре теории вероятностей Московского университета статистическую лабораторию. Одним из направлений исследования стало применение математических методов в языкознании. При статистической лаборатории Колмогоров организовал семинар. Его участниками стали математики, филологи, литературоведы. На семинаре изучали русскую поэзию. Решено было «поверить алгеброй гармонию». Не эмоции, а факты, не субъективная оценка, а объективный анализ поэтических произведений – такую задачу ставила перед собой группа Колмогорова. Исходная позиция состояла в том, что в произведениях поэзии имеются количественные закономерности, которые могут быть восприняты и в отрыве от содержания. Математический аппарат для изучения этих закономерностей включал в себя теорию вероятностей, математическую статистику, теорию информации.

Колмогоров принадлежал к необычайно редкому типу математиков. Он был ученым «взрывного» типа. Ему удавалось аккумулировать на достаточно короткий срок неслыханную интеллектуальную энергию, которая, разряжаясь, крушила великие проблемы или приводила к прорыву в развитии разделов математики и естествознания. Такой период длился недолго – неделю, две, не больше. А потом Колмогоров обычно оставлял эту тему, предоставляя развивать ее ученикам и последователям [74].

Работы Колмогорова богаты глубокими идеями, оказавшими влияние на дальнейшее развитие науки. Разработанные им методы сыграли важную роль в решении самых разнообразных прикладных задач. Исследования прикладного характера Колмогорова относились к математической геологии, теории стрельбы, гидро- и аэромеханике, генетике, физике, биологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии.

В Московском университете Андрей Николаевич не только читал курсы лекций и вел семинары, но и был учредителем новых дисциплин учебного плана, которые сам наполнял содержанием. Много времени Колмогоров уделял преподаванию в физико-математической школе-интернате при МГУ, которая с 1989 г. носит его имя. Колмогоров является организатором и первым главным редактором журнала «Теория вероятностей и ее применения». На механико-математическом факультете Московского университета он создал и первым возглавил кафедру теории вероятностей в декабре 1935 г. и кафедру математической статистики в феврале 1976 г.

Колмогоров имел высокие понятия об этике ученого и всегда следовал им. Его отличали предельная научная честность и объективность, скромность, отзывчивость и щедрость.

В 1969 и 1971 гг. Колмогоров в качестве научного руководителя принимал участие в длительных океанографических плаваниях на научно-исследовательском судне «Дмитрий Менделеев», последнее из которых было кругосветным.

Трудно перечислить все иностранные академии, членом которых являлся Колмогоров. Он был награжден семью орденами Ленина и другими орденами и медалями. В 1963 г. получил звание Героя Социалистического Труда, в 1965 г. стал лауреатом Ленинской премии.

В последние 20 лет жизни Андрей Николаевич принимал активное участие в разработке вопросов преподавания математики в школе и в написании многих школьных учебников. Его выступления перед одаренными школьниками на олимпиадах и в математических кружках способствовали раскрытию новых математических талантов. Однако проводимая Министерством просвещения СССР в 1965–1980 гг. под научным руководством А.Н. Колмогорова насильственная перестройка школьного математического образования на абстрактной «бурбакистской» основе способствовала снижению интереса школьников к математике и нанесла значительный ущерб их подготовке. За этот эксперимент А.Н. Колмогорова подвергли резкой критике Л.С. Понтрягин и А.Д. Александров.

В конце 1970-х годов Колмогорова поразил страшный недуг – паркинсонизм. Болезнь постепенно сковывала движения и вскоре привела к большой затрудненности речи [62].

Умер Андрей Николаевич Колмогоров 20 октября 1987 г. в Москве.

«Лузитания»

Д.Ф. Егоров знал, что Лузин после загранкомандировки приступит к занятиям в Московском университете осенью 1914 г., поэтому решил подготовить студентов к грамотному усвоению новых идей Лузина в области теории функций. Весной 1914 г. Егоров на семинаре, который он проводил регулярно, познакомил студентов с новыми на то время метрической теорией функций и интегралом Лебега. Таким образом, участники семинара были готовы к изучению специального курса, который предстояло читать Николаю Николаевичу.

Члены семинара составляли одну группу и собирались по средам (позже по четвергам) в квартире Лузина на Арбате. Продолжительность занятий не была регламентирована, поэтому иногда они заканчивались далеко за полночь.

На семинаре обсуждались не только математические вопросы. Лузин хорошо знал литературу, обладал чувством юмора и широким кругозором, был очень интересным собеседником, а вот музыку не любил и плохо в ней разбирался. Личность Лузина определял не только математический талант. Он был глубоко верующим человеком, занимался философией и психологией. Павел Флоренский, обсуждая с ним многие вопросы религии и философии, высоко ценил его мнение. Лауреат Нобелевской премии физиолог И.П. Павлов склонялся к лузинской трактовке деятельности подсознания.

В 1915/16 учебном году сформировалась группа специалистов по теории функций, состоявшая из одаренных студентов А.Я. Хинчина, Д.Е. Меньшова, П.С. Александрова, М.Я. Суслина, а также учеников Д.Ф. Егорова доцентов И.И. Привалова и В.В. Степанова. К ним примкнул оказавшийся в 1915 г. в Москве польский математик Вацлав Серпиньский. Он имел немецкое подданство, но шла Мировая война, и его эвакуировали в Москву как военнопленного. Усилиями Егорова и Лузина Серпиньскому было предоставлено свободное проживание в Москве и созданы условия для работы. Серпинь-

ский активно помогал Лузину в формировании московской математической школы, после войны вернулся в Варшаву, где создал научную школу.

В 1916 г. к членам семинара присоединился Урысон. Каждому участнику семинара предлагалось написать реферат, посвященный определенной монографии. Затем все рефераты подвергались обсуждению, по ходу которого ставили вопросы и выдвигали новые задачи, определялись новые понятия, выявлялись возможности упрощения и обобщения доказательств.

В круг интересов Лузина входили темы, обсуждаемые на семинаре: теория интеграла, сходимость тригонометрических рядов, строение борелевских множеств. Этим темам посвящены и первые самостоятельные работы участников семинара, которые в значительной степени определили их дальнейшие интересы.

Меньшов и Хинчин интересовались той частью теории функций, которая опирается на понятие меры множества, а Александров и Суслин – другой ее частью, обходящейся без этого понятия. Первая носит название метрической теории функций, а вторая – дескриптивной.

Многие участники семинара достигли высоких научных результатов, будучи еще студентами. Меньшов сумел построить пример тригонометрического ряда, сумма которого всюду, за исключением множества меры нуль, равна нулю, хотя не все коэффициенты ряда равны нулю. Хинчин написал интересную работу о теории интеграла. Александров при решении проблемы о мощности борелевских множеств показал, что эти множества получаются из замкнутых множеств одной, построенной им операцией. Исследуя эту операцию, Михаил Суслин выяснил, что класс множеств, получаемых ею, значительно шире. Операцию, введенную Александровым, он назвал А-операцией, а определяемый ею класс множеств – А-множествами. Он нашел ошибку у Лебега, что позволило открыть новый класс множеств, позже названных суслинскими. Этот результат Суслина явился предметом дальнейших исследований Лузина и ряда советских, а также иностранных ученых, главным образом польских.

В начале 1916 г. почти одновременно в докладах Парижской академии наук были напечатаны студенческие работы Хинчина, Меньшова, Александрова. В следующем году последовала замечательная работа Суслина. Каждая из перечисленных работ была творением зрелого ученого.

Начавшаяся Гражданская война на время приостановила деятельность семинара. Тяжелые условия жизни в Москве и нехватка кадров в провинции привели к тому, что многие ученые уехали из Москвы. Лузин в 1918 г. с частью своих учеников следует в Иваново-Вознесенск, чтобы преподавать в политехническом институте, эвакуированном туда из Риги по инициативе М.В. Фрунзе.

В 1922–1923 гг. почти все уехавшие из Москвы ученые вернулись. В это время коллектив, состоящий из учеников Лузина, получает неофициальное название «Лузитания», а члены коллектива именовали себя «лузитанцами». Вообще Лузитания – это древнеримская провинция на территории современной Португалии. Так же назывался английский пароход, потопленный немецкой подводной лодкой в 1915 г.

Семинар Лузина расширялся. Он состоял из нескольких секций, которые курировали математики старшего поколения. Член-корреспондент АН СССР Л.А. Люстерник, «лузитанец» с 1921 г., вспоминал в 1960 г. о «Лузитании» в стихах:

…Примкнул с доверием бездумным
Я к группе молодой и шумной.
Презрев классический анализ,
Здесь современным увлекались.
Пусть твой багаж не очень грузен,
Вперед! В себе уверен будь!
Великий бог – профессор Лузин
Укажет нам в науке путь!
А божество уж окружало
Созвездие полубогов:
Иван Иванович Привалов,
Димитр Евгеньевич Меньшов,
И Александров, остро взвинченный,
И милый Павел Урысон,
И философствующий Хинчин,
И несколько других персон.
Дни легендарной «Лузитании» –
Дни увлечений и исканий.
Мы в Лузина все влюблены,
Его ревнуем мы друг к другу.
Блеснуть хоть маленькой должны
Математической заслугой.
Я вспоминаю – каждый раз
Волнение тебя охватит,
Когда придешь в урочный час
В его квартиру на Арбате…

А.Н. Колмогоров так характеризует стиль работы Лузина: «Существенным в этом подходе было вполне индивидуальное личное руководство, а также умение придавать избранной тематике особую значимость. Н.Н. Лузин настойчиво внедрял следующий метод работы (он сам работал таким образом и приучал к этому своих учеников): берясь за какую-либо проблему, надлежит смотреть на нее с различных точек зрения. Надо пытаться доказывать проблему и одновременно опровергать ее. Если доказательство не выходит, надо переходить к опровержению гипотезы, к построению противоречащего примера. Если не получается построение, надо снова вернуться к доказательству. И пока не получится результат, нельзя покидать данную область. В теории функций действительного переменного такая установка двойного видения (поиск доказательства – поиск опровержения), такой подход к делу естественно привел к культивированию чрезвычайно высокой техники построения примеров (или, как теперь принято говорить, контр-примеров). В этом направлении школа Н.Н. Лузина 1920-х годов была им поставлена на уровень, превосходящий все другие научные центры мира» [60].

Расцвет «Лузитании» приходится на 1922–1926 гг. Представителями старшего поколения (30–35 лет) школы были: И.И. Привалов, В.В. Степанов, П.С. Александров, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, С.С. Ковнер, П.С. Урысон, В.Н. Вениаминов; младшего и среднего поколений (20–25 лет) – Н.К. Бари, Ю.А. Рожанская, Л.В. Келдыш, Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, М.А. Лаврентьев, П.С. Новиков, В.В. Немыцкий, А.Н. Колмогоров, Е.А. Селивановский, В.И. Гливенко.

Из-за разрухи в стране практически нереально было печатать научные работы, но с 1922 г., появилась возможность публикации в зарубежных журналах. Это привело к необходимости писать статьи на иностранных языках. Меньшов, Колмогоров, Лаврентьев, Бари писали работы на французском языке, Хинчин – на немецком. Печатались работы и в польском математическом журнале.

Со временем ученым «Лузитании» становилось тесно. Тематика научных интересов Лузина, при разработке которой он научил своих воспитанников работать самостоятельно, была важной и интересной, но ограниченной. Сравнительно доступные задачи были решены, остались те, над которыми безуспешно работали много лет. В 1924–1928 гг. в «Лузитании» начался процесс расширения области научных интересов, который впоследствии привел к ее распаду. Люстерник об этом писал:

А дальше все как будто просто –
Процесс естественного роста.
Тематика все расширялась,
Своей дорогой каждый шел,
И школа Лузина распалась
На ряд блестящих новых школ.
Но был мучительно тяжелым
Процесс распада этой школы…
Напор эмоций (в плане личном),
Пересыщение обычным,
Желанье самому быть первым
Иль расшалившиеся нервы –
Да мало ль что! Но кто куда, –
Птенцы уходят из гнезда.
А это Лузин, хоть скрывал,
Болезненно переживал.

Представители старшего поколения «лузитанцев» стали создавать свои научные школы. Навыки работы, полученные при общении с Лузиным, помогали им быстро добиваться хороших результатов по новой тематике.

Началом становления топологической школы математиков стал кружок, которым руководили П.С. Урысон и П.С. Александров. В этом кружке работали как прямые ученики Лузина, так и его «научные внуки» (А.Н. Тихонов, В.В. Немыцкий, Л.А. Тумаркин и другие). Применением теоретико-функциональных методов к теории чисел, а затем и к теории вероятностей, стал заниматься А.Я. Хинчин. Метрические понятия перенес в теорию чисел Л.Г. Шнирельман. Как в совместной работе с Лузиным, так и независимо

от него серьезных результатов в исследованиях по граничным свойствам теории аналитических функций добился И.И. Привалов. Несколько позже М.А. Лаврентьев со своими учениками образовал школу теории аналитических функций. Фундаментальные результаты в теории ортогональных систем и в теории функций комплексного переменного были получены Д.Е. Меньшовым. Краевыми задачами уравнений в частных производных занималась группа Л.А. Люстерника, а затем И.Г. Петровского.

«Лузитания» прекратила свое существование. С Лузиным остались только наиболее преданные ученики – Д.Е. Меньшов и Н.К. Бари. Кроме трагедии покинутого учителя, с Лузиным случилась еще одна неприятность. В 1936 г. его обвинили в низкопоклонстве перед иностранцами, в идеологических ошибках, в фарисействе как педагога. Началась борьба с «лузинщиной». Он с трудом удержался в составе Академии наук. Подробнее об этом рассказано ниже.

Внедрение диалектики в математику

На развитие математики в России после 1917 г. влияли многие факторы, на первый взгляд, не имеющие к этой науке непосредственного отношения. Это отражалось на содержании математических исследований, но в значительно большей степени – на микроклимате в коллективах математиков.

Весьма критическая оценка реформ высшей школы России, предпринимавшихся в 1920–1921 гг., была дана в письме 38 крупнейших ученых страны – академиков и профессоров. Отправлено письмо было летом 1921 г. председателю Совнаркома В.И. Ленину. В начале 1920-х годов группа математиков во главе с деканом физико-математического факультета МГУ В.В. Стратоновым была выслана из страны.

В 1918 г. была организована Социалистическая академия общественных наук, которая в 1919 г. переименована в Социалистическую академию, а в 1924 г. – в Коммунистическую академию. Это было учебное и научно-исследовательское учреждение, в состав которого входило несколько институтов. При академии была создана Ассоциация естествознания, возглавляемая О.Ю. Шмидтом. При Ассоциации создан семинар по методологии философии математики под руководством А.Я. Хинчина. Одним из важных направлений работы семинара была выработка позиции марксистов по отношению к вопросу обоснования математики.

В 1920-х годах философские вопросы математики обсуждались на фоне ожесточенной схватки «диалектиков» и «механистов». Отношение математиков к этой дискуссии было неоднозначным. Некоторые дискуссию игнорировали, остальные – активно обсуждали вопрос о соотношении диалектического и математического методов.

На Всероссийском съезде математиков в апреле–мае 1927 г. в докладе С.Н. Бернштейна «Современное состояние теории вероятностей» была высказана непочтительность к материалистической диалектике.

В 1928 г. после роспуска в Ленинграде зиновьевской группировки начались чистки, в результате которых Ленинградское математическое общество практически распалось.

В 1929 г., после разгрома всех оппозиционных течений в стране, политическому курсу Сталина потребовалась «всенародная поддержка». Академиками АН СССР были избраны математики С.Н. Бернштейн, И.М. Виноградов, Н.М. Крылов, Н.Н. Лузин. Почетными академиками стали Д.А. Граве и Д.Ф. Егоров.

23 мая 1930 г. был принят новый устав Академии наук. Ее основной задачей являлось подчинение всех научных исследований нуждам социалистического строительства.

На I Всесоюзном съезде математиков в июне 1930 г. были поставлены проблемы применения метода диалектического и исторического материализма к истории и обоснованию математики, а также «внедрения этого метода в собственно математическое исследование». Бернштейна, считавшего, что между этими двумя направлениями человеческого мышления нет никаких точек пересечения, уволили с должности директора основанного им в 1928 г. Украинского института математических наук. Он написал в многотиражку Харьковского физико-химико-математического института письмо, в котором отметил, что диалектический материализм ведет к математическому скудоумию.

В ответ Бернштейна обвинили в том, что он считает математические науки внеклассовыми, стоящими вне политики. По мнению обвинителей, он пытается доказать свою точку зрения тем, что математики различных взглядов очень часто обрабатывали одну и ту же теорию, продолжая и дополняя друг друга. От Бернштейна требовали отказа от своей позиции, раскаяния и признания ее ошибочности, но он этого не сделал.

Планомерная борьба велась против Д.Ф. Егорова, с 1923 г. президента Московского математического общества. В 1924 г. под давлением радикально настроенных студентов его сместили с поста председателя Предметной комиссии по математике. В 1929 г. он был снят с должности директора Института математики и механики при 1-м МГУ. 12 ноября 1930 г. на заседании общества марксистов-статистиков при обсуждении темы «Плановое вредительство и статистическая теория» Егорова резко критиковали. Вскоре «профессор-вредитель» был арестован. 21 ноября «инициативная группа» Московского математического общества в составе Люстерника, Шнирельмана, Гельфонда, Понтрягина и Некрасова приняла декларацию. В этой декларации говорилось: «И в среде математиков выявились активные контрреволюционеры. Арестован за участие в контрреволюционной организации профессор Егоров, признанный вождь московской математической школы, председатель Математического общества, бывший директор Математического института, кандидат московской математики в Академию наук, тот самый Егоров – хранитель академических традиций, против которого уже давно велась борьба пролетарским студенчеством, но в защиту которого почти единогласно выступало общество московских математиков...» [19]. Говорилось в декларации и о том, что в рядах Московского математического общества процветали поповщина и церковное мракобесие и не ставились вопросы марксистской методологии науки.

Мы можем лишь строить догадки о том, как писали и подписывали подобные «декларации». По-видимому, на это влияли и борьба за руководя-

щие посты, и идеологическое ослепление, и «выкручивание рук», и страх. Московское математическое общество было реорганизовано.

Внедрение диалектики в математику началось раньше, чем в другие науки, поэтому делали это с оглядкой. Егорова арестовали, организовали кампанию по его осуждению, но ограничились лишь высылкой в Казань.

За декларацией Московского математического общества последовала декларация Ленинградского физико-математического общества от 10 марта 1931 г. с осуждением гюнтеровщины. Под ней стояли подписи не только кандидатов в академики, но и академиков.

Расправившись с Д.Ф. Егоровым, борцы за «внедрение» материалистической диалектики в математику занялись Н.Н. Лузиным. Одним из главных гонителей стал Эрнест Кольман. Он родился в Праге, во время Первой мировой войны попал в плен к русским и остался в России. Вступив в РКП(б) после революции, Кольман в 1929–1935 гг. был научным сотрудником Коммунистической академии, в 1935–1938 гг. работал заведующим отделом науки Московского горкома ВКП(б). В конце жизни он эмигрировал в Стокгольм.

В работе Международного математического конгресса 1932 г. в Цюрихе Н.Н. Лузину, С.Н. Бернштейну и Н.М. Крылову было запрещено участвовать. От СССР в работе этого конгресса приняли участие: Э. Кольман (председатель), П.С. Александров, Н.Г. Чеботарёв.

Сменив О.Ю. Шмидта на посту ответственного редактора журнала «Естествознание и марксизм», Кольман опубликовал в сборнике «На борьбу за материалистическую диалектику в математике» семь статей против «откровенного идеалиста и солипсиста» Лузина. Автор данной книги просит читателя сопоставить приведенные ниже даты и самому сделать выводы. В книге «Предмет и метод современной математики» [45], сданной в набор 2 апреля 1936 г. (за несколько месяцев до начала «дела Лузина») и подписанной к печати 14 июля 1936 г., Кольман критикует «Московскую математическую школу» за книгу Н. Бугаева, изданную в 1905 г., и добавляет: «Этот черносотенный образ мыслей был полностью донесен до наших дней одним из столпов этой школы Лузиным, который придал ему некоторую более “современную” фашистскую окраску. Вместе с тем Лузин “исправил” эту идеологию в деталях, заменив открытую проповедь православия более тонким дурманом – субъективным идеализмом и солипсизмом» [45]. В предисловии к книге Кольман благодарит А.Н. Колмогорова и С.А. Яновскую, «любезно просмотревших всю рукопись и сделавших к ней ряд ценных, мною использованных указаний».

Поводом для травли Лузина в газете «Правда» послужила его статья «Приятное разочарование» в газете «Известия» от 27 июня 1936 г. Лузин в конце июня был приглашен на выпускной экзамен в московскую школу № 16. В статье он писал, что ожидал худшей математической подготовки школьников. Газета «Правда» 2 июля того же года поместила статью «Ответ академику Лузину», написанную директором школы. Директор заверял, что школа не нуждается в лицемерных похвалах, и Лузину не удастся замазать недостатки, нанести этим вред школе и дезориентировать учителей.

На следующий день, 3 июля 1936 г. в «Правде» была опубликована редакционная статья «О врагах в советской маске». В статье утверждалось,

что ответ директора 16-й школы лишь приоткрыл занавес, маскирующий вражескую «деятельность» Лузина. Ему предъявили следующие обвинения: незаслуженные похвальные отзывы о работах тех, кто добивался ученых степеней и званий, что засоряло ряды математиков бездарностями; саботаж, состоящий в том, что он лучшие свои работы посылает за рубеж, а в Советском Союзе печатает только малоценные статьи; сомнительность принадлежности Лузину многих его трудов, так как он выдает результаты некоторых своих учеников за свои собственные. В заключении говорилось, что советская научная общественность сорвет с Лузина маску добросовестного ученого и раскроет его как предателя интересов науки, желающего угодить своим старым учителям, ныне «учителям фашистской науки» (имелись в виду Борель и Лебег).

В тот же день состоялось собрание в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР, в котором Лузин заведовал отделом теории функций. Решением собрания было обращение с просьбой к Президиуму АН СССР снять Лузина с постов председателя группы математиков Академии и председателя квалификационной комиссии и поставить вопрос о его членстве в Академии.

В защиту Лузина мужественно выступили академики старшего поколения: П.Л. Капица, В.И. Вернадский, С.А. Чаплыгин.

9 июля 1936 г. в «Правде» появилась вторая редакционная статья «Традиция раболепия», в которой, кроме Лузина, упоминались те, кто печатал статьи за границей: Александров, Бернштейн, Колмогоров, Хинчин. В тот же день состоялось общее собрание научных работников и аспирантов Института математики и механики МГУ. Докладчик С.А. Яновская, руководившая отделом философии, повторила обвинения, сформулированные в статье, и продолжила перечень грехов Лузина. Против жесткого постановления собрания голосовали только два самых преданных ученика Николая Николаевича – профессора Н.К. Бари и Д.Е. Меньшов. 10 июля в «Правде» было помещено сообщение под названием «О врагах в советской маске» об этом собрании с требованием оргвыводов.

Многозначительной является статья «Враг, с которого сорвана маска» с подзаголовком «В Комиссии Академии наук по делу господина Лузина», опубликованная в «Правде» от 14 июля. В эту комиссию, организованную 7 июля под председательством Г.М. Кржижановского, вошли А.Е. Ферсман, С.Н. Бернштейн, О.Ю. Шмидт, И.М. Виноградов, А.Н. Бах, Н.П. Горбунов, Л.Г. Шнирельман, С.Л. Соболев, П.С. Александров, А.Я. Хинчин. В работе комиссии приняли участие также Н.М. Крылов, А.О. Гельфонд, Л.А. Люстерник и другие.

Лузина защищали по всем пунктам обвинения С.Н. Бернштейн и Н.М. Крылов. П.С. Александров, воздавая похвалу Лузину как необыкновенно сердечному и внимательному научному руководителю, отметил психическую неустойчивость и «ненормальные этические реакции» Лузина. Эти черты своего учителя он раскрывал на примере отношений Лузина и М.Я. Суслина, возлагая на Лузина моральную ответственность за раннюю кончину Суслина. С Александровым был не согласен Хинчин.

По поводу обвинений в плагиате комиссия констатировала, что Лузин действительно не всегда указывал авторскую принадлежность тех или иных результатов, упоминаемых им в своих трудах. Имелись в виду исследования П.С. Александрова, М.А. Лаврентьева, П.С. Новикова. Следует отметить, что двое последних никогда таких претензий Лузину не предъявляли. С.Н. Бернштейн, защищая Лузина, говорил на заседаниях комиссии, что учителя дают ученикам нечто невесомое, и ученики это не всегда оценивают. И если речь идет о конкретном факте, то идеи, которые легли в основу открытия, принадлежат учителю. Если же ни учитель, ни ученик не обладают в этом отношении соответствующей деликатностью, то всегда возникают недоразумения.

Текст заключения комиссии был дипломатичным. Отмечались заслуги Лузина, но и констатировалось, что по мере научного роста учеников и особенно при их попытках встать на самостоятельный путь научного исследования, отношение Лузина к ним обычно портилось. Ссылки на работы учеников носят намеренно неясный характер и способны ввести в заблуждение, в ряде случаев обнаружено присвоение авторства.

5 августа 1936 г. Президиум АН СССР принял постановление, опубликованное в «Правде» 6 августа и в «Вестнике Академии наук СССР». Констатировалось, что «поведение академика Лузина несовместимо с достоинством действительного члена Академии». Вместе с тем, учитывая значение его как крупного математика и исходя из желания предоставить ему возможность перестроить поведение и работу, Президиум счел возможным ограничиться предупреждением Н.Н. Лузина, что при отсутствии дальнейшего решительного изменения поведения Президиум вынужден будет неотложно поставить вопрос об исключении Н.Н. Лузина из академических рядов. Никаких оргвыводов не было сделано, Лузин остался в Академии, на его примере был преподан урок «смирения» научной интеллигенции [34].

Травля Лузина продолжалась. Как вспоминает Делоне: «…началась “лузинщина”, и все мы его проклинали в официальном порядке, этого Лузина» [54]. В 3-м выпуске «Успехов математических наук» за 1937 г. появилась клеветническая редакционная статья «Изжить лузинщину в научной среде». Ответственным редактором журнала в то время был Л.А. Люстерник, а в состав редколлегии входили многие бывшие «лузитанцы».

Руководители Госплана, ответственные за социалистическое плановое хозяйство, считали нецелесообразным внедрение математичеких методов в экономику. В результате линейное программирование, открытое Л.В. Канторовичем в 1939 г., стало признаваться только после появления публикаций на эту тему в конце 1950-х годов в Америке.

Математиков преследовали и по исключительно политическим мотивам. В 1968 г. в спецпсихбольницу был насильно помещен сын поэта С. Есенина математик А.С. Есенин-Вольпин. Девяносто девять математиков, среди которых были такие крупные ученые, как В.И. Арнольд, И.М. Гельфанд, Л.В. Келдыш, А.А. Марков-мл., Д.Е. Меньшов, П.С. Новиков, С.П. Новиков, подписали письмо в Министерство здравоохранения с требованием освободить коллегу. Последовали увольнения ряда ученых, подписавших это письмо. Члену-корреспонденту АН СССР С.П. Новикову, удостоенному в 1970 г.

за работы по топологии премии и медали Филдса, была запрещена поездка на Международный математический конгресс в Ниццу, где ему должны были вручать награду [58].

Опыт внедрения диалектики в математику, закончившийся для многих участников трагически, тормозил развитие отечественной математики и подрывал связи с мировой наукой. Подобный опыт должен помочь избежать ошибок в будущем.

Организация математических исследований в годы войны и послевоенное время

Московское математическое общество в годы Великой Отечественной войны разделилось на Ташкентское отделение (позднее было переведено в Ашхабад, а затем Свердловск), которым руководил В.В. Степанов, и Казанское отделение, которым руководил П.С. Александров. Казанское отделение работало до 17 апреля 1943 г. Осенью 1942 г. часть математиков, вернувшихся в Москву, составили Московское отделение, а осенью 1943 г. все три отделения снова объединили в Москве. Математиков-ленинградцев в основном эвакуировали в Елабугу. Директором эвакуированного в Казань Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР два первых военных года вместо И.М. Виноградова был С.Л. Соболев.

Научные исследования по математике пополнились вопросами прикладного характера, связанными с оборонными задачами и запросами производства. А.Н. Колмогоров выполнил ряд исследований по проблемам теории вероятностей, связанным с оценками эффективности стрельбы. Над вопросами военной тематики работали М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев, Н.Н. Боголюбов, С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов и многие другие.

Исследования, не связанные с оборонной тематикой, также успешно продолжались. И.Г. Петровский получил ряд результатов в области общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, П.С. Александров разработал теорию полных и бикомпактных пространств. В.В. Степанов выполнил математический расчет динамики взвешенных частиц, позволивший определить наиболее поражаемые места лопастей вентиляторов турбин. Д.Е. Меньшов построил для любой измеримой функции тригонометрический ряд, сходящийся к ней почти всюду.

Благоприятные условия были созданы для ученых после Великой Отечественной войны, когда научная и преподавательская деятельность стала считаться весьма престижной. В значительной степени это определялось тем, что развитие как фундаментальных, так и технических наук было тесно связано с укреплением военной мощи государства, чему руководство страны придавало особое значение.

Первые послевоенные выборы в Академию наук СССР состоялись в ноябре 1946 г. В числе других академиками были избраны И.И. Артоболевский и И.Г. Петровский, членами-корреспондентами АН СССР – Н.Н. Боголюбов, А.Д. Александров, И.Н. Векуа, Р.О. Кузьмин, Л.А. Люстерник, В.В. Степанов.

В 1953 г. академиками были избраны Н.Н. Боголюбов, П.С. Александров, А.А. Дородницын, С.А. Лебедев, Л.И. Седов, членами-корреспондентами – С.Н. Мергелян, А.А. Марков-мл., П.С. Новиков, И.М. Гельфанд, Д.Е. Меньшов.

Объединяющим центром для московских математиков продолжало оставаться Московское математическое общество. Наибольшие математические коллективы концентрировались вокруг Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР и Московского университета.

В 1956 г. в Москве состоялся III Всесоюзный математический съезд, в работе которого приняло участие более 2500 советских ученых и более 70 ученых зарубежных стран. Работа съезда проходила по тринадцати секциям. Было прочитано 763 доклада, из них 63 – иностранными учеными.

10 мая 1957 г. Президиум Академии наук СССР создал Комитет по организации Сибирского отделения (СО) АН СССР во главе с М.А. Лаврентьевым. Постановление Совета Министров СССР о создании СО АН СССР было принято 18 мая 1957 г.

Сибирское отделение АН СССР получило особый статус. Стать избранным членом этого отделения было легче, чем членом основных отделений АН СССР. Но после избрания научный работник был обязан переехать в Новосибирск и вести работу там. В то же время он становился членом основного отделения Академии наук СССР по своей специальности. Этот особый статус и был главной приманкой для привлечения научных работников в новый научно-исследовательский центр. В состав Сибирского отделения АН СССР вошли все научные учреждения Академии, расположенные за Уралом.

В 1958 г. академиками АН СССР были избраны Л.С. Понтрягин и по Сибирскому отделению И.Н. Векуа и А.И. Мальцев, членами-корреспондентами – И.Р. Шафаревич и по Сибирскому отделению – А.В. Бицадзе и Л.В. Канторович.

После реабилитации кибернетики, считавшейся длительное время лженаукой, в нашей стране началась интенсивная разработка электронной вычислительной техники. В Институте точной механики и вычислительной техники под руководством С.А. Лебедева были разработаны в 1958 г. БЭСМ-2, новая быстродействующая ЭВМ М-20, получившая широкое распространение, ЭВМ М-40, с помощью которой была решена задача автоматического управления сложными разнесенными в пространстве объектами в реальном масштабе времени. Вышел первый сборник журнала «Проблемы кибернетики» – первое в СССР периодическое издание по кибернетике. В 1961 г. была создана ЭВМ «Днепр» – первая советская ЦВМ широкого применения на полупроводниковых элементах, а в 1967 г. разработана полупроводниковая универсальная ЭВМ БЭСМ-6 быстродействием 1 млн операций в секунду. В 1972 г. на Брестском электромеханическом заводе начат серийный выпуск ЭВМ ЕС-1020 и ЕС-1030 – головных образцов единого ряда ЭВМ, разрабатываемого специалистами стран – членов СЭВ.

Реабилитированы были не только генетика и кибернетика, но и линейное программирование. В апреле 1960 г. состоялось I Всесоюзное совещание по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании, созванное АН СССР. В 1963 г. в Москве создан

центральный экономико-математический институт АН СССР (ЦЭМИ). С 1965 г. начали выходить журналы АН СССР «Экономика и математические методы» и «Кибернетика».

В 1961 г. с 3 по 12 июля в Ленинграде проходил IV Всесоюзный математический съезд.

Пополнялись ряды математиков АН СССР. В 1960 г. академиком избран П.С. Новиков, членами-корреспондентами – А.В. Погорелов и Н.В. Смирнов; в 1964 г. академиками избраны В.М. Глушков, Ю.В. Линник и по Сибирскому отделению – А.Д. Александров и Л.В. Канторович, членами-корреспондентами АН СССР – К.К. Марджанишвили, Д.К. Фаддеев и по Сибирскому отделению – А.А. Ляпунов и А.И. Ширшов.

В 1965 г. в состав Отделения математики входило 23 академика и 17 членов-корреспондентов. На выборах 1966 г. академиком был избран А.Н. Тихонов, членами-корреспондентами АН СССР – Н.П. Бусленко, В.Я. Козлов, С.П. Новиков, Ю.В. Прохоров, А.А. Самарский и по Сибирскому отделению – А.А. Боровков, М.И. Каргаполов, Н.Н. Яненко.

С 16 по 26 августа 1966 г. в Москве работал Международный конгресс математиков – самый многочисленный съезд математиков. Число участников из 54 стран превысило 5000, а число прочитанных докладов и сообщений – 2000. Конгресс работал в 15 секциях, рабочими языками конгресса были русский, английский, французский и немецкий. Из 15 часовых докладов пять прочитали советские ученые: И.М. Виноградов и А.Г. Постников – «О развитии за последние годы аналитической теории чисел», Н.В. Ефимов – «Гиперболические задачи теории поверхностей», М.Г. Крейн – «Аналитические проблемы и результаты в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве», А.И. Мальцев – «О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики», И.И. Пятецкий-Шапиро – «Автоморфные функции и арифметические группы». Из 67 получасовых докладов советскими учеными было прочитано 26.

В конце 1960-х годов Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР имел отделения в Ленинграде (ЛОМИ, с 1939 г.) и Свердловске (с 1957 г.). Состоял он из 11 отделов: математической логики (П.С. Новиков), теории чисел (И.М. Виноградов), алгебры (И.Р. Шафаревич), геометрии (Б.Н. Делоне), топологии (П.С. Александров), теории функций (С.М. Никольский), дифференциальных уравнений (Л.С. Понтрягин), теории вероятностей (Ю.В. Прохоров), математической статистики (Н.В. Смирнов), механики (Л.И. Седов), теоретической физики (Н.Н. Боголюбов). Возглавлял институт И.М. Виноградов.

Некоторые крупные московские математики (И.Г. Петровский, П.С. Александров, А.Н. Колмогоров, В.В. Голубев, А.Г. Курош и другие), тесно связанные с университетом, не перешли в Математический институт АН СССР, а остались работать в Математическом институте МГУ [40].

В 1970–1980-е годы в стране создаются многочисленные математические научно-исследовательские и вычислительные центры. В 1984 г. создан Научный совет АН СССР по комплексной проблеме «Математическое моделирование», в 1985 г. организован Научный совет АН СССР по прикладной математике.

Российские математики принимают активное участие в работе Международных математических конгрессов. В 1990 г. в Киото высшая награда Международного союза математиков по чистой математике (премия и медаль Филдса) была присуждена за работы по алгебраической геометрии В.Г. Дринфельду, а высшая награда по прикладной математике (премия Неванлинны) – А.А. Разборову. Делегация советских математиков на Конгрессе была весьма представительной (около 100 человек), из них А.Н. Варченко, Г.А. Маргулис, Я.Г. Синай, Б.Л. Фейгин выступили с часовыми докладами на пленарных заседаниях, а 18 советских делегатов – с 45-минутными секционными докладами, что свидетельствовало о лидирующих позициях представителей советской математической школы в международном математическом сообществе. В 1994 г. в Цюрихе премия и медаль Филдса были присуждены Е.И. Зельманову за работы по алгебре, в 1998 г. в Берлине – М.Л. Концевичу за достижения в области физической математики.

В начале 1990-х годов наибольшие потери из-за «утечки мозгов» понесла математика. Из 9 математиков, лауреатов медали Филдса, являющихся или бывших гражданами СССР, только Г.Я. Перельман живет в Петербурге, а С.П. Новиков делит время между Мэрилендским университетом (США) и Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН. Остальные лауреаты работают в зарубежных университетах: А.Ю. Окуньков и В.А. Воеводский – в Принстонском университете, Е.И. Зельманов – профессор Калифорнийского университета в Сан-Диего, В.Г. Дринфельд – в Чикагском университете, Г.А. Маргулис – в Йельском университете, а М.Л. Концевич – в Институте высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем, С.К. Смирнов – в Женевском университете. На международных математических олимпиадах Россия уверенно занимает второе место, уступая лишь Китаю.

По состоянию на 10 октября 2010 г. в Отделении математических наук РАН состояли 43 академика, 55 членов-корреспондентов и 18 иностранных членов. В секции математики – 26 академиков, 33 члена-корреспондента и 15 иностранных сленов РАН. В секции прикладной математики и информатики – 17 академиков, 22 члена-корреспондента и 3 иностранных члена РАН.

В настоящее время имеет место заметное повышение активности российских математиков и рост их авторитета в мире. Об этом свидетельствует признание российской математики на Международных математических конгрессах 2006 г. в Мадриде и 2010 г. в Хайдарабаде.

Глава 10

АМЕРИКАНСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Великой нацией нас делает не наше богатство, а то, как мы его используем.

Т. Рузвельт

Система образования в США

В сборнике «Математика в современном мире» Р. Курант в одноименной статье в 1967 г. писал: «Возросшая роль математики в современном мире, прежде всего, сказалась в резком увеличении числа математиков. С 1900 г. число членов профессиональных математических объединений в США увеличилось примерно в 30 раз. К 1964 г. 4800 человек были удостоены ученых степеней. За последние 25 лет число специалистов математиков, работающих вне университетов – в промышленности и государственных учреждениях – увеличилось в 12 раз. В настоящее время деятельность десятков тысяч людей самой различной квалификации тесно связана с математикой» [53].

В начале XX в. математика в США не достигала уровня ведущих европейских держав. Качественный скачок в развитии американской математики произошел в 1930-е годы, когда из нацистской Германии в Штаты вынуждены были бежать многие ученые. В настоящее время в США существует мощная математическая школа. Большую часть ученых-математиков составляют эмигранты из России, Китая, Японии и других стран. Им обеспечены гораздо лучшие условия работы, чем те, которые они могли иметь на родине.

Также в Соединенных Штатах созданы отличные условия для получения математического образования. Коротко рассмотрим организацию образования в США.

В 1636 г., через шесть лет после того, как первая тысяча англичан высадилась на берег Массачусетского залива, в Америке был создан первый университет. Он основан выпускником Кембриджского университета (Великобритания) Джоном Гарвардом и в честь основателя назван Гарвардским (Кембридж, штат Массачусетс).

В разгар Гражданской войны 1861–1865 гг. конгресс США принял закон о праве администрации штатов выделять участки земли для обеспечения финансирвания высших учебных заведений. Эти вузы (land-grant colleges) начали подготовку специалистов по сельскому хозяйству и инженеров-механиков. Университеты более высокого уровня создавались в то время финансовыми и индустриальными магнатами. Это университеты Вандербильда, Гопкинса, Корнелля, Станфорда, Рокфеллера.

В список наиболее популярных вузов США входят как государственные, так и частные учебные заведения. Самыми престижными университетами, дающими наиболее фундаментальное образование, считаются восемь частных университетов, находящихся в семи штатах на северо-востоке США. Они образуют ассоциацию «Лига плюща», ставшую известной после появления в 1954 г. спортивного объединения этих университетов. Старые здания университетов обвивают побеги плюща. Отсюда такое необычное название. «Лигу плюща» составляют следующие университеты: Гарвардский (Кембридж, Массачусетс), Йельский (Нью-Хейвен, Коннектикут), Принстонский (Принстон, Нью-Джерси), Пенсильванский (Филадельфия, Пенсильвания), Колумбийский (Нью-Йорк, Нью-Йорк), Браунский (Провиденс, Род-Айленд), колледж Дартмут (Гановер, Нью-Гемпшир), Корнелльский (Итака, Нью-Йорк). Эти университеты входят в число богатейших вузов мира. Все восемь получают многомиллионные дотации в виде грантов и других субсидий из федерального и государственного управления. В них преподают лучшие специалисты в своей области, учатся именитые студенты из разных стран. О значимости этих университетов для самих Штатов можно судить хотя бы по тому, что в Гарвардском университете преподают более 2 тыс. профессоров, учатся почти 70 тыс. студентов и 13 тыс. аспирантов. Среди его выпускников 7 президентов США.

В Кембридже находится частный Массачусетский технологический институт (МТИ), считающийся мировым лидером в области науки и техники. Он был основан в 1861 г., но из-за войны начал функционировать только в 1865 г. и вскоре стал крупнейшим центром прикладных исследований США. В рамках военно-оборонного комплекса США он выполнял функции головного предприятия. Неслучайно МТИ создан в непосредственной близости от Гарвардского университета. Эти вузы активно взаимодействуют, имеют общие исследовательские проекты. Всем студентам МТИ позволено посещать занятия в Гарвардском университете и наоборот.

Вторым по значимости в этой области считается частный Калифорнийский технологический институт (Калтех), находящийся в Пасадене.

Государственные университеты в США исторически подразделялись на следующие две основные категории: научно-исследовательские университеты и университеты типа «ленд-грант» и «си-грант». Научно-исследовательские университеты уделяют значительное внимание научно-исследовательской, а также педагогической работе. Как правило, их программы обучения в меньшей степени связаны с прикладными исследованиями и в большей – с теоретическими. Университеты типа «ленд-грант» делают упор на прикладное использование знаний в таких областях, как сельское хозяйство, технология и машиностроение, а «си-грант» – на исследования, связанные с морем.

В государственных университетах десятки тысяч студентов обучаются на разных ступенях от бакалавриата до докторантуры. Кроме учебного процесса, в госуниверситетах проводят научные исследования и разработки, на которые выделяют огромные средства. Они имеют возможность приглашать на работу лучших ученых со всего мира. Как правило, в госуниверситетах

больше зарубежных студентов и аспирантов, чем в частных университетах, что обусловлено меньшей стоимостью обучения и широким выбором программ специализации.

Государственные университеты имеются во всех штатах и обычно называются по имени штата. В системе Калифорнийского университета находится 10 университетов. Важнейшим из них является Калифорнийский университет в Беркли, считающийся лучшим государственным университетом США.

Большую роль в развитии американской математической школы играет консорциум Институтов перспективных исследований, из которых наиболее известен тот, что находится в Принстоне (Нью-Джерси). Он основан в 1930 г. Луисом Бамбергером и его сестрой Каролиной Бамбергер Фульд. Институт принял на работу многих ученых, бежавших от нацизма из Европы и стал центром теоретических исследований. Состоит он из четырех «школ»: история, математика, естественные науки, социальные науки. Вся научная деятельность в институте финансируется за счет грантов и пожертвований. Исследования никогда не делаются по заказу и не направляются извне – каждый исследователь работает над тем, что ему интересно.

Отбор в «школу» осуществляется из 1500 кандидатов, среди которых встречаются и молодые исследователи (например, лауреаты медали Филдса), и опытные ученые. Попасть в институт можно на один семестр или несколько лет, но большинство остается на год. В институте имеется небольшой штат постоянных ученых и проводят исследования приглашенные. Каждый год набирают 29 постоянных членов, и 190 приглашенных из различных университетов и научно-исследовательских институтов.

Институт не имеет формальных связей с учебными заведениями, но часто организует с ними совместные научные проекты. Особенно тесна связь с факультетами Принстонского университета, часть из которых расположена в том же здании. Исследовательская деятельность в основном сосредоточена в многочисленных и весьма активных семинарах. Эти небольшие группы собираются еженедельно под руководством авторитетных ученых.

Кроме семинаров, имеется математический клуб, в котором выступают с последними результатами своих исследований как члены принстонской группы, так и ученые из других институтов.

Из ученых, внесших значительный вклад в развитие современной математики, постоянными сотрудниками института были Джон фон Нейман, Герман Вейль, Марстон Морс, Карл Зигель, Курт Гёдель, Атле Сельберг, Андре Вейль, Ларс Хёрмандер, Хариш-Чандра, Майкл Атья, Роберт Ленглендс, Энрико Бомбьери, Шинтан Яу, Пьер Делинь и другие. В 2010 г. там работали Эдвард Виттен, Жан Бурген, Владимир Воеводский и другие.

Запуск первого спутника в 1957 г. стимулировал в США самую масштабную правительственную кампанию по улучшению ситуации с математикой, точными науками и техникой. Было резко увеличено финансирование образования и научных исследований, государственные и частные университеты расширили программы отправки самых умных учеников в лучшие университеты вне зависимости от способности их родителей заплатить за

обучение. Космическая гонка помогла создать в США мощную научно-техническую инфраструктуру, что укрепило их господствующие позиции в мире.

В данной главе рассказано о наиболее известных американских математиках, получивших образование в США. Об ученых-эмигрантах, считающихся американскими математиками, но получившими математическое образование не в Штатах, рассказано в других главах.

Джордж Биркгоф

Биркгоф Джордж Девид родился 21 марта 1884 г. в штате Мичиган в семье врача. С 1896 г. он учился в Чикаго в институте Льюиса. Во время учебы в 1901 г. Биркгоф опубликовал работу по теории чисел. После окончания института Льюиса в 1902 г. еще год он учился в Чикагском, а затем два года в Гарвардском университете.

В 1905 г. Биркгоф вернулся в Гарвардский университет для написания диссертации. На его творчество оказал влияние Пуанкаре. Биркгоф исследовал асимптотические свойства некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Диссертацию он защитил в 1907 г. и два года преподавал в университете Висконсина в Мэдисоне. Затем Биркгоф перешел в Принстонский университет, в котором в 1911 г. стал профессором. В 1912 г. он пытался решить проблему четырех красок. Несмотря на неудачу (решение этой проблемы было получено с помощью компьютера более полувека спустя), он получил интересные результаты в алгебраической теории графов. В том же году Биркгоф вернулся на преподавательскую должность в Гарвард. В 1913 г. им доказана одна из теорем задачи трех тел, сформулированная А. Пуанкаре.

В 1919 г. Биркгоф стал и оставался всю жизнь профессором Гарвардского университета.

Биркгоф работал над различными аспектами теории относительности и квантовой механики. В 1923 г. совместно с Р.Э. Лэнгером он опубликовал монографию «Относительность и современная физика». Также им разработан оригинальный вариант теории гравитации.

Джордж Биркгоф – один из лучших американских математиков своего поколения. Основным направлением его научных интересов была статистическая механика. Им установлены критерии устойчивости движения и существования периодического движения. Он исследовал особенно интересные классы движений – центральные и рекуррентные движения.

Наибольший вклад Биркгоф внес в развитие теории динамических систем. После выхода в 1927 г. его монографии «Динамические системы», ставшей классической, этот раздел математики стал интенсивно развиваться. В теории динамических систем исследования Биркгофа были основополагающими и значительно продвинули общую теорию дифференциальных и разностных уравнений. Особенно важное значение имеют работы Биркгофа

в области эргодической теории, которая является метрической теорией динамических систем. Математическая эргодическая теория изучает, при каких условиях средние по времени для динамических систем равны средним статистическим.

Наиболее известным результатом Джорджа Биркгофа является доказательство эргодической теоремы в 1931 г., которая характеризует статистические свойства динамических систем, отражающих их поведение на больших отрезках времени.

В исследованиях по механике Биркгоф широко применял методы топологии и теории множеств.

Исследования этого ученого находили широкое применение в различных областях деятельности. Например, Биркгофом предложена математическая теория эстетики. В 1933 г. он опубликовал работу «Эстетическая мера», при подготовке которой в течение года изучал живопись, музыку и поэзию различных культур.

В 1936 г. Биркгоф был назначен деканом факультета искусств и наук. В 1938 г. он опубликовал работу «Электричество как жидкость», в которой отражены его философские идеи и размышления.

Биркгоф редактировал «Труды Американского математического общества», а в 1925–1926 гг. был президентом этого общества, был членом Национальной академии наук США, многих академий Европы и Латинской Америки.

Его сын Гаррет является крупным специалистом в теории множеств и математической логике.

Умер Джордж Биркгоф 12 ноября 1944 г. в Кембридже.

Соломон Лефшец

Лефшец Соломон родился 3 сентября 1884 г. в Москве в еврейской семье граждан Турции. У него было пять братьев и сестра. Вскоре после его рождения семья переехала в Париж. В Центральной школе Лефшец обучался инженерному делу, а в 1902–1905 гг. учился в школе искусств и обрабатывающей промышленности.

В 1905 г. он эмигрировал в США и пять лет работал инженером в известной компании «Вестингхауз». В 1907 г. у Лефшеца в руках взорвался трансформатор, после чего он остался без кистей рук. Потребовались годы, чтобы научиться пользоваться протезами и бороться с депрессией. Он стал самостоятельно изучать математику. В 1910 г. Лефшец поступил в аспирантуру при университете Кларка, защитил диссертацию. В 1913 г. он стал гражданином США и женился на Алисе Берг Хейс. С 1911 по 1924 г. он преподавал математику в американской глубинке, в штатах Канзас и Небраска.

Работая в провинции, Лефшец написал несколько блестящих статей, благодаря которым привлек внимание математической общественности.

В 1924 г. он был удостоен премии Бохера Американского математического общества и приглашен на должность профессора Принстонского университета. Он стал первым профессором-евреем в этом учебном заведении.

Научные интересы Лефшеца лежали в области алгебраической геометрии и топологии. В Принстонском университете Лефшец получил много важных результатов в топологии. Им введены понятия сингулярных гомологий, двойственности Лефшеца. Лефшец стоял у истоков теории когомологий и в 1930 г. ввел понятие «псевдоцикл». Он исследовал теорию многомерных алгебраических многообразий с существенным приложением топологических методов. Вместе с Хопфом он разработал общую теорию пересечения циклов в многообразиях. Одной из важнейших теорем топологии является теорема о неподвижной точке, автором которой является Лефшец. В 1923 г. он обобщил результат Л. Брауэра 1912 г., а в 1927 и 1936 гг. расширил свой результат. Им разработана теория непрерывных отображений.

Кроме работ по алгебраической топологии, Лефшецу принадлежат важные результаты в таких разделах, как алгебраическая геометрия, теория многопериодических функций. Благодаря Лефшецу алгебраическая топология стала самостоятельным разделом современной математики. Согласно высказыванию самого ученого, он вонзил гарпун алгебраической топологии в тело кита алгебраической геометрии.

В течение 30 лет, с 1928 по 1958 г., Лефшец был редактором академического журнала «Анналы математики», который под его руководством стал одним из самых влиятельных математических журналов. В 1935–1936 гг. Лефшец был президентом Американского математического общества, а позже его избрали членом Национальной академии наук США.

В 1943 г. Лефшец стал консультантом Военно-морского флота США и с тех пор стал заниматься применением обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в теории управления и нелинейной механике. Практически теории нелинейных дифференциальных уравнений Лефшец посвятил последние 25 лет своей жизни. Им выполнено около 40 работ по этой тематике, подготовлено множество учеников. Ранее в США этот раздел математики почти не развивался.

В 1953 г. Лефшец вышел на пенсию. После запуска в 1957 г. в СССР первого спутника Лефшеца пригласили вновь для активной работы. Он считал, что превосходство СССР в освоении космоса связано с применением теории нелинейных дифференциальных уравнений в системах управления ракетами. Ученый решил наверстать упущенное американской наукой и создал в университете Брауна математический центр, в котором начались исследования динамических систем. Лефшец первым за пределами Советского Союза признал важность работ А.М. Ляпунова по теории устойчивости.

Хотя личный вклад Лефшеца в теорию нелинейных дифференциальных уравнений, теорию управления и теорию динамических систем несопоставим с его вкладом в алгебраическую геометрию и топологию, в этих разделах им сделано достаточно много и получены оригинальные результаты. Лефшец написал более 40 работ по диссипативным динамическим системам и воспитал немало учеников, продолжающих его исследования. Он возродил интерес

к теории дифференциальных уравнений в США. В университете Брауна Лефшец работал до 1970 г.

Лефшец является автором 8 книг и более 100 статей. Он очень любил путешествовать. До Второй мировой войны он особенно любил бывать во Франции, Италии и Советском Союзе. Из-за войны путешествия в Европу стали невозможными, и Лефшец начал регулярно ездить в Мексику. Там он помог организовать национальную математическую школу, за что в 1964 г. был награжден орденом ацтекского орла. Это была одна из многочисленных наград, полученных Лефшецем. Также ученый был удостоен почетных степеней университетов Парижа, Праги, Мексики и нескольких американских университетов. В 1964 г. он получил Национальную медаль науки США.

На русском языке изданы следующие книги Лефшеца: «Алгебраическая топология» (1949), «Геометрическая теория дифференциальных уравнений» (1961), «Исследования устойчивости прямым методом Ляпунова», написанная в соавторстве с Ла-Салль (1964). Учениками Лефшеца были Н. Стинрод, Шэншэнь Чжэнь (Черн).

Умер Лефшец в Принстоне 5 октября 1972 г.

Джеймс Александер

Александе́р Джеймс Уэдделл родился 19 сентября 1888 г. в Си-Брайт, Нью-Джерси в семье художника.

Александер изучал математику и физику в Принстоне под руководством Освальда Веблена. В 1911 г. он получил степень бакалавра и в течение года работал преподавателем математики в Принстоне. После получения магистерской степени в 1912 г. Александер уехал в Европу, для дальнейшего обучения в Париже и Болонье.

В 1915 г. Александер получил степень доктора и вернулся в Принстонский университет, в 1917 г. женился на россиянке Наталье Левицкой, вступил в армию и служил в Управлении боеприпасов на Абердинском полигоне и в штате Мэриленд. В конце войны Александер получил звание капитана, в 1920 г. вышел в отставку и вернулся в Принстонский университет на должность ассистента.

Вместе с Вебленом и Лефшецем Александер является одним из основоположников алгебраической топологии. В своих исследованиях он стремился дать строгое обоснование результатам, интуитивно полученным А. Пуанкаре. Еще до 1920 г. Александр сделал фундаментальный вклад в теорию алгебраических поверхностей и изучение преобразований Кремона.

Александер доказал топологическую инвариантность симплициальных гомологий. Им исследована двойственность (так называемая двойственность Александера) – связь между гомологическими свойствами взаимно дополнительных подмножеств топологического пространства. В 1924 г. он ввел в рассмотрение «рогатую» сферу.

В 1926 г. Александер получил должность доцента Принстонского университета, в 1928 г. – полного профессора. В том же году после открытия полинома (полином Александера), часто используемого в теории узлов, он был награжден премией Бохера. Теория узлов и комбинаторная теория комплексов были главными темами его работ в течение следующих нескольких лет. С 1933 г. до выхода на пенсию в 1951 г. Александер был членом Института перспективных исследований в Принстоне. От зарплаты он отказался, так как стал миллионером, получив богатое наследство. В 1935 г. Александер ввел в рассмотрение понятие когомологии, имеющее большое значение в топологии и особенно в гомологической алгебре. Независимо от него теорию когомологий развивал А.Н. Колмогоров. Результаты исследований были доложены в 1936 г. в Москве на Международной конференции по топологии.

Во время Второй мировой войны Александер в армии не служил, но выполнял исследования для военной авиации США.

Александер был известным альпинистом, совершившим много восхождений в швейцарских Альпах и Скалистых горах в Колорадо. В Принстоне он иногда взбирался по наружной стене здания университета в свой кабинет, находящийся на верхнем этаже. Именем этого ученого назван кратер в Скалистых горах.

Известный математик придерживался левых взглядов, поэтому подвергался нападкам со стороны сенатора Маккарти. В 1954 г. Александер подписал письмо в защиту Р. Оппенгеймера.

В конце жизни он стал отшельником и не появлялся на публике около 17 лет. Умер Александер 23 сентября 1971 г. в Принстоне.

Марстон Морс

Морс Марстон родился 24 марта 1892 г. в Уотервилле, штат Мэн в семье фермера. Следует отметить, что он называл себя Марстон, хотя это не имя, а девичья фамилия матери. В 1910 г. Морс поступил в колледж Колби в Уотервилле, который окончил в 1914 г. со степенью бакалавра гуманитарных наук. Затем он поступил в Гарвардский университет. Получив там в 1915 г. степень магистра, Морс продолжал исследования под руководством Дж. Биркгофа. Диссертация на звание доктора была посвящена определенным видам геодезического движения поверхности отрицательной кривизны.

Во время Первой мировой войны он служил рядовым в армии США во Франции и был награжден Военным крестом с Серебряной звездой. В 1919 г. Морс получил звание младшего лейтенанта и вышел в отставку в 1924 г. Он совмещал военную службу с научной работой и был инструктором в Гарвардском университете в 1919–1920 гг., и помощником профессора в Корнелльском университете с 1920 по 1925 г. и Университете Брауна в 1925–1926 гг. С 1926 до 1935 г. Морс работал в Гарвардском университете, сначала помощником профессора, затем доцентом, а с 1929 г. – профессором. С 1935 г.

до выхода на пенсию в 1962 г. он был членом Института перспективных исследований в Принстоне.

В отличие от многих других ученых, Морс практически всю жизнь разрабатывал одну тему в математике. Он развивал вариационное исчисление и его приложения к математической физике. В 1920-х годах вскоре после его возвращения к математическим исследованиям им сделано открытие, которое дало начало новой теории, названной теорией Морса и описывающей связь алгебро-топологических свойств топологического пространства с экстремальными свойствами функций (функционалов).

Морс заметил, что каждую из известных замкнутых поверхностей (будь то сфера или тор, проективная плоскость или бутылка Клейна) можно представить в виде объединения нескольких лент: плоских, как обычное кольцо или крученых, как лист Мёбиуса. Затем следует задать на поверхности любую гладкую числовую функцию и проследить, как изменяется множество меньших значений этой функции на пути от ее минимума к максимуму.

Вскоре Морс доказал, что на любой замкнутой поверхности любую числовую функцию можно преобразовать в функцию с одной точкой минимума, одной точкой максимума и несколькими седловыми точками. Поэтому всякая замкнутая поверхность склеена из лент: либо только из плоских, либо только из крученых, либо из тех и других. Оказалось, что приклейка двух крученых лент порождает такую же фигуру, как приклейка одной плоской и одной крученой ленты. Так Морс сумел перечислить все возможные замкнутые поверхности и не только их, ибо созданная им теория оказалась применима к изучению многообразий любой размерности. Он дал общую классификацию типов множеств, которую широко используют в вариационном исчислении.

Теории, основывающиеся на идеях Морса и описывающие связь алгебро-топологических свойств топологического пространства с критическими точками гладкой функции (функционалов) на нем, называют теорией Морса. Суть теории наиболее подробно изложена в книге Джона Милнора, опубликованной в 1963 г. в Принстоне. Теория Морса широко применяется в различных разделах математики: уравнениях математической физики, теории динамических систем. Интерес к ней возрос в 1980-е годы, когда Эдвард Виттен применил теорию Морса к квантовой теории поля.

В вариационном исчислении известна теория Морса, неравенство Морса. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений используются индекс Морса, неравенство Морса – Смейла. Многие труды Морса посвящены механике и применению математики в географии, биологии, экономике и квантовой механике.

Морс проводил исследования и в других разделах математики, но их значение несопоставимо с теорией Морса. Он занимался теорией минимальных поверхностей, дифференциальной топологией, теорией функций комплексного переменного, механикой и приложением математики к географии, биологии, экономике. Но теория Морса была основным его вкладом в математику. Он является автором около 180 статей и 8 книг.

Марстон Морс был дважды женат. В первом браке родились сын и дочь, а во втором – три дочери и двое сыновей.

В Институте перспективных исследований Морс занимал различные должности. Он был консультантом Управления боеприпасов и береговой и геодезической съемки, членом различных советов и комиссий по совершенствованию математической подготовки в США. Морс избирался вице-президентом (1933–1934) и президентом (1941–1942) Американского математического общества. С 1958 по 1962 г. он вице-президент Международного математического союза. Морс был членом Национальной академии наук США (1932), членом многих других академий, научных обществ, почетным доктором американских университетов, членом Комитета по присуждению медалей Филдса в 1954 г. Он удостоен премии Бохера, национальной медали и других наград.

На русском языке в 1951 г. издана книга Морса «Топологические методы теории функций комплексного переменного».

Умер Марстон Морс 22 июня 1977 г.

Джон фон Нейман

Нейман Джон фон родился 28 декабря 1903 г. в Будапеште в еврейской семье преуспевающего банкира. При рождении он получил имя Янош. Позже, в Соединенных Штатах, его называли Джонни. Исключительные способности Неймана проявились очень рано. Уже в возрасте шести лет он обменивался шутками со своим отцом на классическом греческом языке и делил в уме восьмизначные числа. В восемь лет Джон владел несколькими языками и основами высшей математики. Семья Нейманов иногда развлекала гостей, демонстрируя феноменальную способность мальчика запоминать содержание телефонных книг. В 1911 г. Джон поступил в лютеранскую гимназию. Преподаватель математики быстро распознал талант мальчика и составил для него специальную программу обучения. Первая научная работа Неймана «О расположении нулей некоторых минимальных полиномов», написанная в соавторстве с М. Фекете, была опубликована до окончания им гимназии.

В 1919 г. к власти в Венгрии пришло коммунистическое правительство, и семья Нейманов уехала в Австрию, но через месяц вернулась в Будапешт. В 1921 г. Нейман окончил гимназию и поступил одновременно на отделение математики Будапештского университета и на химический факультет Берлинского университета. Учился он в Берлине до 1923 г., а затем переехал в Цюрих.

В 1925 г. Нейман получил диплом химика в Цюрихе, защитил диссертацию «Аксиоматическое построение теории множеств» на звание доктора философии в Будапештском университете и решил стать профессиональным математиком.

С 1926 по 1929 г. Нейман читал лекции в Берлине, с 1929 по 1930 г. – в Гамбурге. В 1926–1927 гг. он слушал лекции Гильберта в Гёттингене.

В 1927 г. Джон фон Нейман становится приват-доцентом Берлинского, а с 1929 г. – Гамбургского университета. В период с 1927 по 1929 г. Нейман очень продуктивно работал в трех направлениях: теории множеств, теории игр, математического обоснования квантовой механики.

После обнаружения парадоксов в теории множеств Кантора математики решили применить вошедший в моду и отлично зарекомендовавший себя аксиоматический метод построения математической теории. В эту работу включился и Нейман.

Первое исследование по аксиоматической теории множеств «К введению трансфинитных ординальных чисел» Нейман опубликовал в 20-летнем возрасте, в 1925 г. защитил диссертацию «Аксиоматическое построение теории множеств», но опубликована работа только в 1928 г. Членам редколлегии математического журнала диссертация показалась непонятной, и рецензент попросил Неймана написать более доходчивую статью с изложением следствий из полученных результатов. Такая статья с названием «К вопросу об аксиоматическом построении теории множеств» была опубликована в 1925 г.

Предложенная Нейманом система аксиом принадлежит к числу высших достижений современной теории множеств. Однако сам автор этой системы не считал свою работу завершенной, так как выбор аксиом в известной мере произволен. Его интерес к теории множеств не угасал и в последующие годы. Кроме работ по теории множеств, многие труды Неймана по другим разделам математики написаны на теоретико-множественной основе.

Неймана считают основоположником теории игр. В статье «К теории стратегических игр», представленной в Математическое общество Гёттингенского университета в 1926 г. и опубликованной в 1928 г., он доказал теорему о минимаксе, которая легла в основу теории игр. Теорема доказана на основе топологической теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Пусть в игре участвуют двое, и выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, т. е. игра ведется с нулевой суммой. Каждый из игроков может выбрать любую стратегию из их конечного числа. Согласно Нейману, «если ваш противник хотя бы не дурак», надо стараться не столько угадать его намерения, сколько не открыть свои. Любая стратегия, ориентированная на выигрыш, а не на избежание проигрыша, неизменно приводит к проигрышу. При оценке своих шансов на выигрыш игрок должен считать, что противник всегда отвечает наилучшим для себя ходом. Это означает, что игрок должен рассчитывать на ту ответную стратегию, при которой его выигрыш минимален. Не желая рисковать, игрок должен сам выбрать стратегию, при которой минимальный выигрыш будет максимально возможным.

Согласно теореме о минимаксе, для любой конечной игры двух игроков с нулевой суммой существует «устойчивая» пара стратегий, для которых минимальный проигрыш одного игрока совпадает с максимальным выигрышем другого. Устойчивость стратегий означает, что каждый из игроков,

отклоняясь от оптимальной стратегии, лишь ухудшает свои шансы и, внемля голосу рассудка, предпочитает вернуться к оптимальной стратегии. В 1938 г. в Принстоне Нейман познакомился с немецким экономистом Оскаром Моргенштерном, ставшим его помощником. Они сотрудничали все военные годы, и результатом их совместных усилий стала написанная в 1944 г. «Теория игр и экономическое поведение» – классическая работа по теории игр и по ее применению в ходе принятия решений в экономике и бизнесе. Издательство Принстонского университета, сославшись на войну и дефицит бумаги, отказалось ее публиковать. В 1953 г. издание книги субсидировал один из членов семьи Рокфеллеров [17].

Еще в 1924 г. Нейман заинтересовался подходом к физике и идеями Гильберта в теории доказательств. Он приезжал в Гёттинген и оба математика, разница в возрасте которых составляла более сорока лет, проводили вместе долгие часы в саду или кабинете Гильберта.

Неймана считали молодым гением, эталоном ученого. В книге «Гильберт» Констанс Рид писала: «В то время как Гильберт был “тугодум”, фон Нейман, по словам Нордгейма, обладал “самым быстрым мозгом”» [66]. Математики, преклонявшиеся перед талантом Неймана, говорили, что, слушая его, начинаешь понимать, как должен работать человеческий мозг. Он умел производить в уме сложнейшие вычисления, способность абстрактно мыслить уживалась в нем с инженерной хваткой.

В Гёттингене Нейман познакомился с идеями зарождавшейся тогда квантовой механики. Проблемы математического обоснования нового раздела физики захватили все мысли Неймана. В результате, в 1927 г. появилась статья «Об основаниях квантовой механики», написанная совместно с Гильбертом и Нордгеймом, которая стала первой работой Неймана по квантовой механике и последней работой Гильберта по физике. В основу статьи была положена лекция об успехах квантовой теории, прочитанная Гильбертом зимой 1926–1927 гг. Наиболее существенная часть математических формулировок и доказательств выполнена Нейманом.

В 1927–1929 гг. Нейманом был написан цикл работ по математическому обоснованию квантовой механики. В 1932 г. эти работы были изложены в обобщенном виде в монографии «Математические основы квантовой механики».

Первоначально квантовая механика излагалась в виде волновой механики Э. Шрёдингера и матричной механики В. Гейзенберга. Эти два эквивалентных способа в статье Гильберта, Неймана и Нордгейма были объединены как две частные реализации одной математической структуры в рамках теории преобразований. Этот язык был понятен и изящен, но не отвечал всем требованиям математической строгости, поэтому в своих следующих работах Нейман использовал математический аппарат теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве состояний. Таким образом была создана прочная научная основа для статистической интерпретации квантовой механики.

Оператор – это математический «рецепт», следуя которому мы преобразуем одну функцию в другую. Для физики особый интерес представляет

взаимосвязь между оператором и множеством его собственных функций. По определению, действие оператора на собственную функцию воспроизводит ту же самую функцию, умноженную на некоторое число. Это число называется собственным значением данного оператора. В квантовой механике наблюдаемые численные значения любой физической величины являются собственными значениями соответствующего этой величине оператора.

Нейман ввел важное понятие матрицы плотности, позволившее развить термодинамику квантовых систем и ставшее одним из ключевых понятий квантовой статистики. Это помогло ему сформулировать и доказать для квантовых систем *H*-теорему и эргодическую теорему.

Практически Нейман создал для квантовой механики наиболее естественный для нее новый математический аппарат. До его работ многие физики не могли принять статистическую интерпретацию квантовомеханических утверждений. Нейман показал, что неопределенность в теоретическом предсказании исхода измерения остается при анализе систем, включающих в себя как объект измерения, так и самого наблюдателя.

Позже Нейман опубликовал еще две статьи по квантовой механике в 1934 г. в соавторстве с П. Йорданом и Ю. Вигнером, и в 1936 г. Дж. Биркгофом. В его архиве обнаружены попытки изложения квантовой механики на языке теории булевых алгебр или теории структур Биркгофа.

В 1929 г. Нейман женился на Мариэтте Кевеши. В том же году он получил приглашение на один семестр в Принстонский университет США для чтения лекций по квантовой теории. Приглашение было продлено, а в 1931 г. Нейман окончательно переехал в Америку. Его пребывание в Германии было осложнено двумя обстоятельствами: во-первых, он был гражданином Венгрии, во-вторых, евреем. Отсутствие немецкого гражданства ограничивало карьерный рост – ординарный профессор университета считался государственным служащим и по закону должен был быть гражданином Германии.

В 1933 г. наряду с А. Эйнштейном, Дж.У. Александером, М. Морсом, О. Вебленом, Г. Вейлем Нейман стал одним из первых профессоров основанного в том же году Института перспективных исследований в Принстоне.

Нейман успешно применял результаты одних разделов математики для решения задач других ее разделов. Продолжением работ по математическому обоснованию квантовой механики стали исследования Неймана в функциональном анализе.

При математическом обосновании квантовой механики Нейман столкнулся с тем, что созданная Гильбертом теория бесконечно многих переменных, ставшая известной как теория гильбертовых пространств, в некоторых отношениях оказалась не совсем адекватной для теоретической физики. Гильбертовское понятие квадратичной формы у Неймана стало более абстрактным, таким образом он расширил теорию Гильберта, сделав ее более удобной для физиков. Нейманом введены в рассмотрение алгебры операторов, которые он назвал кольцами операторов, другие математики называли их «*W**-алгебры» или «алгебры фон Неймана».

Первая работа Неймана по теории алгебр, выполненная в соавторстве с Ф.Дж. Мюрреем (1936), содержала теорему о двойном коммутанте, явившуюся важным инструментом исследования алгебр фон Неймана. Выполненный им цикл работ «О кольцах операторов» (1936–1943) оставил заметный след в математике. Нейманом разработана также теория неограниченных операторов.

Одна за другой публикуются работы Неймана по математической статистике, теории почти периодических функций на группах, статистике гравитационного поля случайно распределенных звезд, численному обращению матриц высокого порядка, теории меры.

Научный диапазон работ Неймана огромен. Из всех разделов математики он оставил без внимания только теорию чисел и топологию. Наиболее важными личными достижениями сам Нейман считал: математическое обоснование квантовой механики, создание теории неограниченных операторов, создание эргодической теории.

Но не менее важными являются другие успехи Неймана: создание теории игр, частичное решение пятой проблемы Гильберта, основополагающие работы по теории автоматов, теоретические и практические разработки первых ЭВМ.

Нейман начинал работу в любом разделе математики с составления перечня аксиом. Наглядные представления об изучаемом математическом объекте он заменял схематическим описанием существенных его свойств, и только эти свойства использовал в последующих рассуждениях и доказательствах. Его стихией была абстракция. Если другие математики часто используют геометрические или другие интуитивно понятные представления, то Нейман отлично оперировал формальными умозаключениями.

Первый брак Неймана распался в 1937 г. Уже через год он вернулся из Будапешта со второй женой – Кларой Дан. Позже она составляла первые программы для ЭВМ.

В конце 1930-х годов Нейман стал активно заниматься приложениями, связанными с военными целями. Он принимал участие в работах Исследовательского бюро военно-морского флота и Манхэттенском проекте. Эти исследования требовали колоссального объема вычислений. Нейман доказал осуществимость взрывного способа детонации атомной бомбы. Он занимался решением задач гидродинамической турбулентности, исследуя уравнения гидродинамики и теории удара. Поскольку в этих задачах в основном используются нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, Нейман стал заниматься возможностями приближенных вычислений на ЭВМ. Он был одним из пионеров информатики и внес значительный вклад в развитие этой науки: работал над теорией ячеистых автоматов, занимался вопросами построения надежных схем из ненадежных элементов.

В ходе работы над Манхэттенским проектом раскрылся еще один талант Неймана – умение моментально улавливать суть самых сложных проблем и сразу же предлагать варианты их решения. Эта способность Неймана была настолько удивительной, что даже среди ученых-ядерщиков, признанных гениев (Оппенгеймера, Ферми, Теллера, Бора), ходила шутка о том, что

на самом деле Нейман вообще не человек, а существо, обладающее сверхинтеллектом и умело маскирующееся под человека. К тому же он был весьма эксцентричен. В поездках, задумавшись над математическими проблемами, он часто забывал, куда и зачем едет, поэтому приходилось звонить на работу и все уточнять. Как и многие другие ученые, Нейман облучился при испытаниях атомной бомбы, вероятно, это укоротило его жизнь.

Нейману принадлежат достижения в области вычислительной техники. Его фундаментальным открытием стала идея о нахождении в одном пространстве оперативной памяти, программы и обрабатываемых данных. В 1944 г. он был направлен в качестве консультанта по математическим вопросам в группу разработчиков ENIAC. После ее создания Нейман опубликовал отчет «Предварительное обсуждение логической конструкции электронной вычислительной машины», который стал первым шагом на пути конструирования новых машин. Другой отчет Неймана «Предварительный доклад о машине EDVAC» стал первой работой по цифровым электронным компьютерам, с которой познакомились ученые. После публикации его трудов компьютер стал объектом науки, поскольку Нейман пользовался большим авторитетом. Следует отметить, что иногда замалчивается роль других ученых в создании ЭВМ, внесших не меньший вклад, чем Нейман.

Важную роль Нейман играл в развитии численного анализа. Это работы по численному обращению матриц высокого порядка, исследование разностных схем для решения уравнений с частными производными, вопросы устойчивости алгоритмов, округления и накопления ошибок. Вместе с Р. Рихтмайером им предложен метод фиктивной вязкости, широко используемый в решении уравнений газовой динамики. Он является одним из создателей метода Монте-Карло, эффективного при численном решении многомерных задач математической физики.

В конце 1940-х годов Нейман приступил к созданию общей математической теории автоматов – науки об основных принципах, общих для искусственных автоматов (ЭВМ, управляющих систем и т. п.) и естественных автоматов (нервной системы человека, самовоспроизводящихся клеток и т. п.). Практически он занимался задачами, сходными с теми, которые решал Н. Винер при создании кибернетики.

Следует отметить, что после создания атомной бомбы в СССР Нейман стал одним из активистов холодной войны и сторонником превентивного удара по СССР.

В 1953 г. Нейман переехал из Принстона в Вашингтон. У него появились сильные боли в левом плече. Диагноз – костная форма рака. К январю 1956 г. он оказался прикованным к инвалидному креслу.

В апреле 1956 г. Неймана положили в госпиталь, где он скончался 8 февраля 1957 г.

Хасслер Уитни

Уитни Хасслер родился 23 марта 1907 г. в Нью-Йорке в семье судьи. Оба его деда были членами Американской национальной академии наук: Уильям Дуайт Уитни, автор «Санскритской грамматики», и Саймон Ньюкомб, известный американский астроном, математик и экономист. В Йельском университете Уитни получил в 1928 г. степень бакалавра по философии, а в 1929 г. – по музыке. Он поступил в аспирантуру Гарвардского университета и под руководством Дж. Биркхофа в 1932 г. защитил диссертацию по теории графов и проблеме четырех красок и получил степень доктора.

С 1933 г. Уитни работал в Гарвардском университете. Он продолжал начатые в диссертации исследования в области теории графов. Им разработана теория линейной зависимости, на основании которой в 1935 г. была создана теория матроидов – гиперграфов специального типа. Теория матроидов обобщает на произвольное пространство идею независимости элементов. Уитни ввел в рассмотрение матроид Фано.

Уитни стал ассистентом профессора Гарвардского университета в 1935 г., еще через пять лет – профессором, и в 1946 г. – полным профессором.

Во время Второй мировой войны с 1943 по 1945 г. Уитни работал в Национальном комитете оборонных исследований. С 1944 по 1954 г. он редактировал основные математические журналы США.

Всю жизнь Уитни серьезно увлекался альпинизмом, совершил много сложных восхождений в горах Европы и Америки. Его именем названа одна из вершин в Нью-Гемпшире. Он был трижды женат.

Большая часть научных трудов Уитни относится к теории дифференцируемых функций. Он исследовал теорию дифференцируемых многообразий и внес весомый вклад в алгебраическую и дифференциальную топологию. Создание Уитни теории дифференцируемых многообразий и их вложений в евклидово пространство на базе идей трансверсальности гладких отображений стало одним из крупнейших общематематических достижений топологии 1930-х годов. Одним из главных его результатов является доказанная в 1938 г. теорема о вложении общего гладкого многообразия со счетной базой в евклидово пространство не более чем вдвое большей размерности. Также важны его работы о характеристических классах и векторных расслоениях. Одновременно со Штифелем он исследовал характеристические классы. В современной математике используются такие понятия, как классы Штифеля – Уитни, числа Штифеля – Уитни, формула Уитни.

Уитни был одним из основателей теории особенностей, которую Рене Том использовал в качестве фундамента при создании теории катастроф.

После Второй мировой войны Уитни исследовал связь алгебраической топологии и теории интегрирования. В 1952 г. Уитни перешел в Институт перспективных исследований в Принстоне на должность профессора матема-

тики. В 1977 г. он официально вышел на пенсию, но продолжал работать в качестве почетного профессора.

Уитни был избран членом Национальной академии наук США и членом Парижской академии наук.

Умер Уитни 10 мая 1989 г. в Принстоне вскоре после инсульта.

Сондерс Маклейн

Маклейн Сондерс родился 4 августа 1909 г. в Норвике около Тафтвилля, штат Коннектикут, в семье священника-евангелиста и был крещен как Лесли Сондерс Маклейн. Предложенное няней имя Лесли не понравилось матери и вскоре было забыто. Отец и дядя Сондерса сменили фамилию MacLean на MacLane, чтобы их не считали ирландцами. По просьбе первой жены Маклейн стал писать свою фамилию с пробелом, в два слова – Mac Lane.

Отец заболел туберкулезом, и в 1917 г. Сондерс Маклейн с матерью и братом стал жить в семье деда. После смерти отца в 1924 г. заботу о Сондерсе взял на себя его дядя Джон. Школу Маклейн окончил в 1926 г. и по сложившейся семейной традиции поступил в Йельский университет. После получения степени бакалавра в 1930 г. Сондерс перевелся в Чикагский университет. В 1931 г. он получил степень магистра искусств.

Изначально Сондерса привлекала химия. Первая научная работа Маклейна была по физике. Она написана в соавторстве с Ирвингом Ленгмюром, который получил в 1932 г. Нобелевскую премию по химии. В университетские годы проявился интерес Маклейна к философии и основаниям математики.

В 1931 г. Маклейн уехал в Германию в Гёттингенский университет. Там он слушал лекции Давида Гильберта, Германа Вейля и Эмми Нётер. Его научным руководителем был Пауль Бернайс.

В 1933 г. в Гёттингене Маклейн женился на Дороти Джонс, защитил диссертацию по математической логике, получил степень доктора и вернулся в США. Первый год он преподавал в Йельском университете, затем в Гарвардском, Корнелльском и Чикагском университетах.

Научные исследования Маклейна после защиты диссертации относились в основном к алгебре и топологии. Вскоре он стал одним из самых известных американских алгебраистов и топологов, одним из основоположников и создателей гомологической алгебры и теории категорий.

В 1943 г. началось плодотворное сотрудничество Маклейна с Самуэлем Эйленбергом. Заметив сходство алгебраических вычислений Маклейна с теми, которые он встречал в алгебраической топологии, Эйленберг предложил Маклейну заниматься совместными исследованиями. Творческий союз Эйленберга и Маклейна, в результате которого появилось 15 совместных статей, длился 14 лет.

Вначале они вели сотрудничество в области топологии (пространства Эйленберга – Маклейна, имеющие единственную нетривиальную группу гомотопий в размерности n), в дальнейшем работали в области гомологической алгебры.

Гомологическая алгебра реализует проект алгебраизации топологических пространств, ставя в соответствие каждому такому пространству последовательность абелевых групп гомологий. Предметом гомологической алгебры является вычисление гомологий.

Особенно важный вклад внесли Маклейн и Эйленберг в 1945 г. в создание теории категорий – раздела математики, изучающего не зависящие от внутренней структуры объектов свойства отношений между математическими объектами. Наряду с теорией множеств, теория категорий служит универсальным языком. Категории, функторы и их естественные преобразования широко используются во всех разделах математики как удобные средства, позволяющие единообразно смотреть на различные конструкции и формулировать общие свойства разнообразных структур. Эта теория существенно изменила воззрения на основания математики. Некоторые математики считают теорию категорий слишком абстрактной и непригодной для практического применения. Но она уже нашла применение не только в математике, но и в информатике и теоретической физике.

По мнению Маклейна, концепции теории категорий близки методологическим установкам, разрабатывавшимся в группе Н. Бурбаки. Из-за лингвистических проблем Маклейн не вошел в эту группу, а Эйленберг позже стал ее активным членом.

В 1944–1945 гг. Маклейн занимался разработкой математических вопросов противовоздушной обороны в Группе прикладной математики при Колумбийском университете.

В 1947 г. Маклейн был назначен профессором математики Чикагского университета, в котором проработал до 1982 г. В 1948 г. он предложил понятие абелевой категории, обобщающей категории абелевых групп и векторных пространств, игравших особые роли в первых работах по аксиоматической теории гомологий. Абелевы категории были переоткрыты в 1953 г. и стали важным орудием в работах по гомологической алгебре Картана, Эйленберга и их последователей.

Наиболее ярким первым достижением в теории категорий стала унификация аксиоматической теории гомологий. В 1952 г. Эйленберг и Стинрод предложили новое понимание любой гомологической или когомологической теории как функтора из изучаемой категории пространств в категорию групп. Аксиоматический подход к определению такого функтора оказал определяющее воздействие на дальнейшее развитие гомологической алгебры и алгебраической топологии. Изучение гомологий пространств Эйленберга – Маклейна и развитие ацикличных моделей продемонстрировали силу идей теории категорий, привели к широкому использованию симплициальных множеств в K-теории и теории пучков.

Другие достижения в теории категорий связаны с именами А. Гротендика и Ф.У. Ловера. Созданная ими в 1960-е годы теория топосов рассмат-

ривает широкий класс категорий, в связи с чем обычная теория множеств может восприниматься как частный случай. Истоки теории топосов лежат в теории пучков и топологии Гротендика. Теория топосов связана с поисками категорной аксиоматизации теории множеств и исследованиями метода форсинга и нестандартных моделей теории множеств Д. Скотта, Р. Соловэя и П. Вопенки. Там же рассматриваются булевозначные модели теории множеств.

В 1949 г. Маклейна избрали в Национальную академию наук Соединенных Штатов Америки. Он был вице-президентом Национальной академии наук США и Американского философского общества, избирался президентом Американского математического общества и Математической ассоциации Америки. Маклейн немало способствовал модернизации школьных программ по математике. Он получил почетные степени ряда университетов и был удостоен множества престижных математических наград. В 1989 г. Маклейн получил высшую научную награду США – Национальную медаль науки.

Маклейн любил лыжи, походы в горы, знал наизусть многие произведения американских и европейских поэтов. Он был одним из самых выдающихся американских математиков XX в. Им опубликовано более ста научных статей и книг.

Скончался Сондерс Маклейн 14 апреля 2005 г. в хосписе в Сан-Франциско.

Часть III

РАЗВИТИЕ ТРАДИЦИОННЫХ РАЗДЕЛОВ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Вся математика делится на три части: криптографию… небесную механику… и гидродинамику… Криптография породила теорию чисел… алгебру… комбинаторику, теорию вероятностей, компьютеры и т. д. Из небесной механики выросли математический анализ, теория динамических систем, симплектическая геометрия, вариационное исчисление, оптимальное управление, квантовая механика и другие области математики. Гидродинамика вызвала к жизни теорию дифференциальных уравнений в частных производных, топологию, теорию групп и алгебр Ли, математическую физику, теорию функций комплексных переменных.

В.И. Арнольд

Достижения математики XX столетия превосходят все, что было создано в ней за предшествующие две с половиной тысячи лет.

Стимулом для математических исследований служили практические приложения — инженерные, конструкторские, экономические, биологические и иные. Не следует забывать и о том, что математика всегда была подспорьем для философского осмысления действительности. Математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки. Мысль Гильберта о том, что для математика весь культурный мир представляет собой единую страну, находила все больше подтверждений [75].

Произошли перемены в традиционных разделах современной математики. В развитии математической теории следует отметить новые аспекты, о которых ученые ранее даже не подозревали. Одним из таких аспектов является сложность получения доказательств и сложность проверки правильности доказательств. Приведем пример, связанный с развитием теории групп.

Введенное Эваристом Галуа понятие группы лежит в основе многих направлений исследований в физике и математике, и поэтому вопрос о классификации групп считается весьма важным. Для его решения в 1970-е годы был организован международный коллектив математиков. Около сотни ученых из США, Великобритании, ФРГ, Австралии, Канады и Японии разделили между собой работу и приступили к решению проблемы. Через десять лет была составлена полная классификация всех простых конечных групп: выделено 18 бесконечных семейств групп и 26 особых случаев

конечных групп, называемых спорадическими. Самая большая из спорадических групп, насчитывающая примерно $8 \cdot 10^{53}$ элементов, была открыта в 1982 г. Эта группа получила название «монстр». Классификация простых конечных групп, по всей вероятности, имеет связь с другими разделами математики. Этот результат уже применяют в таких областях, как теория алгоритмов, математическая логика, геометрия, теория чисел. К настоящему времени известно, что группа «монстр» имеет глубокие, не раскрытые полностью, связи с теорией эллиптических функций.

Результаты исследований отдельных авторов по классификации простых групп публиковались с 1955 по 1983 г. Когда их стали объединять в одно общее доказательство, занявшее 15 000 журнальных страниц, обнаружились многочисленные пробелы. Спустя 25 лет после первого объявления о том, что теорема доказана, были опубликованы только 5 из 12 томов полного доказательства. Наличие пробелов говорит об отсутствии гарантии надежности доказательства в целом. Еще хуже то, что вряд ли найдется хотя бы дюжина математиков, в достаточной мере понимающих всю логику этого грандиозного труда. Математика столкнулась с проблемой практически непреодолимой сложности доказательств.

Глава 11

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

> Теория вероятностей есть… здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценить с точностью то, что справедливые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея отдать себе в этом отчета.
>
> *П. Лаплас*

Английский физик Дж.К. Максвелл однажды заметил, что истинной логикой для мира является исчисление вероятностей. В XIX в. после блестящих достижений Лапласа и Пуассона многие ученые пытались применить результаты теории вероятностей к самым разнообразным областям человеческой деятельности. Зачастую это делалось необоснованно и приводило ко многим математическим спорам. Повышенный интерес к теории вероятностей сменился полным недоверием. Для теории вероятностей оставили только ряд технических приложений (теорию ошибок, кинетическую теорию газов и т. п.). Теория вероятностей стала считаться разделом физики. Повторный всплеск интереса к ней обнаружился после Первой мировой войны, когда возникла необходимость изучать массовые явления.

В настоящее время теория вероятностей применяется чрезвычайно широко. Создано несколько систем безукоризненно строгого математического обоснования теории вероятностей, новых мощных методов, требующих иногда применения (помимо классического анализа) теории множеств и функционального анализа.

На базе аппарата теории вероятностей появились такие дисциплины, как математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, теория телетрафика и другие. В них математический аппарат теории вероятностей расширяется и применяется к различным моделям и ситуациям.

Несмотря на то что за рубежом интерес к теории вероятностей резко возрос (во Франции – Э. Борель, П. Леви, М. Фреше, в Германии – Р. Мизес, в США – Н. Винер, В. Феллер, Дж. Дуб, в Швеции – Г. Крамер), российская школа теории вероятностей продолжала занимать ведущее положение. В нашей стране новый период развития теории вероятностей открывается деятельностью С.Н. Бернштейна, значительно обобщившего классические предельные теоремы Чебышёва, Ляпунова и Маркова и впервые в России широко поставившего работу по применениям теории вероятностей к естествознанию. В Москве А.Я. Хинчин и А.Н. Колмогоров начали с применения к вопросам теории вероятностей методов теории функций действительного переменного.

В 1930-е годы Хинчин, Колмогоров и Слуцкий заложили основы теории случайных процессов.

В то время как теория вероятностей в СССР активно развивалась, развитие математической статистики тормозилось. Считалось, что при плановом хозяйстве нельзя пользоваться заведомо негодными методами, применяемыми в буржуазной статистике. Она была отнесена к общественным наукам. Поэтому в первой половине XX в. математическая статистика развивалась исключительно зарубежными учеными.

Математическая статистика

К последней трети XIX в. некоторые науки (например, молекулярная физика) достигли такого уровня, что использование в них теории вероятностей и математической статистики стало необходимым. Важную роль в развитии статистики в XIX в. сыграли Адольф Кетле, Фрэнсис Гальтон и Людвиг Больцман.

Особая роль в развитии социальной статистики принадлежит бельгийскому ученому-естествоиспытателю и математику Адольфу Кетле. Он является создателем вероятностных методов обработки социальной информации, инициатором создания национальных статистических обществ в Англии и Франции и Международной статистической ассоциации. Свои идеи он изложил в работе «Социальная физика, или опыт исследования о развитии человеческих способностей» (1835). С помощью теории вероятностей он хотел разработать науку об обществе, имеющую статистическое и естественнонаучное обоснование, которую он назвал «социальной физикой». Кетле устанавливал определенные статистические закономерности событий и действий и соотносил их с состоянием общества таким образом, что становились понятны законы развития общества. Из статистического факта наличия устойчивых числовых корреляций между видами преступлений, полом, происхождением, возрастом, местом проживания и другими характеристиками преступника Кетле делал вывод о том, что некоторое количество и некоторые виды преступлений сопровождают общество с необходимостью закона природы. Стало афоризмом утверждение Кетле, прозвучавшее в докладе 1831 г., о том, что «общество подготавливает преступления, а преступник есть только орудие».

Английский статистик, психолог, антрополог и метеоролог Фрэнсис Гальтон, двоюродный брат Чарльза Дарвина, разработал методы статистической обработки результатов наблюдений (в частности, метод вычисления корреляций между случайными величинами). Он ввел в статистику понятия средней регрессии, коэффициента корреляции, создал биометрическую школу, заложил основы генетики человека. Хотя термин «генетика» вошел в обиход только в 1905 г., результаты Гальтона привлекли всеобщее внимание еще в XIX в.

Австрийский физик-теоретик Людвиг Больцман является основателем статистической механики и молекулярно-кинетической теории. Он показал статистический характер второго начала термодинамики, связав энтропию замкнутой системы с числом возможных микросостояний, реализующих данное макросостояние.

Корреляция и регрессия. Гальтон и его ученики, в том числе Карл Пирсон, ввели такие важные понятия, как «корреляция» и «регрессия», которые стали основными в теории вероятностей и математической статистике, а также в связанных с ними науках.

Коэффициент корреляции описывает зависимость между двумя случайными величинами одним числом, а регрессия выражает эту зависимость в виде функционального соотношения и поэтому дает более полную информацию. Понятие регрессии Гальтон ввел при сравнении роста родителей с ростом их детей. Вначале регрессионный анализ применялся в биологии. Важнейшим научным журналом, в котором освещалась эта тема, был журнал «Биометрика», выходивший с октября 1901 г. В 1920–1930 гг. большое значение приобрело использование регрессионного анализа в экономике, и возникла новая область науки – *эконометрика* (автор термина Р. Фриш).

От изучения частных регрессионных задач исследователи постепенно перешли к регрессионному анализу структуры, присущей глобальным экономическим системам. Исследования в этой области проводили Д. Кейнс, Я. Тинберген, Л. Клейн, которому в 1980 г. была присуждена Нобелевская премия по экономике, и другие ученые. Журнал «Технометрика» выходит с 1959 г. и в основном посвящен техническим приложениям регрессионного анализа.

Метод максимального правдоподобия. Этот метод является одним из наиболее эффективных при оценке неизвестных параметров. Он получил распространение в 20-е годы XX в. благодаря работам английского статистика и генетика Роналда Фишера. Именно его статья, написанная в 1912 г., сыграла решающую роль.

Интервальное оценивание. Теория интервального оценивания была разработана преимущественно Р. Фишером и американским математиком Ежи Нейманом в 1925–1935 гг. Доверительный интервал Неймана содержит неизвестный параметр с заданной вероятностью. В отличие от выборки экспериментальных данных этот параметр не случаен. При другом подходе к интервальному оцениванию случайным считают, наоборот, неизвестный параметр. Такой вид интервальных оценок, называемых фидуциальными интервалами, ввел Фишер. Он начал заниматься интервальными оценками немного раньше, чем Нейман, которого Фишер обвинил в присвоении своих идей.

В случае нормального распределения доверительные и фидуциальные интервалы формально совпадают; различается только их «философия». В течение некоторого времени считали, что эти два вида интервалов практически совпадают и что споры о различии между доверительными и фидуциальными интервалами являются чисто теоретическими. Однако вскоре обнаружились парадоксы, имеющие практическое значение. Разные подходы Неймана и Фишера привели и к различным результатам в приложениях. В 1959 г. К. Стейн указал на чрезвычайно парадоксальный случай, когда доверительный и фидуциальный интервалы могут сильно различаться.

Проверка статистических гипотез. Основоположниками современной теории проверки статистических гипотез были К. Пирсон, Э. Пирсон, Р. Фишер и Е. Нейман. Для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины К. Пирсон, Х. Крамер, Р. Мизес, А.Н. Колмогоров,

Н.В. Смирнов и другие предложили несколько различных критериев. Вскоре возникла необходимость сравнить эффективность этих критериев.

При определении интервальных оценок и проверке статистических гипотез широко используется распределение Стъюдента. Оно было предложено англичанином Уильямом Госсетом в 1908 г., известного под псевдонимом Стъюдент.

Э. Пирсон и Е. Нейман сделали первые шаги в работе по исследованию теоретических задач на нахождение лучших методов принятия решений. Они ввели понятие альтернативной гипотезы, которая в общем случае не является полным отрицанием проверяемой («нулевой») гипотезы и понятие ошибок первого и второго родов.

При проверке гипотез теория Неймана и Пирсона стала основной, однако, не лишенной парадоксов. В 1950 г. Герберт Роббинс показал, что существует критерий, который в некотором смысле является более мощным, чем критерий Неймана – Пирсона.

В классической теории математической статистики предполагается, что элементы выборки заранее известны. В основе одного из важнейших направлений современной статистики лежит понимание того, что не нужно фиксировать заранее объем выборки, его следует определять в зависимости от результатов более ранних наблюдений. Таким образом, объем выборки случаен. Эта идея последовательного выбора постепенно развивалась в работах многих ученых, но основателем теории последовательного анализа в математической статистике является американский математик Абрахам Вальд. Его последовательный критерий отношения правдоподобия, разработанный в 1943 г., стал важным открытием, позволившим в типичных ситуациях на 50 % уменьшить среднее число наблюдений (при тех же вероятностях ошибок). Неудивительно, что в годы Второй мировой войны открытие Вальда было объявлено «секретным». Его основная работа «Последовательный анализ» опубликована лишь в 1947 г. Спустя год он и Дж. Вольфовиц доказали, что методы, отличные от последовательного критерия отношения правдоподобия, не дают такого уменьшения числа элементов выборки.

Карл Пирсон

Английский математик, биолог и философ Пирсон Карл родился 27 марта 1857 г. в Лондоне в семье адвоката. До девяти лет он получал домашнее образование, затем учился в частной школе Университетского колледжа. В 1876 г. Карл начал изучать математику в Королевском колледже в Кембридже, который с отличием окончил в 1879 г. Вскоре Пирсон получил право на стипендию с 1880 по 1886 г., что дало ему финансовую независимость и возможность продолжить образование. В 1879–1880 гг. Карл был в Германии, где в Берлине и Гейдельберге изучал физику, философию, римское право, биологию, немецкую литературу и дарвинизм.

После возвращения в Лондон Пирсон увлекся и даже преподавал право, но затем занялся математикой. Он с 1881 г. замещал профессора математики

в Королевском колледже, в 1884 г. стал профессором кафедры прикладной математики и механики, а в 1907 г. – заведующим кафедрой прикладной математики.

В 1890 г. Пирсон женился на Мэри Шарп, у них родились две дочери и сын. После смерти жены в 1928 г. Пирсон женился на Маргарите, дочери коллеги из Университетского колледжа.

Научные интересы Пирсона охватывали все вопросы математической статистики, а также биологию, эпидемиологию, антропометрию, медицину и социальную историю. В 1901 г. совместно с Уэлдоном и Гальтоном он основал посвященный вопросам статистики журнал «Биометрика», редактором которого оставался до конца жизни. В 1925 г. им основан еще один журнал «Анналы евгеники» (в настоящее время «Анналы генетики человека»).

Статистикой Пирсон увлекся после знакомства с Френсисом Гальтоном, который в 1870-х годах разработал методику психометрических измерений и ввел понятия регрессии и корреляции. Пирсон был продолжателем исследований Гальтона, после смерти которого в 1911 г. стал заведующим основанной Гальтоном кафедры евгеники (кафедры генетики). Позже он основал кафедру прикладной статистики и руководил ею до отставки в 1933 г.

Пирсон разработал теорию линейной регрессии и теорию корреляции. Основными понятиями, введенными Пирсоном в практику, являются коэффициент корреляции, среднее квадратическое отклонение, распределение «хи-квадрат», которое также называют распределением Пирсона, и критерий согласия «хи-квадрат» в проверке статистических гипотез. В 1896 г. им рассмотрено семейство кривых, охватывающее 12 типов распределения плотностей вероятностей, которые описаны одним дифференциальным уравнением, зависящим от четырех параметров. Позже эти кривые были названы кривыми Пирсона.

По мнению датского математика Андерса Хальда, в 1892–1911 гг. Пирсон создал свое собственное царство математической статистики и биометрики, господствуя в нем и ограждая его все расширявшиеся пределы от атак извне. Им введено в рассмотрение свыше 30 терминов, опубликовано около 650 работ, из которых 450 относятся к статистике. Его труды по математической статистике можно сгруппировать следующим образом: теория кривых распределения, критерий согласия, теория корреляции, теория статистических ошибок.

Карл Пирсон иногда был невосприимчив и враждебен к чужим достижениям ученых в области статистики. Он препятствовал публикациям исследований других ученых, считая их результаты ошибочными. Роналду Фишеру Пирсон предложил для работы в лаборатории Гальтона неприемлемые условия, ограничивающие возможность публикаций и преподавания. Фишер вынужден был уйти работать на маленькую опытную станцию. Он препятствовал публикации результатов исследований Ежи Неймана, заявив, что то, что справедливо в Польше, неверно в Англии.

Книга Пирсона «Грамматика науки» (1892) оказала заметное влияние на целое поколение ученых. Темы, изложенные в ней, стали частью теории

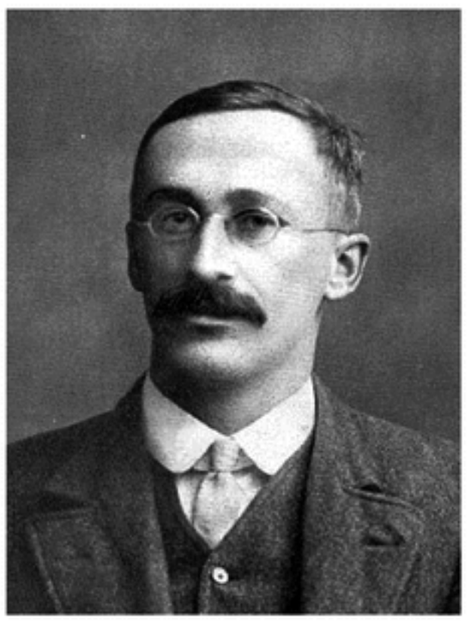
относительности Эйнштейна, который рекомендовал книгу для обязательного прочтения молодым коллегам. Кроме относительности времени и пространства, в книге обсуждалось четвертое измерение, антивещество и складки времени. В нашей стране философское творчество Пирсона известно мало. Это можно объяснить тем, что о нем как о философе негативно отзывался В.И. Ленин. В 1909 г. он назвал Пирсона добросовестным и честным врагом материализма, одним из самых последовательных и ясных махистов. При жизни Пирсона считали вольнодумцем и социалистом. Он читал лекции об эмансипации женщин, отказался в 1920 г. от ордена Британской империи, а в 1935 г. – от звания рыцаря.

Карлом Пирсоном опубликовано более 300 работ. Он исследовал статистические методы изучения наследственности и эволюции, вопросы астрономии, метеорологии, строительства плотин, альбинизма у людей и животных, алкоголизма, умственной отсталости, туберкулеза, психических заболеваний и т. д. Он был поэтом, эссеистом, историком, философом.

В 1933 г. Карл Пирсон вышел на пенсию.

Умер Карл Пирсон 27 апреля 1936 г. в возрасте 79 лет.

Уильям Госсет (Стъюдент)



Английский математик и статистик Госсет Уильям Сили более известен под псевдонимом Стъюдент. Он родился 13 июня 1876 г. в Кентербери и был старшим из пяти детей в семье полковника Фредерика Госсета и Агнес Сили Видал. Сначала Уильям учился в Королевской военной академии, которую не смог окончить из-за плохого зрения, а затем в Новом Оксфордском колледже, в котором изучал химию и математику. В 1897 г. он получил ученую степень по математике, а в 1999 г. – по химии.

Госсет работал химиком в исследовательской лаборатории пивовара Гиннеса в Дублине, открытой в 1900 г. Известно, что качество пива зависит от многих факторов. В лаборатории пытались найти оптимальный способ получения хорошего продукта из недорогих составляющих. Исследовались комбинации различных сортов ячменя и хмеля, условия их выращивания и созревания, количество дрожжей и способы их брожения. В обязанности Госсета входил статистический анализ получаемых результатов.

Обрабатываемые выборки были малыми, и имеющийся математический аппарат, который соответствовал большим выборкам, имел высокую погрешность. Для повышения квалификации Госсет был отправлен в лабораторию Гальтона к Карлу Пирсону, где сумел получить выдающиеся результаты.

Один из сотрудников лаборатории Гиннеса ранее раскрыл в статье коммерческую тайну, поэтому Гиннес запретил сотрудникам публиковать полученные ими результаты. Госсет решил опубликовать свое открытие под

псевдонимом, чтобы хозяин не узнал о нарушении приказа. Статья с новым результатом была напечатана в журнале «Биометрика» под псевдонимом Стъюдент (студент), который соответствовал возрасту автору открытия. Если для больших выборок использовался нормальный закон, то для малых Госсет ввел новое распределение плотности вероятностей, которое точно учитывало объем выборки. Одна из переменных величин в формуле плотности вероятностей имеет распределение хи-квадрат, ранее введенное Карлом Пирсоном. Новое распределение было названо распределением Стъюдента. Это распределение широко используется в дисперсионном анализе и при проверке статистических гипотез. Публикации Госсета под псевдонимом продолжали появляться в «Биометрике». Самый важный результат был опубликован в 1908 г. Статьи Госсета были востребованы другими исследователями в области математической статистики, на них нередко ссылались, и уже вскоре многие знали о Стъюденте.

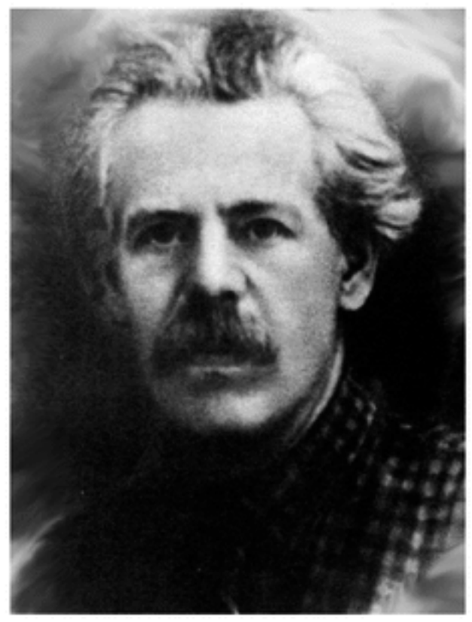
Госсет был добрым, терпеливым человеком и находился в хороших отношениях и с Карлом Пирсоном, и с Роналдом Фишером, которые не могли терпеть друг друга. Фишер восхищался Госсетом и называл его Фарадеем статистики. Их взгляды во многом совпадали, исключением в 1930 г. стал вопрос о рандомизации.

В 1934 г. Госсет попал в автомобильную катастрофу, в результате чего оказался прикован к постели на три месяца. В больнице он напряженно занимался исследованиями в области математической статистики.

В 1935 г. Госсет уехал из Дублина и стал ответственным за научную сторону производства в лондонской пивоварне.

Умер он 16 октября 1937 г. от сердечного приступа.

Е.Е. Слуцкий



Слуцкий Евгений Евгеньевич родился 7 апреля 1880 г. в селе Новое Мологского уезда Ярославской области в семье наставника (учителя-воспитателя) Новинской учительской семинарии. В 1886 г. его отец лишился должности из-за нежелания покрывать директора-казнокрада. Семья сначала жила в Киеве, затем переехала в Житомир, где отец получил должность заведующего еврейским училищем.

В 1899 г. Слуцкий с золотой медалью окончил классическую гимназию и поступил на математическое отделение физико-математического факультета Киевского университета. В январе 1901 г. состоялась сходка, участники которой требовали возвращения в университет двух отчисленных товарищей. После этого происшествия Слуцкий в числе 184 студентов был сдан в солдаты. Начались студенческие беспорядки в Москве и Петербурге. Слуцкий вернулся в университет, но в начале 1902 г. был уволен без права поступления в высшие учебные заведения России за участие в демонстрации против министра Зенгера.

Слуцкому удалось уехать в Германию, и с 1902 по 1905 г. он учился в Мюнхенском политехникуме на машиностроительном отделении. В 1905 г. появилась возможность вернуться в Россию. Евгений Евгеньевич воспользовался ею. Слуцкий стал учиться на юридическом факультете Киевского университета, который окончил в 1911 г. Дело в том, что студенты байкотировали экзамены в 1906 г., и на год Слуцкого еще раз исключали из университета.

Работать юристом Слуцкий не стал, в 1911 г. увлекся математической статистикой, в основном работами Карла Пирсона. В 1912 г. вышла в свет книга Слуцкого «Теория корреляций», получившая положительный отзыв критиков. Благодаря этой книге в 1913 г. он был приглашен в Киевский коммерческий институт народного хозяйства, в котором работал до 1926 г. сначала рядовым преподавателем, затем доцентом и профессором. Он читал курсы по математической статистике, позже перешел к экономике. В 1916–1917 гг. Слуцкий сдал экзамены на степень магистра политической экономии при Московском университете.

В 1926 г. Евгений Евгеньевич переехал в Москву, где заведовал сельскохозяйственной секцией Института экспериментальной статистики и статистической методологии ЦСУ СССР, был консультантом Конъюнктурного института Наркомата финансов СССР, позднее работал в институтах, связанных с геофизикой и метеорологией, исследовал влияние солнечной активности на урожаи, динамику урожаев в России за 115 лет, динамику цен на пшеницу в Англии за 369 лет, годовые приросты секвой за 2000 лет. Им выведена формула средней квадратической ошибки коэффициента корреляции для случайных величин, составляющих стационарный временной ряд.

В 1934 г. Слуцкий перешел в НИИ математики и механики при МГУ, возглавил кафедру математической статистики и получил без защиты диссертации ученую степень доктора физико-математических наук. Ему не нравилась работа преподавателя, поэтому в 1939 г. он перешел в Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР и занялся теорией случайных процессов. Идеи Слуцкого использовались в США для борьбы с кризисом. В это время в нашей стране случайные процессы исследовали также Хинчин и Колмогоров. Но если Хинчин занимался теорией стационарных случайных процессов, Колмогоров изучал диффузию и броуновское движение, то Слуцкий исследовал случайные явления природы, имеющие периодический или почти периодический характер.

Слуцкий интересовался не только математикой. Евгений Евгеньевич был большим знатоком поэзии и живописи. В 1926 г. он перевел на русский язык Песню 35 из «Книги жертвенных песен» Р. Тагора.

Перед войной Слуцкий начинал работу по вычислению таблиц неполной гамма-функции. Составлением этих таблиц, а также таблиц обратной неполной бета-функции он занимался в Ташкенте во время войны. Слуцкий разработал свой метод табулирования этих функций на арифмометре, поскольку других приспособлений для расчетов не было.

Во время войны при переезде из одного города в другой у Слуцкого пропал чемодан со статистическими данными, которые он собирал в течение

многих лет. В чемодане были результаты обработки материалов об изменении климата Северной Америки за несколько тысяч лет и данные о солнечных затмениях со времени Вавилонского царства.

После возвращения из эвакуации у Слуцкого был обнаружен рак легких. Скончался Евгений Евгеньевич 10 марта 1948 г.

Роналд Фишер

Английский статистик Фишер Роналд Эйлмер родился 17 февраля 1890 г. в лондонском Ист-Финчли в семье успешного торговца предметами изящного искусства. Его мать умерла, когда Рональду было 14 лет, а отец, проведя несколько неудачных сделок, обанкротился через полтора года после смерти жены.

С детства у Фишера было плохое зрение, он учился без конспектов, решая все задачи в уме. Помимо математики, он увлекался биологией, теорией эволюции.

В 1909 г. Роналд Фишер поступил в Кембриджский университет. Он увлекся евгеникой, теорией о наследственном здоровье человека и путях его улучшения, пытаясь объединить вопросы генетики и статистики. После окончания университета в 1913 г. Фишер хотел служить в армии, но не прошел медицинскую комиссию. До 1919 г. он работал статистиком в Сити (центр Лондона) и преподавал физику и математику в частных школах.

Научная работа Фишера была посвящена применению математической статистики в биологии. В 1915 г. опубликована его работа о коэффициенте корреляции, а в 1918 г. он исследовал на основе законов Менделя корреляционные зависимости между родственниками. Эти исследования привели к развитию биометрической генетики.

В 1917 г. Фишер женился. У него родились два сына и семь дочерей, одна из которых умерла в младенчестве. Старший сын стал летчиком, но погиб в 1943 г.

С 1917 г. стали портиться отношения между К. Пирсоном и Фишером. Пирсон предложил Фишеру работу в его лаборатории, но условия, которые он предложил, были неприемлемы для Фишера. Он отказался и в 1919 г. начал работать на маленькой Ротамстедской опытной станции при научно-исследовательском сельскохозяйственном институте, одном из старейших и крупнейших в Великобритании. Он занимался научной обработкой статистических данных, накопленных в течение многих десятилетий. Целью было выявление условий, при которых испытываемый сорт сельскохозяйственной культуры дает максимальный урожай.

В 1925 г. Фишер опубликовал книгу «Статистические методы для исследователей», которая выдержала 14 изданий, стала настольной книгой для ученых, работающих в различных областях науки, и была переведена на многие языки. В книге изложен разработанный Фишером дисперсионный анализ – метод математической статистики, предназначенный для выявления

влияния отдельных факторов на результат эксперимента, а также для последующего планирования аналогичных экспериментов. В дальнейшем дисперсионный анализ стал применяться для решения многих задач экономики, социологии, биологии и техники, в которых требуется выявить систематические различия между результатами непосредственных измерений, выполненных при тех или иных изменяющихся условиях.

Карл Пирсон – создатель математической статистики и биометрики, а Фишер – автор наиболее значимых результатов в этих областях науки. В 1929 г. Фишер был принят в Королевское научное общество и получил титул пэра. Его стали приглашать за рубеж. В 1931 г. он читал лекции в статистической лаборатории в университете штата Айова США, где познакомился с Джорджем Снедекором. В 1933 г., после ухода в отставку Карла Пирсона, Фишер стал профессором евгеники Лондонского университета и ушел из Ротамстедской опытной станции. Ни одной своей работы Фишер не опубликовал в журнале «Биометрика», главным редактором которого был Карл Пирсон.

Фишер ввел новые понятия в математическую статистику, например, «дисперсия» и «достаточная статистика». Идеи метода максимального правдоподобия были известны до исследований Фишера, но именно его работы повлияли на распространение этого эффективного метода оценки неизвестных параметров. Им построена теория точечных и интервальных статистических оценок и внесен существенный вклад в создание теории статистической проверки гипотез. Совместно со Снедекором он ввел не используемое ранее распределение случайной величины (F-распределение).

Фишером опубликовано шесть книг, и все они неоднократно переиздавались. Несколько изданий выдержала «Генетическая теория естественного отбора» (1930), вторая по значимости книга, посвященная теории эволюции, после книги Ч. Дарвина. Восемь изданий выдержала книга «Планирование эксперимента» (1935), ставшая настольной для многих ученых. Фишером опубликовано около 300 статей, огромным является его эпистолярное наследие.

Выдающийся специалист в области математической статистики, Фишер призывал осторожно относиться к результатам статистических исследований. Им показано, что между курением и заболеванием раком легких корреляция такая же, как между количеством импорта яблок и ростом числа разводов. Этот пример свидетельствует о том, что корреляция не всегда указывает на причинно-следственную связь.

С 1943 г. Фишер начал работать в Кембриджском университете и продолжал заниматься генетикой. Он был избран членом многих национальных академий, имел почетные степени ряда университетов, в 1952 г. был посвящен в рыцари. В 1957 г. Фишер вышел на пенсию, но продолжал поддерживать контакты с Кембриджским университетом. В 1959 г. он переехал в Аделаиду (Австралия), где работал научным сотрудником Содружества по научным и промышленным исследованиям.

29 июля 1962 г. Роналд Фишер умер в Аделаиде от рака толстой кишки.

Ежи Нейман

Американский математик и статистик Нейман Ежи родился 16 апреля 1894 г. в городе Бендеры Бессарабской губернии в польской католической семье адвоката Чеслава Неймана и Казимиры Лютославской. Он был младшим из четверых детей. Семья жила в Херсоне, Мелитополе и Симферополе. В 1906 г. после смерти отца Ежи уехал к родственникам в Харьков. Там он окончил гимназию и в 1912 г. поступил в Харьковский университет, где был учеником С.Н. Бернштейна. Он владел пятью языками: польским, украинским, русским, французским и немецким. Из-за плохого зрения его не взяли в армию во время Первой мировой войны, и он продолжил учебу в университете. После защиты диплома в 1917 г. Нейман был оставлен в университете для научной и преподавательской деятельности. Здоровье его пошатнулось: он заболел туберкулезом. 4 мая 1920 г. Нейман женился на Ольге Солодовниковой, а уже через 10 дней во время Советско-польской войны был арестован и около полутора месяцев находился под стражей.

В 1921 г. Нейман уехал в Польшу и устроился на работу в сельскохозяйственный институт города Быдгоща, в декабре 1922 г. принят на работу в Государственный метеорологический институт в Варшаве. В 1923 г. он предложил идею рандомизированного эксперимента. В 1923–1934 гг. Ежи Нейман преподавал в Варшавском и Краковском университетах, колледже Лондонского университета. В 1924 г. он получил ученую степень доктора философии в Варшавском университете. В 1925 г. после получения стипендии Рокфеллера для завершения образования Нейман работал в Лондоне с Карлом Пирсоном, где подружился с его сыном Эгоном. В 1926 г. в Париже он учился у Бореля, Лебега и Адамара.

Основные научные труды Неймана могут быть отнесены к математической статистике и теории вероятностей. Его исследования относятся к теории статистических выводов и методологии принятия решений в условиях неопределенности. Они нашли широкое применение в научных исследованиях в астрономии, физике, биологии, медицине – везде, где необходимо снижать частоту ошибок.

В 1927 г. Нейман вернулся в Польшу и организовал в Варшаве биометрическую лабораторию, а в 1928 г. – Институт экспериментальной биологии.

Между 1928 и 1933 гг. Нейман и Эгон Пирсон выполнили несколько важных совместных работ по проверке статистических гипотез и сформулировали критерий, позже названный критерием Неймана – Пирсона. После ухода Карла Пирсона в отставку в 1933 г. Эгон Пирсон занял место отца, а Ежи Нейман был приглашен в Лондон на кафедру прикладной статистики. Эту должность он занимал до отъезда в Америку (1938). В 1934 г. Нейман ввел в рассмотрение понятие доверительного интервала.

Значительная часть исследований проведена Нейманом под влиянием идей Фишера, но при работе в одной организации между ними возникли

трения. У. Госсет, Р. Фишер, Е. Нейман и Э. Пирсон решали сходные задачи, связанные с обработкой малых выборок случайных величин, подчиняющихся законам распределения, отличных от нормального. Отношения между ними были корректными, исполненными взаимного уважения, хотя точки зрения часто не совпадали. Критику Фишера вызвали исследования Е. Неймана в области теории доверительных интервалов и проверки статистических гипотез.

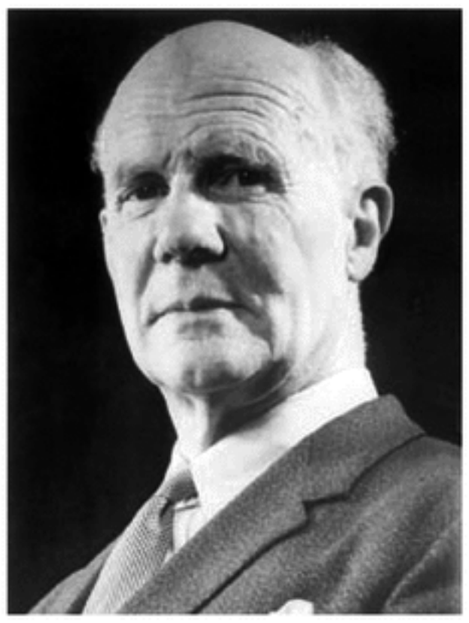
Весной 1937 г. Ежи Нейман в течение шести недель читал лекции в университетах США. В 1938 г. его пригласили на работу в Калифорнийский университет в Беркли для создания центра по подготовке американских статистиков и преподавание теории вероятностей и математической статистики. Во время Второй мировой войны Нейман принимал участие в разработке американской атомной бомбы.

В 1963 г. Ежи Неймана избрали членом Национальной академии США. В последние годы научной деятельности Ежи Нейман занимался приложением математической статистики в медицине и метеорологии.

За выдающийся вклад в науку Ежи Нейман был неоднократно награжден, в том числе медалью Королевского статистического общества (1966) и научной медалью американского президента Джонсона (1969).

Умер Ежи Нейман 5 августа 1981 г. в Окленде (Калифорния, США).

Эгон Пирсон



Пирсон Эгон Шарп был единственным сыном известного математика Карла Пирсона, имел двух сестер. Родился Эгон 11 августа 1895 г. в Лондоне. С 1907 по 1909 г. он учился в одной из оксфордских школ, затем перешел в школу в Винчестере, которую окончил в 1914 г. Из-за шумов в сердце его в начале Первой мировой войны не взяли в армию, поэтому Эгон поступил в Тринити-колледж в Кембридже. В 1915 г. он оставил учебу и отправился работать в Адмиралтейство, чтобы внести собственный вклад в дело защиты родины. После окончания Тринити-колледжа в 1920 г. он некоторое время занимался физикой солнца.

В 1921 г. Эгон Пирсон начал работать на кафедре прикладной статистики Университетского колледжа в Лондоне, которой руководил его отец. В печати стали появляться статьи Пирсона по математической статистике. В 1924 г. Эгон Пирсон стал помощником редактора журнала «Биометрика». Он подружился с Ежи Нейманом, который приехал в Лондон в качестве рокфеллеровского стипендиата. Началось их научное сотрудничество, в котором лидером был Пирсон.

Эгон стал главным помощником отца. Карл Пирсон сотрудничал с Вильямом Госсетом и находился в натянутых отношениях с Рональдом Фишером и Ежи Нейманом. Госсет был дружен со всеми и старался наладить отношения между Фишером и Эгоном Пирсоном. Эгон понимал важность результатов,

полученных Фишером, поэтому стремился примирить его со своим отцом. Сделать это было нелегко, так как каждый из этих выдающихся математиков имел свое мнение по исследуемым вопросам (теории статистических выводов, теории доверительных интервалов, проверки статистических гипотез, планирования экспериментов) и считал его единственно правильным. Они ревностно относились к публикациям друг друга, но все же вели переписку, в которой обменивались замечаниями.

В 1926 г. Эгон Пирсон получил право читать лекции.

Наиболее активным периодом сотрудничества Эгона Пирсона и Ежи Неймана было десятилетие с 1928 по 1938 г. Они разрабатывали математический аппарат проверки статистических гипотез, сформулировали критерий оптимизации стратегии при проверке гипотез, получивший название «критерий Неймана – Пирсона».

В 1931 г. Эгон Пирсон посетил США, где прочитал лекцию по статистике и договорился об организации статистических исследований в Англии. После выхода Карла Пирсона в отставку в 1933 г., Эгон унаследовал занимаемые отцом должности.

В 1935 г. Эгон Пирсон был награжден премией и медалью Уэлдона за бескорыстную государственную службу. После смерти отца в 1936 г. Эгон меньше уделял времени научным исследованиям, он занимался организационной работой и переизданием книг отца.

Вскоре после начала Второй мировой войны Эгон Пирсон уехал из Лондона и начал заниматься исследованием операций – новым разделом математики, решавшим в то время исключительно оборонные задачи. Кроме того, Пирсон изучал характеристики рассеивания немецких баллистических ракет и проводил статистические исследования результатов стрельбы по воздушным целям. С 1943 г. он работал в Кембридже, в 1946 г. был награжден за успехи в решении оборонных задач.

В 1949 г. от воспаления легких умерла жена, с которой Пирсон прожил в браке 13 лет.

В 1955–1956 гг. он занимал пост президента Королевского статистического общества. В 1961 г. ушел из Университетского колледжа в Лондоне, а в 1966 г. перестал редактировать журнал «Биометрика». В 1966 г. Пирсон женился во второй раз. Вскоре переехал в Кембридж, где жил до 1975 г., после чего переехал в Западный Лавингтон в Суссексе.

Умер Эгон Пирсон 12 июня 1980 г. в Лондоне.

Теория вероятностей

Практически все основные идеи современной теории вероятностей берут свое начало в нашей стране. До работ математиков петербургской математической школы во главе с П.Л. Чебышёвым не существовало строгого доказательства центральной предельной теоремы. Чебышёв начал систематически изучать последовательности взаимно независимых случайных величин. Его статья «О средних величинах», представленная Петербургской академии наук в 1866 г., была напечатана в следующем году во втором томе

«Математического сборника». Впервые неравенство Чебышёва было четко сформулировано, доказано и применено к выводу обобщенного закона больших чисел, но несколько раньше это неравенство получил в иной форме французский математик Жюль Бьенеме в работе о методе наименьших квадратов (1853). В зарубежных учебниках оно называется неравенством Бьенеме – Чебышёва.

Статья «О средних величинах» и вторая работа Чебышёва по теории вероятностей (1887), в которой он распространил на суммы случайных величин предельную теорему Муавра – Лапласа, открыли новую эпоху в развитии теории вероятностей. По этому поводу Колмогоров писал: «Вывел русскую теорию вероятностей на первое место в мире Пафнутий Львович Чебышёв. С методической стороны основной переворот, совершенный Чебышёвым, заключался не только в том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютной строгости доказательства предельных теорем (выводы Муавра, Лапласа и Пуассона были с формально-логической стороны совсем не безупречны, в отличие, впрочем, от Я. Бернулли, который свою предельную теорему доказал с исчерпывающей арифметической строгостью), но главным образом в том, что Чебышёв всюду стремился получать точные оценки отклонений от предельных закономерностей, возможных хотя бы и при большом, но конечном числе испытаний, в виде безусловно правильных при любом числе испытаний. Далее Чебышёв впервые ясно оценил и использовал всю силу понятий “случайная величина” и “математическое ожидание” (среднее значение) случайной величины. Понятия эти были известны и ранее и являются производными от основных понятий “событие” и “вероятность”. Но случайные величины и их математические ожидания подчинены гораздо более удобному и гибкому алгоритму» [44].

Предельные теоремы Чебышёва затем были распространены на более широкие классы случайных величин А.А. Марковым, А.М. Ляпуновым, С.Н. Бернштейном, А.Я. Хинчиным, А.Н. Колмогоровым и другими учеными.

В 1900 г. на II Международном математическом конгрессе в Париже Гильберт среди 23 важнейших нерешенных проблем в математике назвал проблему построения оснований теории вероятностей. Хотя на рубеже веков в теории вероятностей было получено много выдающихся результатов, из-за отсутствия математических оснований эта теория в целом еще не была одним из разделов математики. Ее чаще относили к физике. В этом заключалась, видимо, главная причина того, что Ф. Клейн даже не упомянул теорию вероятностей в своей работе «Лекции о развитии математики в XIX столетии».

Первая попытка обоснования теории вероятностей в 1917 г. принадлежит С.Н. Бернштейну. Он поставил перед собой следующую цель: построить на базе создаваемой им системы аксиом безупречную теорию математической статистики и показать, как можно строго и точно изучать важнейшие проблемы естествознания. Бернштейн исследовал двумерный нормальный закон и показал его применимость к задачам биологии. Им показано, что закон Гальтона о наследовании количественных признаков не противоречит законам Менделя, а является их следствием.

О сложности вопросов обоснования теории вероятностей можно судить по высказыванию Рассела на лекции в 1929 г., согласно которому вероятность – важнейшее понятие в современной науке особенно потому, что никто совершенно не представляет, что оно означает.

Используя результаты работ многих математиков, в особенности Э. Бореля, А. Ломнитского, а также теорию множеств и теорию меры, Колмогоров в 1933 г. построил математически строгую теорию вероятностей. В основе разработанной им теории лежит утверждение, что любое событие, вероятность которого мы хотим найти, может быть представлено в виде некоторого подмножества множества элементарных событий. Каждому наблюдаемому событию приписывается некоторое неотрицательное число, называемое вероятностью этого события, таким образом, чтобы вероятность достоверного события была равна единице и выполнялось свойство сигма-аддитивности.

Метод Монте-Карло. Это численный метод, основанный на моделировании случайных величин и построении статистических оценок для искомых величин. Вместо того, чтобы описывать случайное явление с помощью аналитических зависимостей, производят его моделирование с помощью процедуры, которая дает случайный результат, т. е. одну реализацию случайного явления. После неоднократного проведения такой процедуры, получают статистический материал, который можно обработать обычными методами математической статистики. Нередко такой прием оказывается проще, чем попытки построения аналитической модели явления и исследования зависимостей между его параметрами на этой модели. Для сложных операций, в которых задействовано большое число элементов, а случайные факторы сложным образом взаимодействуют между собой, метод статистических испытаний, как правило, оказывается проще аналитического.

Идея метода Монте-Карло впервые появилась в 1777 г. в работе французского естествоиспытателя Бюффона, где излагался метод оценки числа π путем бросания иглы наугад. Хотя идея метода довольно стара, его широкое применение началось в 1949 г., когда Е. Нейман, С. Улам и Э. Ферми использовали метод Монте-Карло для приближенного решения трудных вычислительных задач, связанных с созданием атомных реакторов.

Название метода объясняется тем, что в нем применяются последовательности случайных чисел, в качестве которых могли бы выступать регулярно объявляемые результаты игр, проводимых в казино, например в Монте-Карло. Однако на практике случайные числа, необходимые для реализации метода, выдает сам компьютер. Следовательно, данное название метода, впервые использованное Н. Метрополисом и С. Уламом, скорее вводит в заблуждение непосвященных и вряд ли поможет выиграть в казино Монте-Карло.

Последовательности псевдослучайных чисел, генерируемые на ЭВМ специальными алгоритмами, применяются довольно широко. Их используют для численного интегрирования и численного решения дифференциальных уравнений, но главное – при моделировании на ЭВМ физических, химических,

биологических, технических и экономических процессов, а также для решения задач уличного движения, транспортных и других оптимизационных задач и создания астрономических моделей.

Характеристические функции. Основные теоремы в классической теории вероятностей, такие как закон больших чисел, предельные теоремы, связаны с распределением суммы независимых случайных величин и опираются на свойства слагаемых этих сумм. Обратными этим теоремам о композиции являются теоремы о декомпозиции, или факторизационные теоремы, в которых распределение суммы известно, и хотят получить какую-либо информацию о возможных слагаемых или факторах. Как в теоремах о композиции, так и в теоремах о декомпозиции, важную техническую роль играют характеристические функции случайных величин. Характеристическая функция случайной величины X определяется как математическое ожидание комплексной случайной величины e^{itx}. Каждая случайная величина имеет характеристическую функцию, которая однозначно определяет функцию распределения этой величины. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. Из этих свойств ясно, почему характеристические функции столь важны при решении задач, связанных с композицией и факторизацией.

Характеристические функции использовали в своих трудах еще в 1853 г. Коши и в начале XX в. А.М. Ляпунов. С 1920-х годов под влиянием работ Д. Пойа и Г. Леви характеристические функции часто применяются учеными для решения проблем о композициях. В 1930-х годах на основе теорем Крамера, Хинчина и Райкова возникает теория декомпозиции.

Теория вероятностей в квантовой физике. Методы теории вероятностей широко использовались в физике уже в XVIII в. Классическая статистическая физика начиналась с идеи о том, что равновесие системы, состоящей из большого числа частиц, есть наиболее вероятное ее состояние. Считалось, что методы статистической физики лишь приближенно описывают макроскопическое поведение системы. Однако в результате вероятностной интерпретации квантовой физики случайность и вероятность стали неотъемлемой частью всей физики. Вероятность стала столь же фундаментальным понятием, как, например, энергия. Даже Эйнштейну не нравились эти радикальные изменения в основаниях физики. В письме к Максу Борну, который получил Нобелевскую премию по физике за вероятностную интерпретацию волновой функции в квантовой механике, он написал, что верит в существование совершенных законов природы: «Бог не играет в кости» [41]. В своем ответе Борн объяснил, что вместо решения большого числа дифференциальных уравнений в некоторых случаях можно получить приемлемые результаты, бросая игральную кость. Время подтвердило правоту Борна.

Новый подход к пониманию роли теории вероятностей повлиял и на философию: механистический детерминизм потерял свое главенствующее положение. Будущее состояние мира не полностью определяется его совре-

менным состоянием. На основе знаний в настоящем можно определить лишь вероятность событий, которые произойдут в будущем. Волновая теория де Бройля и Шрёдингера, принцип неопределенности Гейзенберга, работы Борна привели к созданию новой квантовой теории вероятностей (1926–1929). Математическая теория вероятностей Колмогорова была построена приблизительно в это же время. Выявление связей между двумя теориями началось значительно позже, почти 20 лет спустя. Важную роль здесь сыграла работа Дж. Макки, основанная на более ранних исследованиях фон Неймана. В конце концов, была разработана общая единая теория вероятностей, которая включила в себя и классическую, и квантовую.

А.Я. Хинчин

Хинчин Александр Яковлевич родился 7 июля 1894 г. в селе Кондрово Медынского уезда Калужской губернии в семье главного инженера бумажной фабрики. После окончания реального училища в 1911 г. поступил в Московский университет на математическое отделение физико-математического факультета.

В юности Александр увлекался поэзией. Выпустил четыре подражательных (Бальмонту и Блоку) стихотворных сборника: «Стихотворения» (1910), «Пленение» (1912), «О деве с тайной в светлом взоре» (1914), «Слова, которым нет прощения» (1915). Александр Блок советовал Хинчину найти в поэзии свой путь. Сам Хинчин считал, что математикам занятия поэзией помогают формулировать мысль. Он был не только знатоком поэзии, но и очень любил музыку как классическую, так и песенную, в совершенстве знал немецкий язык, свободно говорил по-французски, читал книги на английском языке. Еще в гимназии он интересовался театральным искусством, был дружен с Владимиром Маяковским и многими артистами Художественного театра. Он даже организовал в Кондрове театр, в котором был режиссером. Спектакли ставились в приспособленном для этой цели большом сарае. Иногда билеты за вход объявлялись платными, и на собранные средства труппа в полном составе выезжала в Москву, чтобы посетить спектакли МХАТа.

Научной работой Хинчин начал заниматься на втором курсе. Его первый результат (1914) был включен в четвертую главу диссертации Лузина. Этот результат относится к задаче обобщения понятия производной, сформулированной Б.К. Млодзиевским в 1904 г. Свои исследования по асимптотическим производным Хинчин использовал (1916) для обобщения интеграла Данжуа. Немного времени спустя сам Данжуа опубликовал такое же обобщение, и в мировой литературе этот интеграл носит имя Данжуа – Хинчина.

В 1916 г. после окончания университета Хинчин был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Его педагогическая деятельность началась в 1918 г. в Московском женском политехническом институте. В Граж-

данскую войну из-за разрухи и голода Александр Яковлевич уехал преподавать математику в Иваново-Вознесенский политехнический институт. Одновременно он был профессором и деканом физико-математического факультета Иваново-Вознесенского педагогического института. Идеи по метрической теории множеств, сформировавшиеся при работе под руководством Лузина, Хинчин применил в теории чисел. Им выполнены работы по проблемам метрической теории непрерывных дробей и диофантовых приближений. В 1922 г. в МГУ был организован Научно-исследовательский институт математики и механики. С момента его организации Хинчин был приглашен туда научным сотрудником. До 1926 г. эту работу он совмещал с профессорской деятельностью в Иванове, а затем стал заведующим кафедрой математики в Московском педагогическом институте им. К. Либкнехта. В 1925–1926 гг. он организовал в Московском университете научный семинар по аналитической теории чисел. Хорошо известны фундаментальные теоремы Хинчина, относящиеся к проблеме приближения действительных чисел рациональными числами. Оказалось, что метрические закономерности тесно связаны с теоретико-вероятностными задачами. Например, открытый Хинчиным в 1922–1923 гг. закон повторного логарифма он сначала сформулировал как задачу теории чисел, а затем показал его применимость для теоретико-вероятностных задач.

А.Я. Хинчин является одним из создателей московской школы теории вероятностей. Вопросами теории вероятностей он начал заниматься в 1923 г. Первые работы в этой области примыкали к его же трудам по метрической теории функций и были посвящены точной оценке роста сумм независимых слагаемых в схеме Бернулли. Им получены важные результаты в области предельных теорем. В 1925 г. к Хинчину присоединились в теоретико-вероятностных исследованиях Колмогоров, а позднее – Н.В. Смирнов, В.И. Гливенко и другие. В СССР основоположниками теории случайных процессов являются А.Я. Хинчин и А.Н. Колмогоров. Хинчин занимался теорией стационарных процессов, представляющих особый интерес для статистической физики, а Колмогоров – теорией марковских процессов. Научные интересы Хинчина и Колмогорова нередко совпадали.

С 1922 г. Хинчин – профессор физико-математического факультета МГУ. Он был блестящим лектором, хотя читал всегда сдержанно, не эмоционально. Каждая его лекция была тщательно подготовлена, отделана элегантно, изящно. Хинчин покорял студентов красотой изложения всегда доступного материала [28].

Теория массового обслуживания (этот термин введен Хинчиным) привлекла внимание А.Я. Хинчина в 1932 г., когда он, будучи депутатом Моссовета, вошел в секцию связи, которая в те годы занималась проблемой внедрения в Москве автоматических телефонных станций. По просьбе специалистов московского телефонного узла Александр Яковлевич выполнил ряд оригинальных исследований. Результаты, полученные им, позволили сократить намеченные закупки аппаратуры за рубежом на 2 млн руб. золотом, и широко используются в теории массового обслуживания.

В 1935 г. Хинчину присвоена ученая степень доктора физико-математических наук, а в 1939 г. он стал членом-корреспондентом АН СССР и начал работать в Математическом институте им. В.А. Стеклова.

В 1940 г. Александр Яковлевич получил Государственную премию. В 1941 г. Хинчин тяжело заболел. Выздоровел в Казани, куда была эвакуирована Академия наук. В Казани были получены результаты по статистической механике – классической и квантовой. Из эвакуации он вернулся в 1943 г. В этом же году участвовал в организации Академии педагогических наук РСФСР, в 1944 г. был избран ее первым действительным членом и вошел в Президиум Академии.

После войны Хинчин написал исключительно интересную книгу «Восемь лекций по математическому анализу», интересную и понятную не только для математиков. Ему принадлежат также некоторые работы по философии математики и истории математики.

В начале 1950-х годов Хинчин заинтересовался проблемами теории информации, основы которой были заложены Клодом Шенноном в 1948 г. Он существенно развил концепцию Шеннона о пропускной способности канала связи и энтропии источника информации. Работы Александра Яковлевича, дающие строгое изложение основ теории информации, написаны достаточно простым математическим языком. Книга А.Я. Хинчина «Математические основы теории информации» стала одной из первых монографий по теории информации, подготовленных крупными математиками, и сыграла важную роль в развитии этой теории в нашей стране и за рубежом.

К проблемам теории массового обслуживания А.Я. Хинчин вновь вернулся в 1953 г. и наметил основные задачи этого раздела науки. Результаты исследований были опубликованы в 1955 г. в монографии «Математическая теория массового обслуживания». Эта книга широко используется во всем мире не только для решения задач телефонной связи, но и во многих других отраслях науки: в ядерной физике, на транспорте, в экономике, здравоохранении, при организации уличного движения и решении оборонных задач.

Хинчин читал лекции до 1957 г. В последние годы жизни он продолжал заниматься теорией информации. Хинчин был награжден различными орденами и медалями, в том числе орденом Ленина.

Александр Яковлевич тяжело болел, у него обнаружили язву желудка. Думая, что таким образом излечится, он практически отказался от пищи.

Умер А.Я. Хинчин 19 ноября 1959 г.

Книги Александра Яковлевича «Асимптотические законы теории вероятностей», «Математические методы теории массового обслуживания», «Математические основания квантовой статистики», «Математические основания статистической механики» изданы в США, Англии, Германии и других странах.

Научное наследие Хинчина включает четыре монографии по теории вероятностей, три – по статистической физике, две – по теории чисел.

Б.В. Гнеденко

Гнеденко Борис Владимирович родился 1 января 1912 г. в Симбирске (ныне Ульяновск) в семье землемера. Окончил школу в Саратове, куда Гнеденко переехали из-за болезни главы семейства. В 1927 г. Гнеденко поступил на физико-математический факультет Саратовского университета, после окончания которого в 1930 г. начал работать ассистентом в Текстильном институте в Иваново-Вознесенске.

В 1934 г. Гнеденко приехал на стажировку в Московский университет. После знакомства с Хинчиным он решил серьезно заняться теорией вероятностей и поступил в аспирантуру механико-математического факультета МГУ. Внимание Гнеденко привлекли задачи, связанные с суммированием независимых случайных величин. Невозможность прямых вычислений распределений сумм приводит к необходимости получения и изучения асимптотических формул. Эти формулы входят в предельные теоремы теории вероятностей. Аппроксимация многократных сверток распределений потребовала развития теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин (теории суммирования). В 1937 г. Гнеденко предложил оригинальный метод, получивший название метода сопровождающих безгранично делимых законов. Единым приемом удалось получить не только результаты, ранее обнаруженные в этой области, но и совершенно новые. Разработанную методику он решил применить к суммированию зависимых случайных величин.

В июне 1937 г. Гнеденко защитил кандидатскую диссертацию на тему «О некоторых результатах по теории безгранично делимых распределений». В 1938 г. он вернулся в университет после годичной службы в армии и начал работать доцентом кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ. Докторскую диссертацию на тему «Предельные теоремы для независимых случайных величин» Гнеденко защитил в начале июня 1941 г. Работа была посвящена теории суммирования и теории максимального члена вариационного ряда.

Перед войной Гнеденко исследовал вопросы, позже объединенные в теорию массового обслуживания. Его интересовали предельные теоремы теории вероятностей, теория стрельбы и проблемы, возникающие в авиации у истребителей-перехватчиков. Его интересовала также теория порядковых статистик и ее применение в теории прочности и демографии.

В начале войны Гнеденко с Колмогоровым записались в дивизию народного ополчения, но на фронт их не взяли: предложили работать на оборону в тылу. Гнеденко решал задачи, связанные с авиацией и зенитной артиллерией. Им были внесены предложения по созданию многослойной брони танков и уменьшению пробиваемости брони бронебойными снарядами. Позже эти идеи были использованы при изготовлении скафандров для космонавтов.

С 16 октября 1942 г. по 20 августа 1945 г. Борис Владимирович был профессором механико-математического факультета МГУ. В 1943–1945 гг. Гнеденко работал также в Институте методов обучения Педагогической академии наук. Тогда было написано пособие для учителей математики «Очерки по истории математики в России» и «Элементарное введение в теорию вероятностей», предназначенное для фронтовиков.

1945–1960 гг. – украинский период творчества Гнеденко. В 1945 г. Академия наук Украинской ССР избрала Гнеденко членом-корреспондентом и направила его во Львов, где он восстанавливал Львовский университет и организовывал учреждения Академии наук УССР. Там же, во Львове, Гнеденко читал различные курсы: математический анализ, вариационное исчисление, теорию аналитических функций, теорию вероятностей, математическую статистику и др. Его научная работа в этот период также была весьма разнообразна. В 1948 г. Гнеденко удалось доказать и окончательно сформулировать локальную предельную теорему для независимых, одинаково распределенных решетчатых слагаемых. Здесь начались исследования по непараметрическим методам статистики.

В 1948 г. Гнеденко избрали академиком АН УССР. С 1950 г. он работает в Киеве директором и заведующим отделом теории вероятностей Института математики, заведующим кафедрой математического анализа Киевского государственного университета, председателем Бюро отделения физико-математических наук АН УССР. В это время Гнеденко занимается исследованиями по математической статистике, решая проблему проверки однородности двух выборок. Цикл работ, посвященных этой проблеме, получил мировое признание. Одновременно он проводит исследования в теории массового обслуживания и применении математических методов в медицине. Работа по первому направлению привела к появлению монографии «Введение в теорию массового обслуживания» (в соавторстве с И.Н. Коваленко), а по второму – к созданию первого в мире электронного диагноста сердечных заболеваний (в соавторстве с Н.М. Амосовым и Е.А. Шкабара).

Более ранние исследования по предельным теоремам были подытожены Гнеденко совместно с Колмогоровым в монографии «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин» (1949). За эту работу им в 1951 г. была присуждена премия им. П.Л. Чебышёва. Важное значение имела работа Гнеденко над учебником «Курс теории вероятностей» и монографией «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин». В 1955 г. он возглавил работу по организации Вычислительного центра АН УССР, руководил работами по созданию универсальной вычислительной машины «Киев» и специализированной машины для решения систем линейных алгебраических уравнений. В соавторстве с В.С. Королюком и Е.Л. Ющенко им написан первый в СССР учебник по программированию.

В 1960 г. Гнеденко возвращается в МГУ на должность профессора кафедры теории вероятностей механико-математического факультета. 17 января 1966 г. он сменил Колмогорова на посту заведующего этой кафедрой и руководил ею до декабря 1995 г. В Москве Гнеденко начинает заниматься

теорией надежности. Его усилиями, усилиями его сотрудников и учеников в 1960–1985 гг. была разработана весьма разветвленная математическая теория надежности и математическая теория контроля качества. Предметом наибольшего интереса являлась теория резервированных систем с восстановлением. Была налажена широкая пропаганда необходимости практического использования теоретических результатов, в том числе по линии общества «Знание». Организованы семинары и лекционные курсы в Политехническом музее, в МГУ им. М.В. Ломоносова, а затем и во многих городах СССР, где инженерный состав получал математическую подготовку, необходимую для понимания и применения методов теории надежности и контроля качества.

Совместно с Ю.К. Беляевым и А.Д. Соловьёвым Гнеденко выпускает в 1965 г. монографию «Математические методы в теории надежности». В 1979 г. за цикл работ в этой области Борис Владимирович вместе с ближайшими сподвижниками был удостоен Государственной премии СССР. В связи с задачами надежности он вновь вернулся к исследованию предельных теорем. За эти работы ему в 1982 г. присуждена премия им. М.В. Ломоносова I степени, а в 1986 г. – премия Минвуза СССР.

Для студентов Гнеденко читал курсы теории вероятностей, математической статистики, теории массового обслуживания, теории надежности, исследования операций, введения в специальность. Он был членом ученого совета механико-математического факультета и членом Ученого совета МГУ. Им опубликовано более 350 научных статей и 15 книг. Под руководством Гнеденко было защищено более 70 кандидатских и 15 докторских диссертаций. Более восьми его учеников стали академиками и членами-корреспондентами Академий наук союзных республик (теперь Национальных академий).

Весьма ценным и удивительным является умение Гнеденко объединять в своем творчестве глубокие теоретические изыскания и практические разработки. В настоящее время все более значительным становится разрыв между внутриматематическими изысканиями, от которых в обозримом будущем нельзя ждать практической пользы, и попытками решения прикладных задач методами, устаревшими на полвека.

Большое значение имеют работы Гнеденко по истории науки и по другим направлениям, среди которых особенно можно отметить методологию научных исследований. Он показал, что история математики необходима действующему математику. Среди 180 работ по истории математики более 30 статей, посвящены Н.И. Лобачевскому, П.Л. Чебышёву, М.В. Остроградскому, А.Н. Колмогорову и другим.

Гнеденко был избран почетным доктором Берлинского университета им. В. Гумбольдта (1976), почетным доктором Афинского университета (1993), являлся членом Королевского статистического общества (Великобритания), членом редколлегий ряда отечественных и зарубежных журналов.

Умер Борис Владимирович Гнеденко 27 декабря 1995 г.

Киёши Ито

Японский математик Ито Киёши родился 7 сентября 1915 г. в Хокусей префектуры Май на острове Хонсю. После окончания школы он изучал математику в Императорском университете Токио, который окончил в 1938 г. В охваченной Второй мировой войной Японии молодой выпускник университета служил в патентном бюро (как некогда Эйнштейн) и в 1942 г. опубликовал свое определение стохастического интеграла в работе, написанной иероглифами, нарисованными кистью и изданной факсимильным способом. По странному совпадению, так же, как для одной из работ Эйнштейна, отправной точкой для Ито, по существу, послужило броуновское движение (его Ито воспринимал не как физический процесс, а как математическую абстракцию – нигде не дифференцируемую функцию), для изучения которого и пришлось создать стохастический интеграл. В двух опубликованных работах о статистических процессах Ито развил теорию стохастических уравнений.

В военное время публикация Ито осталась незамеченной. Другим математикам она стала известна после появления в 1951 г. на английском языке. Ее мало кто понял, несмотря на ряд докладов, сделанных Ито в США.

В 1945 г. Ито защитил диссертацию и получил степень доктора, в 1952 г. был назначен на должность профессора Киотского университета. Он начал разрабатывать теорию вероятностей на основе теории меры. Результаты его работы широко стали применяться с 1960-х годов в финансово-экономических и биологических исследованиях. По мере развития теории стохастических дифференциальных уравнений круг их применений постепенно расширялся. К началу 1980-х годов важность трудов Ито была осознана и признана многими математиками. Случайный процесс, имеющий стохастический дифференциал, называется процессом Ито, а формула вычисления стохастического дифференциала функции от процесса Ито также носит его имя.

Ито работал профессором математики в Киотском университете до выхода на пенсию в 1979 г. Кроме того, он был сотрудником Института перспективных исследований в Принстоне (1954–1956), профессором Стэнфордского университета (1961–1964), профессором Орхусского университета в Дании (1966–1969), профессором Корнелльского университета (1969–1975). В 1976–1979 гг. Ито был директором Института математических наук Киотского университета.

Ито получил много премий, в том числе премию Вольфа в 1987 г. В 2006 г. Международный математический союз учредил международную математическую премию Гаусса как «награду для математика, чьи работы имеют наибольшее прикладное значение». Первым лауреатом премии Гаусса стал Киёши Ито, получивший награду на 91-м году жизни за результаты 64-летней давности. Сам ученый всегда считал себя математиком-теоретиком, не занимающимся прикладными вопросами. Возраст и здоровье не позволили ему приехать в Мадрид на Международный математический конгресс и получить

премию лично. От имени отца награду из рук короля Испании получила младшая дочь Киёши Ито, профессор математики Калифорнийского университета в Беркли, Джанко Ито.

10 ноября 2008 г. Киёши Ито скончался в Киото.

Шриниваса Варадхан

Американский математик Варадхан Шриниваса Сатхамангалам родился в 1940 г. в индийском городе Мадрасе. Окончив в 1959 г. Мадрасский университет, он получил степень бакалавра, а в 1960 г. – степень магистра. После защиты диссертации на степень доктора в 1963 г. он стал профессором Индийского института статистики в Калькутте, а затем переехал в США. С 1963 по 1966 г. Варадхан был стипендиатом Института математических наук им. Р. Куранта в Нью-Йорке. С 1966 по 1968 г. он работал в этом институте доцентом, преподавал теорию относительности, а с 1968 г. – профессором. С 1980 по 1984 г. и с 1992 по 1994 г. Варадхан был директором Института им. Р. Куранта. Он занимал также должности приглашенного профессора в Институте Миттаг-Лёффлера (1972), Станфордском университете (1976–1977) и Институте перспективных исследований в Принстоне (1991–1992).

Научные интересы Варадхана относятся к теории вероятностей. Он достиг успехов в исследовании теории больших отклонений, предназначенной для изучения редких событий. Эта теория дает эффективный метод исследования большого количества явлений в сложных стохастических системах. Она может быть использована в квантовой теории поля, статистической физике, популяционной динамике, эконометрике, финансовой и сетевой инженерии. Теория существенно расширяет возможности использования компьютерного моделирования и анализа появления таких редких событий, как столкновение Земли с астероидом.

22 марта 2007 г. Норвежская академия наук объявила о присуждении Варадхану премии Абеля в размере 975 тыс. долл. за фундаментальный вклад в теорию вероятностей. По словам руководителя Международного Абелевского комитета Кристиана Сейпа, работы Варадхана обладают огромной концептуальной силой и нестареющей красотой. Его идеи очень важны и будут еще долгое время стимулировать дальнейшие исследования. Церемония состоялась 22 мая 2008 г. в Осло. Премию вручал король Норвегии.

Варадхан имеет много других наград и является членом нескольких академий. Его жена – профессор Нью-Йоркского университета. Старший сын Варадхана стал жертвой трагедии 11 сентября 2001 г. в Нью-Йорке.

Венделин Вернер

Вернер Венделин родился 23 сентября 1968 г. в Кёльне (Германия) в немецкой семье с литературными увлечениями. Когда Венделину был один год, семья переехала во Францию и в 1977 г. получила французское гражданство. Во время обучения в лицее в 1982 г. Венделин снялся в художественном фильме «Прохожая из Сан-Суси».

После получения степени бакалавра Вернер поступил в Высшую нормальную школу в Париже, в которой обучался с 1987 по 1991 г. Его интересовала физика, теория броуновского движения, но постепенно он увлекся и математикой. С 1991 г. он работал научным сотрудником в Национальном центре научных исследований (CNRS) в течение шести лет, из которых два года стажировался в Кембриджском университете. Степень доктора Вернер получил в 1993 г. в Университете Пьера и Мари Кюри. В 1997 г. он был назначен профессором естественного факультета Парижского университета в Орсэ.

Научные интересы Вернера лежат на стыке физики и математики. В его исследованиях используются теория вероятностей и комплексный анализ для описания критических явлений в определенных фазовых переходах (например, переход из жидкого состояния в газ).

Вернер является соавтором израильского математика Одеда Шрамма, создавшего в теории вероятностей новое направление, связанное с физикой турбулентного движения и называемое эволюцией Шрамма – Лёвнера.

За свои работы Вернер получил несколько международных математических премий, в том числе премию Международного Европейского союза в 2000 г., премию Ферма в 2001 г., премию Лоэва в 2005 г. и совместно с Г. Лорером и О. Шраммом премию Дж. Пойа в 2006 г.

В 2006 г. на Международном математическом конгрессе в Мадриде Вернер был награжден медалью Филдса. Официальная формулировка филдсовского комитета при награждении Вернера звучит так: «За вклад в изучение стохастической лёвнеровской эволюции геометрии двумерного броуновского движения и конформной теории поля». Из всех лауреатов медали Филдса Вернер является единственным специалистом по теории вероятностей. Присуждение ему почетной награды говорит о признании теории вероятностей одним из важнейших разделов математики в начале XXI в.

Исследуемая Вернером стохастическая лёвнеровская эволюция стала активно использоваться в теории турбулентности.

В 2008 г. Вернер стал членом Французской академии наук. В настоящее время он профессор Парижского университета XI в Орсэ.

Глава 12

ТОПОЛОГИЯ ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЫ XX в.

> Топологические предложения, несмотря на кажущуюся их неопределенность, связаны как раз с наиболее точными абстрактными математическими предложениями о величинах…
>
> *Д. Гильберт*

Чем занимается топология

Топология – сравнительно молодой раздел математики, возникший примерно 120 лет назад. Проникновение в мир топологии требует глубокого знания геометрии, алгебры, анализа и других разделов математики. Образную оценку топологии дал известный французский математик Андре Вейль, по словам которого, за душу каждого математика борются ангел топологии и дьявол абстрактной алгебры. Этими словами Вейль хотел выразить необычайное изящество и красоту топологии, а также то, что вся современная математика представляет собой причудливое переплетение идей топологии и алгебры. Сам термин «топология» придумал профессор Гёттингенского университета Иоганн Бенедикт Листинг.

В каждом разделе математики заложена идея, определяющая его суть. Для топологии это идея непрерывности. Она встречается уже в математическом анализе, но не получает в нем заметного развития. Идея непрерывности выражает коренные свойства пространства и времени и имеет фундаментальное значение для познания.

Многие свойства фигур, изучаемых в элементарной геометрии, сознательно игнорируются топологией. Можно сказать, что топологи руководствуются принципом, сформулированным поэтом Александром Блоком: «Сотри случайные черты, и ты увидишь – мир прекрасен». Любую фигуру тополог имеет право сгибать, скручивать, сжимать и растягивать – делать с ней, что угодно, только не разрывать и не склеивать. И при этом он будет считать, что ничего не произошло – все ее свойства остались неизменными. Для него не имеют никакого значения ни расстояния, ни углы, ни площади. Он игнорирует прямолинейность и гладкость. Его интересуют только самые общие свойства фигур, которые не изменяются при непрерывных преобразованиях. Поэтому иногда в шутку топологию называют резиновой геометрией. Топологу ничего не стоит поместить все свои фигуры на поверхность надувного шара и без конца менять его форму, следя за тем, чтобы шар не лопнул. То, что при этом прямые линии будут превращаться в кривые, топологу безразлично. Важной особенностью этой «резиновой

геометрии» является необычайная широта класса геометрических объектов, подчиняющихся ее законам [20].

Первые важные наблюдения, в результате которых были найдены точные топологические соотношения, сделаны еще Эйлером, Гауссом и Риманом. Существуют расхождения в трактовке первичного, основополагающего вклада математиков в топологию. По мнению группы французских математиков, выступающих под общим псевдонимом Николя Бурбаки, топология началась с Римана. Они считают, что он первым попытался выделить понятие топологического пространства, выдвинул идею самостоятельной теории этих пространств, определил инварианты (числа Бетти) и дал им первые применения в анализе (периоды абелевых интегралов). Риман составил программу исследований, которая и является программой современной топологии, сделал первые шаги к ее реализации. Он определил числа Бетти сначала для поверхности, а затем для многообразия любого числа измерений, и применил их к теории интегралов. Результатом было появление алгебраической топологии.

По мнению топологов школы С.П. Новикова, настоящая топология началась с Анри Пуанкаре. Им создана так называемая комбинаторная топология, являющаяся самостоятельным разделом математики. Пуанкаре назвал ее «Analysis situs», что дословно означает анализ положения. Ему топология виделась в будущем как геометрия относительных положений, качественная геометрия. До 1904 г. Пуанкаре написал пять дополнений к основной работе «Analysis situs».

Топология делится на комбинаторную (раздел геометрии) и общую, или теоретико-множественную топологию. Термин «комбинаторная» в настоящее время практически не используется. Топология без этого определения – это топология Пуанкаре.

У истоков второго раздела топологии стоял Г. Кантор. Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основе математики. Это аксиоматическая теория, призванная исследовать такие основополагающие понятия, как предел, сходимость, непрерывность. Общая топология является, по существу, естественным обобщением ряда более частных математических фактов, относящихся, например, к области математического анализа.

Основы общей топологии были заложены французским математиком Морисом Рене Фреше, немецким математиком Феликсом Хаусдорфом и отечественными математиками Павлом Самуиловичем Урысоном и Павлом Сергеевичем Александровым.

Топологические пространства. Аксиоматически определяемыми объектами изучения общей топологии являются топологические пространства и их непрерывные отображения. В широком смысле пространство определяют как логически мыслимую форму, служащую средой, в которой осуществляются другие формы и те или иные конструкции. В математике пространство определяют как некоторое абстрактное множество произвольных объектов, для которых определено известное отношение между этими объектами. Базой для построения теории того или иного абстрактного пространства является общематематическое понятие множества и установленные структурные соотношения между его элементами.

Под топологическим пространством понимают множество объектов произвольной природы, называемых точками, в котором выделена некоторая система подмножеств, называемых открытыми множествами пространства. Для точек задается отношение близости между ними и некоторыми подмножествами, удовлетворяющими определенным аксиомам. Иногда вместо термина «топологическое пространство» используется термин «фигура». Топологическими свойствами обладают многие чисто математические объекты, и именно это определяет значимость топологии.

Современное понятие топологического пространства возникло не сразу. Первые достаточно общие определения топологического пространства даны в работах М. Фреше, Ф. Рисса и Ф. Хаусдорфа. Окончательное определение топологического пространства было сформулировано польским математиком К. Куратовским и П.С. Александровым.

Топологические пространства изучаются с различных точек зрения. При этом пространства, которые приходится рассматривать, как правило, удовлетворяют различного рода дополнительным условиям, например, условиям типа компактности, условиям веса, размерности, локальным условиям и др.

Как частный случай топологических пространств можно рассматривать метрические пространства, в которых топология определяется некоторым расстоянием (метрикой). Важен вопрос, можно ли данную топологию определить с помощью некоторой метрики, т. е. является ли данное топологическое пространство метризуемым?

Проблема метризации заключается в отыскании топологических характеристик метризуемых пространств. Первые условия метризуемости были найдены П.С. Александровым и П.С. Урысоном. Более простые условия метризации отыскали только в начале 1950-х годов Э.А. Бинг, М. Нагата и Ю.М. Смирнов.

Размерность. Уяснение того, что размерность евклидова пространства носит топологический характер, т. е. пространства разной размерности топологически не эквивалентны (не гомеоморфны между собой), явилось одним из важнейших событий во всей математике начала XX в. Решение задачи стало возможным лишь после формулировки топологического определения понятия размерности. Две независимые идеи такого определения высказали почти одновременно в 1911 г. А. Лебег и в 1912 г. А. Пуанкаре. В 1913 г. основатель интуиционизма Л. Брауэр, основываясь на идее Пуанкаре, дал строгое топологическое определение размерности, которое для евклидовых пространств совпадает с обычной. Заслуга построения теории размерности принадлежит П.С. Урысону. В 1921–1922 гг. он дал окончательное определение размерности Брауэра и доказал теоремы, которые определяют основное содержание теории размерности.

В 1925 г. П.С. Александровым была дана современная форма аксиоматики топологического пространства. Созданная им в 1928–1930 гг. гомологическая теория размерности представляет собой одно из наиболее значительных открытий в топологии.

Важные результаты, имеющие большое значение для общей топологии, были получены в 20-х годах XX в. студентом МГУ Андреем Николаевичем Тихоновым, ставшим впоследствии академиком, организатором и деканом

факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ и директором Института прикладной математики им. М.В. Келдыша. На 4-м курсе он пришел к определению топологического (теперь его принято называть тихоновским) произведения топологических пространств.

Двойственность. Большой вклад в исследование топологических проективных геометрий внес Колмогоров, опубликовавший свои результаты в 1932 г. Одним из применений построенной гомологической теории явилась теория двойственности, восходящая к Дж. Александеру и получившая дальнейшее развитие после открытия А.Н. Колмогоровым и Дж. Александером когомологических групп.

Теоремы двойственности привлекают своей исключительной геометрической наглядностью. Проблема двойственности состоит в том, чтобы, исходя из гомологических свойств данного множества пространства, исследовать гомологические свойства дополнения этого множества.

В 1927 г. появляются первые работы Александрова и Понтрягина по проблеме двойственности. В них дается усиление теоремы Александера, аналогичное усилению теоремы двойственности Пуанкаре, полученному Вебленом в 1923 г.

Результат Александрова 1927 г. позволил распространить обобщение Понтрягина с полиэдров на любые компакты. В 1932 г. Понтрягин разработал теорию характеров. Он нашел и доказал закон двойственности для компактов, лежащих в евклидовом пространстве, а затем создал теорию двойственности локально-бикомпактных групп. Это придало теории двойственности законченный вид и вообще подняло всю теорию гомологии на качественно новый уровень. Законы двойственности Понтрягина принадлежат к числу открытий, ставших эпохальными и определивших тематику дальнейших исследований в топологии.

В 1933 г. была опубликована первая работа Ивана Георгиевича Петровского в области алгебраической геометрии «Вопросы о топологической природе алгебраических кривых и поверхностей в действительной области». Результаты его дальнейших исследований в этой области публиковались в 1938 и 1949 гг.

В 1947 г. была опубликована статья П.С. Александрова «Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств n-мерного пространства», оказавшая заметное влияние на дальнейшее развитие этой области топологии.

Алгебраическая топология. С самого начала возникновения топологии как отдельной математической науки стало очевидным, что для решения важнейших ее задач широкого и глубокого применения в других областях математики целесообразно, и даже необходимо, использование алгебраических методов. Прогресс в основных областях топологического исследования достигнут именно благодаря применению алгебры.

Алгебраическая топология изучает математические объекты и их отображения друг в друга, которые не меняются при непрерывных деформациях (гомотопиях). Классами таких объектов являются комплексы (многогранники, полиэдры), многообразия, расслоения и их сечения. Важнейшим понятием алгебраической топологии является понятие деформации. Часть алгебраи-

ческой топологии, рассматривающая связь между топологическими и алгебраическими понятиями, называется теорией гомологии.

Когда советские математики заинтересовались алгебраической топологией – именно теорией гомологии, в работах Пуанкаре, Брауэра, Веблена, Александера и других ученых уже были разработаны основы комбинаторной топологии полиэдров и одним из наиболее актуальных и трудных вопросов был вопрос о перенесении этих результатов на более широкий класс пространств. Московские топологи из школы Д.Ф. Егорова и Н.Н. Лузина во главе с П.С. Александровым успешно справились с этой задачей.

Одним из фундаментальных методов исследования топологических пространств является предложенный П.С. Александровым метод аппроксимации пространств полиэдрами. Этот метод тесно связан с методом покрытий. Связь осуществляется посредством введенного Александровым в 1926 г. понятия нерва покрытия.

Наиболее общие исследования в гомотопической топологии проведены Л.А. Люстерником и Л.Г. Шнирельманом. Результаты исследований были суммированы в работе «Топологические методы в вариационном исчислении» (1930).

С середины 1930-х и до конца 1940-х годов одно из центральных мест в топологии занимали труды Л.С. Понтрягина и его учеников. Благодаря их работам был заложен фундамент дифференциальной топологии (в самостоятельную ветвь выделилась в 1956 г.). В 1939 г. был создан отдел топологии МГУ. Руководил отделом Л.С. Понтрягин, интересы которого тогда лежали в области дифференциальной топологии. Ведущий сотрудник отдела П.С. Александров интересовался общей алгебраической топологией, тогда называвшейся комбинаторной. После войны в отдел пришла Людмила Всеволодовна Келдыш, которая занималась геометрической топологией. Интересы Понтрягина сместились в область дифференциальных уравнений, и в 1959 г. заведующим отделом топологии стал П.С. Александров.

Одним из самых старых разделов алгебраической топологии является теория узлов. В предисловии к книге Ричарда Кроуэлла и Ральфа Фокса «Введение в теорию узлов» сказано, что теорией узлов математики занимаются уже почти 90 лет, но полученные в ней результаты довольно скромны и многие основные проблемы все еще ждут своего решения. Особенно парадоксально то, что в теории узлов зачастую проблемы многомерной топологии решаются гораздо легче, чем аналогичные им проблемы в обычном трехмерном пространстве. Авторы считают, что теория узлов представляет собой часть геометрии, привлекательную тем, что изучаемые в ней объекты можно воспринимать и осмысливать в обычном физическом мире. Она – место стыка таких разных разделов математики, как теория групп, теория матриц, теория чисел, алгебраическая и дифференциальная геометрия. Ее истоки лежат в математической теории электричества и элементарной атомной физике.

Молекулы ряда полимеров могут образовывать переплетающиеся между собой кольца. В разных странах ученые работают над тем, чтобы создать искусственным путем заузленные молекулы. Недавно сделано открытие, что

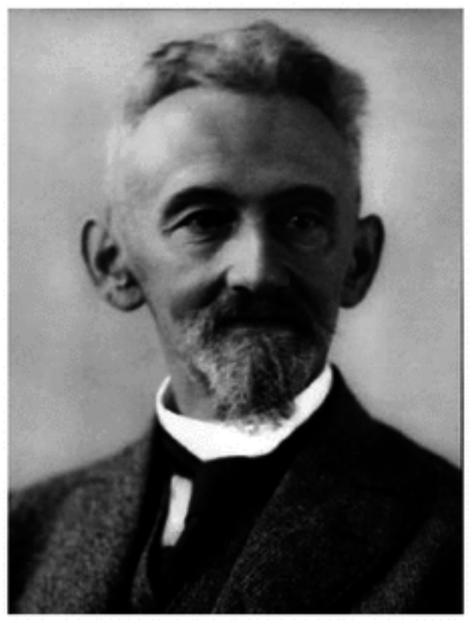
в клетках, пораженных раком, повышено содержание катенановых – «скольцованных» – молекул ДНК. Встречаются в живой ткани и иные топологические диковинки.

В 20-х годах XX в. Гильберт писал, что в истории геометрии как науки топологические проблемы появляются еще позже, чем проективные, именно лишь в XVIII в. Позже выяснилось, что топологические предложения, несмотря на кажущуюся их неопределенность, связаны как раз с наиболее точными абстрактными математическими предложениями о величинах, именно с алгеброй, с теорией функций комплексного переменного и с теорией групп. Гильберт считал, что топологические исследования являются наиболее плодотворными по сравнению с исследованиями во всех отделах математики.

В настоящее время топологические методы исследования применяются не только в анализе, но и во многих других отраслях математики. Значительной является роль топологических методов в дифференциальных уравнениях. В результате синтеза идей общей топологии и функционального анализа возникла теория топологических векторных пространств. Большое место в алгебре, геометрии и функциональном анализе занимают исследования различных непрерывных алгебраических образований – групп, полугрупп, колец и т. д. Абстрактные топологические пространства неожиданным образом могут возникнуть и применяться в самых различных областях математики.

Большая часть ученых, сделавших замечательные топологические открытия в начале своей карьеры, затем занимались исследованиями в различных разделах математики, о них рассказывается в других главах. Ниже речь пойдет о российских и зарубежных математиках, посвятивших себя работе преимущественно в области топологии.

Феликс Хаусдорф



Хаусдорф Феликс родился 8 ноября 1868 г. в Бреслау (ныне польский город Вроцлав) в семье состоятельного коммерсанта. Под влиянием родителей он отказался от мечты стать композитором. Математику и астрономию Хаусдорф изучал в Фрайбургском, Берлинском и Лейпцигском университетах. В 1891 г. окончил Лейпцигский университет и с 1895 по 1910 г. преподавал в нем математику. До 34 лет Хаусдорф, наряду с математикой, увлекался астрономией (1891–1896), а также литературой, музыкой и философией. За это время он под псевдонимом Поль Монгре издал две книги стихов и афоризмов, философский трактат «Хаос и космический выбор» (1898), сборник философских и литературных эссе, а в 1904 г. – фарс «Врач его величества».

После получения звания профессора Лейпцигского университета в 1902 г. Хаусдорф полностью посвятил себя математике. В 1910 г. он переехал в Бонн и преподавал в Боннском университете до 1913 г. В 1901–1909 гг. Хаусдорф доказал несколько теорем об упорядоченных множествах. В монографии

«Основы теории множеств», опубликованной в 1914 г., он подвел итоги начального периода развития дескриптивной теории множеств, изложил ее результаты в применении к топологическим пространствам. Это был первый учебник по теории множеств. В 1927 г. Хаусдорф написал второй вариант учебника. Им намечены пути дальнейших исследований в дескриптивной теории множеств и топологии. Н. Бурбаки принадлежит следующее утверждение: «Начало общей топологии, как мы ее понимаем сегодня, положил Хаусдорф. Вернувшись к понятию окрестности, он отобрал среди аксиом Гильберта об окрестностях на плоскости те, которые могли дать его теории желаемую точность и общность. Глава, в которой он развивает их следствия, остается образцом аксиоматической теории, абстрактной, но уже заранее приспособленной к приложениям» [22].

С 1913 по 1921 г. Хаусдорф преподавал в Грейфсвальдском университете. В 1916 г. он независимо от П.С. Александрова полностью решил проблему мощности борелевских множеств, построил теорию меры в n-мерном пространстве, разработал теорию упорядоченных множеств. Им впервые доказана теорема о существовании максимального элемента в частично упорядоченном множестве, всякое линейно упорядоченное подмножество которого ограничено сверху. Позже это утверждение стало называться леммой Цорна.

В 1921 г. Хаусдорф вернулся в Бонн, где до 1935 г. работал профессором Боннского университета. В 1927 г. им написана монография о применении методов дескриптивной теории множеств для исследования метрических пространств.

Хаусдорф является основателем общей топологии и общей теории метрических пространств. Его теория топологических (хаусдорфовых) пространств занимает одно из центральных мест в современной математике. Совместно с А.С. Безиковичем он нашел удобную количественную меру неидеальности объектов. Они ввели такое определение размерности, по которому она может принимать дробные значения, в отличие от топологической размерности, которая может быть только целочисленной. Позже Б. Мандельброт размерность Хаусдорфа – Безиковича стал называть фрактальной размерностью.

В функциональном анализе Хаусдорф разработал теорию абстрактных пространств – множеств произвольных элементов, для которых тем или иным способом установлено отношение (понятие) близости. В математическом анализе Хаусдорф решил проблему моментов для конечного интервала. В теории непрерывных групп он создал важный алгебраический алгоритм. Фундаментальные результаты были получены Хаусдорфом также в теории чисел.

Когда в Германии к власти пришли нацисты, Хаусдорф отказался эмигрировать, как это сделали многие ученые-евреи. В 1935 г. ему, как «неарийцу», запретили преподавать, но до 1942 г. не предпринимали никаких мер. Новые математические результаты Хаусдорф печатал в польском журнале. После вызова в гестапо Хаусдорф понял, что отправление в концлагерь неизбежно. Тогда вместе с женой и ее сестрой 26 января 1942 г. он покончил жизнь самоубийством, приняв смертельную дозу снотворного. Похоронен Хаусдорф в Бонне.

П.С. Урысон

Урысон Павел Самуилович родился 3 февраля 1898 г. в Одессе. Он рано лишился матери. Его воспитывала старшая сестра Лина. В 1912 г. Павел с сестрой и отцом переехал в Москву.

Первые научные исследования он начал проводить в 15 лет, занимаясь экспериментальной физикой под руководством академика П.П. Лазарева. Его первая научная работа «О радиации трубки Кулиджа» была напечатана в 1915 г., в год окончания московской частной гимназии им. Поповой и поступления на физико-математический факультет Московского университета. Он мечтал стать физиком, но под влиянием лекций Егорова и Лузина увлекся математикой. В 1918–1919 гг. выполнил несколько математических работ по теории функций и теории дифференциальных уравнений. Им написана первая в России работа по теории нелинейных уравнений в бесконечномерном пространстве, которая оказалась востребована лишь через 30 лет. Лузин предложил ему «остаться при университете», т. е. поступить в аспирантуру.

В 1921 г. Павел Самуилович Урысон был утвержден в должности доцента Московского университета и начал заниматься топологией. К тому времени, когда Урысон начал решать поставленную Д.Ф. Егоровым задачу о топологическом определении линии и поверхности, понятие топологического пространства уже существовало. Оно наметилось в работах М. Фреше (1906) и Ф. Хаусдорфа (1914). Но эту общую абстрактную схему нужно было наполнить геометрическим содержанием и сделать общим для всех математиков.

В конце августа 1921 г. после двух месяцев напряженных размышлений Урысон, по воспоминаниям П.С. Александрова, проснулся с готовым окончательным и всем теперь хорошо известным определением размерности. Произошло это в деревне Бурково, вблизи Болшева, на берегу реки Клязьмы, где группа молодых московских математиков, в которую входили В.В. Степанов, Д.Е. Меньшов, Н.К. Бари и другие, жила на даче. В то же утро Урысон рассказал П.С. Александрову свое определение размерности и тут же набросал план всего построения теории размерности с целым рядом теорем, бывших тогда гипотезами.

Набросанная тогда программа полностью осуществилась в течение зимы, и к весне 1922 г. вся теория размерности была готова. Все полученные результаты Урысон сразу излагал студентам в Московском университете в курсе «Топология континуумов». Это был первый топологический курс, прочитанный в нашей стране. В 1922 г. к Урысону присоединился П.С. Александров. Так было положено начало советской топологической школе.

Результаты исследований топологических пространств Урысона, полученные летом 1922 г., вошли в «Мемуар о компактных и топологических пространствах», написанный совместно с П.С. Александровым. Зимой 1922/23 гг. Урысон редактировал работу по теории размерности и изучал

теорию относительности. Летом 1923 г. он сделал несколько докладов в Гёттингенском математическом обществе. Его исследования по топологии получили одобрение Гильберта. После пешего путешествия по Норвегии Урысон в Москве занимался комбинаторной топологией.

Летом 1924 г. Урысон и Александров были в заграничной командировке в Германии, Голландии и Франции. Брауэр и Хаусдорф считали работы Урысона наиболее важными топологическими результатами того времени. Урысон первым доказал теоремы метризации и построил универсальное метрическое пространство.

Жизнь Урысона трагически оборвалась в 26 лет. 17 августа 1924 г. он и П.С. Александров в шторм пошли купаться в Бискайском заливе. Александров выбрался с трудом, а Урысон не смог выплыть: его ударило волной о скалу. В результате полученных травм он скончался. Свою последнюю работу он завершил за четверть часа до смерти. Похоронили его в местечке Ба на берегу океана.

В 1951 г. вышел двухтомник П.С. Урысона «Труды по топологии и другим областям математики». В него вошли и незавершенные научные работы. Основные топологические теоремы, доказанные П.С. Урысоном, входят во все учебники по топологии.

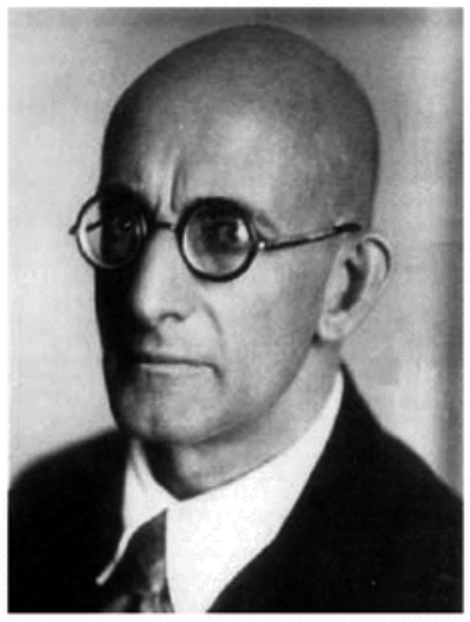
Колмогоров писал об Урысоне: «Московская математика того времени была богата яркими и талантливыми индивидуальностями. Но Павел Самуилович и на этом фоне выделялся универсальностью интересов в соединении с целеустремленностью в выборе предмета собственных занятий, отчетливостью постановки задач… яркой оценкой своих и чужих достижений в соединении с доброжелательством в применении к достижениям самым маленьким» [60].

Несомненно, что огромный математический талант Урысона не успел в полной мере проявиться, и, не прервись его жизнь так рано, он сумел бы серьезно обогатить самые различные разделы математики открытиями первостепенного значения.

Идеи Урысона, казавшиеся многим вначале чересчур абстрактными и общими, при дальнейшем развитии математики оказались в центре внимания. Его теория размерности явилась источником для многих общих идей современной теоретико-множественной математики. Введенное им совместно с П.С. Александровым понятие бикомпактного пространства стало одним из основных понятий современной математики, значение которого далеко выходит за пределы тех специальных топологических проблем, в которых оно зародилось.

За пять лет занятий математикой Урысон напечатал свыше 30 работ. Не смотря на непродолжительный период творческой деятельности, его считают одним из самых блестящих математиков. П.С. Александров и П.С. Урысон начали с построения теории счетно-компактных пространств, развитой затем П.С. Александровым в теорию бикомпактных и локально-бикомпактных пространств.

П.С. Александров



Александров Павел Сергеевич родился 7 мая 1896 г. в городе Богородске (в настоящее время г. Ногинск Московской обл.) в семье земского врача. Детство его прошло в Смоленске. В 1913 г. он окончил с золотой медалью Смоленскую общественную гимназию и поступил в Московский университет на физико-математический факультет.

Уже на первом курсе Александров принял участие в семинаре Д.Ф. Егорова. Александров и Суслин были на втором курсе, Меньшов – на третьем, Хинчин – на четвертом, когда они, образующие первую группу наиболее одаренных учеников Лузина, стали на семинаре изучать теорию функций.

Если Хинчин и Меньшов интересовались метрической теорией функций, то Александров и Суслин исследовали дескриптивную теорию функций. Они изучали борелевские множества – множества, получаемые в результате применения к конечному или счетному множеству замкнутых множеств конечного или бесконечного числа действий сложения и умножения. Лузин поставил вопрос: имеет ли каждое несчетное борелевское множество мощность континуума?

Будучи студентом, Александров построил новую теоретико-множественную операцию, впоследствии названную A-операцией, позволяющую получать любое борелевское множество. С помощью этой операции он получил положительный ответ на вопрос Лузина. Этот важный результат был опубликован в 1916 г. в 162-м томе французского журнала «Доклады Парижской академии наук».

Московский университет Павел Сергеевич окончил в 1917 г. В научной работе Александрова наступил некоторый спад, он даже бросил на время занятия математикой и уехал работать в Чернигов, в отдел народного образования. Он был одним из организаторов Черниговского театра, встречался с известным певцом Л.В. Собиновым.

В Москву Александров вернулся в 1920 г., сдал аспирантские экзамены и с 1921 г. вместе с окончившим к тому времени аспирантуру П.С. Урысоном начал работать приват-доцентом в Московском университете. Он читал различные курсы: теорию функций действительного переменного, первый в Московском университете курс общей топологии, теорию Галуа и др. В 1921 г. Александров стал членом Московского математического общества, женился, но через три года брак распался.

Урысон получил первые в нашей стране результаты в топологии. Павел Сергеевич Александров присоединился к Урысону, вдвоем они стали развивать теорию счетно-компактных пространств, решили проблему метризации, введя понятия, оказавшие заметное влияние на дальнейшее развитие исследований в смежных областях. Их совместной работой является «Мемуар о компактных и топологических пространствах».

В 1923 и 1924 гг., летом, Александров и Урысон были в Гёттингене, где Гильберт высоко оценил результаты их исследований. Во Франции в августе 1924 г. Александров уцелел во время злополучного купания в шторм в Атлантическом океане, а Урысон погиб. После его смерти Александров в одиночку продолжил их совместные исследования и вскоре стал признанным главой советской топологической школы.

В ряде фундаментальных работ Александров в 1925 г. создал основы гомологической теории общих топологических пространств. Им разработан общий метод перенесения на теоретико-множественные объекты методов комбинаторной топологии. Он ввел понятие «нерв покрытия», оказавшееся фундаментальным по своему значению. Возник некоторый синтез комбинаторно-алгебраических и теоретико-множественных методов в топологии, определивший ее развитие в последующие годы.

Теория, построенная Александровым, дает новый мощный инструмент исследования. Она явилась подтверждением теории размерности, созданной Урысоном. Гомологическая теория способствовала развитию Дж. Александером и А.Н. Колмогоровым теории двойственности, поставив всю область исследований на твердую основу.

В 1925 г. молодые топологи объединились в кружок, председателем которого был избран Александров. Целый ряд молодых математиков, в том числе Тихонов, Люстерник, Шнирельман, Немыцкий, стали членами этого кружка и с успехом разрабатывали разнообразные проблемы топологии. Вскоре к ним присоединились Понтрягин и Колмогоров.

Наиболее теплые отношения сложились у Александрова с Андреем Николаевичем Колмогоровым. Об их дружбе и увлечении спортом было рассказано в статье, посвященной А.Н. Колмогорову.

В 1929 г. Александрову присвоили звание профессора и члена-корреспондента АН СССР, а в 1934 г., как и многим другим ученым, без защиты диссертации – ученую степень доктора физико-математических наук.

А.Н. Колмогоров, который стал академиком в 1939 г., был на семь лет моложе П.С. Александрова. Павла Сергеевича огорчало то, что его долго не избирали в академики. Поскольку это в значительной степени зависело от Лузина, между Лузиным и Колмогоровым, считавшим, что Александров должен стать академиком, возник конфликт. Академиком Александров стал только в 1953 г., через три года после смерти Лузина [54].

К середине 1930-х годов выяснилось, что связаны между собой совершенно разные ветви топологии – комбинаторно-алгебраическая, восходящая к А. Пуанкаре, и теоретико-множественная, идущая от Фреше и Хаусдорфа. Отражением этого синтеза двух основных ветвей топологии служит написанная осенью 1935 г. П.С. Александровым и Х. Хопфом «Топология I», по которой учились все современные топологи. Эта книга должна была стать первой частью трехтомной монографии, которая осталась незавершенной из-за войны.

Значительные успехи советской топологической школы были продемонстрированы на I Международной топологической конференции, созванной по

инициативе Математического института Московского университета в сентябре 1935 г. Эта конференция, привлекшая большое количество участников как из Союза, так и из за границы, не только подвела итоги плодотворного периода развития топологии, но и наметила те пути, по которым сейчас движется развитие этой науки.

В 1939 г. Александровым проведено важное исследование бикомпактных расширений вполне регулярных пространств. Значительным событием в его творческой деятельности является работа, написанная в Казани в 1941–1942 гг. Она посвящена изучению формы и расположения комплекса в объемлющем комплексе с помощью гомологических методов.

В конце 1940-х – начале 1950-х годов Александров занимается построением гомологической теории незамкнутых множеств в евклидовых пространствах. Результаты по гомологической теории и теоремам двойственности отражены в работе 1947 г. «Основные соотношения двойственности для незамкнутых множеств».

Выше упомянуты лишь некоторые научные результаты, полученные П.С. Александровым. В целом под его непосредственным руководством развивалась вся теория непрерывных отображений топологических пространств. Ему принадлежат первые фундаментальные результаты об открытых отображениях бикомпактов и постановка основных задач в этой области. Под его влиянием выполнены первые основополагающие работы по теории замкнутых непрерывных отображений небикомпактных метрических пространств на метрические пространства.

Большое влияние на развитие исследований в общей топологии оказал обзорный доклад Александрова, прочитанный в 1966 г. на II Пражском симпозиуме по общей топологии и ее применениям. В этом докладе были сформулированы основные принципы взаимной классификации пространств и отображений.

П.С. Александров долгое время руководил кафедрой высшей геометрии и топологии в Московском университете, возглавлял отдел общей топологии Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1932–1964 гг. Александров был президентом Московского математического общества. В 1958–1962 гг. он был вице-президентом Международного математического союза. Международные контакты Павла Сергеевича укрепляли престиж советской математики.

Заслуги П.С. Александрова были высоко оценены. В 1943 г. за работу «Гомологические свойства расположения комплексов и замкнутых множеств» Совет министров СССР присудил ему Государственную премию. Он награжден многими орденами и медалями, в 1969 г. ему присвоено звание Героя Социалистического Труда, в 1972 г. за цикл работ по гомологической теории размерности присуждена международная премия им. Н.И. Лобачевского.

Умер П.С. Александров 16 ноября 1982 г. в Москве.

Хейнц Хопф

Швейцарский математик Хопф Хейнц родился 19 ноября 1894 г. в Бреслау (ныне Вроцлав, Польша). В то время в Германии было принято в процессе обучения переходить из одного университета в другой, чтобы иметь возможность слушать лекции наиболее авторитетных профессоров, поэтому Хопф обучался в университетах Бреслау, Гейдельберга, Берлина, Гёттингена.

Основные работы Хопфа посвящены топологии, топологическим методам дифференциальной геометрии и теории групп.

Летом 1926 г. в Гёттингене Хопф познакомился с приехавшим на отдых П.С. Александровым. Знакомство переросло в дружбу. Они вместе участвовали в работе Международного математического конгресса в Болонье в 1928 г., а затем отдыхали на берегу Средиземного моря. С 1926 по 1931 г. Хопф работал в Берлинском университете, а с 1931 г. на протяжении 34 лет был профессором Высшей технической школы в Цюрихе. Совместно с П.С. Александровым осенью 1935 г. им написана «Топология I». Она задумана как первая часть трехтомной монографии, но по причине войны остальные две части не были изданы.

Совместно с американским математиком, профессором Принстонского университета, Соломоном Лефшецем Хопф разработал общую теорию пересечения циклов в многообразиях. Им доказана теорема об алгебраическом числе неподвижных точек при отображении полиэдра на себя и предложена гомотопная классификация отображений полиэдра произвольной размерности на сферу той же размерности. В начале 1930-х годов Х. Хопф обнаружил гомотопически нетривиальные отображения сфер на сферы низших размерностей и указал на связь этих вопросов с другими проблемами математики. В частности, им доказано наличие бесконечного числа негомотопных между собой отображений трехмерной сферы в двумерную. В теории групп он исследовал гомотопные и когомологические группы.

В 1954–1958 гг. Хопф был членом комитета по присуждению медали Филдса. В год 75-летия Хопфу была присуждена Международная премия имени Н.И. Лобачевского Академии наук СССР.

Умер Хейнц Хопф 3 июня 1971 г.

Л.В. Келдыш

При советской власти на предприятиях шла борьба с «семейственностью», но научные учреждения в этом отношении были исключением. Так в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР работали две супружеские пары: руководитель отдела механики непрерывных сред Кочин Николай Евграфович и сотрудница этого отдела, будущий академик Кочина Пелагея Яковлевна, а также руководитель отдела математической логики Петр Сергеевич Новиков и Людмила Всеволодовна Келдыш. П.С. Новиков и Л.В. Келдыш были учениками Лузина, представителями второго поколения «лузитанцев».

Людмила Всеволодовна, старшая сестра Мстислава Всеволодовича Келдыша, родилась 12 апреля 1904 г. в Оренбурге.

В большой и дружной семье Всеволода Михайловича и Марии Александровны Келдыш было семеро детей: Людмила, Александр (род. 1905), Юрий (род. 1907), Михаил (род. 1909), Мстислав (род. 1911), Любовь (род. 1914), Вера (род. 1919). Из Риги, где Всеволод Михайлович работал в должности адъюнкт-профессора Рижского политехнического института, из-за вторжения немцев семья перебралась в Москву (1915), а затем, по причине Гражданской войны – в Иваново-Вознесенск (1918). В 1923 г. семья получила квартиру в Москве. В 1920-х годах Всеволод Михайлович преподавал в Высшем инженерно-строительном училище, выделившемся из МВТУ им. Н.Э. Баумана, а с 1932 г. – в Военно-инженерной академии, переведенной из Ленинграда. В Академии он сначала заведовал кафедрой железобетонных изделий, а затем – кафедрой строительных конструкций. Он консультировал большие стройки: Днепрогэс, канала им. Москвы, метрополитена, мостов через Москву-реку. В 1942 г. ему было присвоено звание генерал-майора.

В тяжелый период репрессий семье Всеволода Михайловича пришлось нелегко. Первой, в 1935 г., была арестована, но вскоре отпущена, Мария Александровна. Ее брата репрессировали как офицера царской армии и отправили отбывать срок на Беломорканале. В ноябре 1936 г. арестовали Михаила, аспиранта исторического факультета Московского университета. В мае 1937 г. он был расстрелян. Как французский шпион в 1938 г. осужден Александр, но после пересмотра дела освобожден [2].

Людмила Всеволодовна была яркой и сильной личностью. Она окончила математическое отделение Московского университета в 1925 г., аспирантуру – в 1929 г. В 1930–1934 гг. работала в Московском авиационном институте.

Л.В. Келдыш и П.С. Новиков вступили в брак в 1934 г. Они интересовались не только наукой. Муж и жена были большими любителями живописи, немаловажное значение в их жизни играло общение с природой. До весьма преклонного возраста супруги ходили в походы. Одним из самых необычных было путешествие на лошадях по Алтаю в 1926 г.

Самостоятельную научную деятельность Л.В. Келдыш начала еще в 1920-е годы, но первая печатная публикация появилась в 1934 г., когда она перешла в Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР. Ее интересы лежали в области дескриптивной теории множеств. Людмила Всеволодовна исследовала гомеоморфность канонических элементов третьего класса. Бэр и Борель в конце XIX в. решили классифицировать по уровню сложности все функции, используемые в математике. За нулевой класс были взяты непрерывные функции. В первый класс вошли функции с множеством точек разрыва первого рода. Во второй класс вошли функции типа функции Дирихле. Бэр и Борель доказали, что ограничений на классы сложности не существует. В работе, опубликованной в книге Н.Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах», Л.В. Келдыш построила арифметический пример множества четвертого класса по Борелю. Конструкция, примененная в этой работе, позволила в дальнейшем Л.В. Келдыш построить канонические элементы четвертого класса. Ею разработаны методы построения арифметических примеров борелевских множеств с гарантированной нижней оценкой борелевского класса.

Исследования Л.В. Келдыш в этой области самобытны: ее привлекают не столько общие проблемы дескриптивной теории, посвященные самым широким классам множеств, сколько конкретное геометрическое исследование классического запаса борелевских множеств. В геометрической теории этих множеств Келдыш достигла блестящих результатов. Ее устремления в области изучения борелевских множеств были всегда направлены на возможно более полное понимание особенностей множеств, принадлежащих к определенному классу, и выяснение того, чем отличаются множества различных классов друг от друга. Основными результатами деятельности Л.В. Келдыш довоенного периода были построенные ею арифметические примеры для всех эффективно заданных счетных трансфинитов и достаточно полное описание структуры произвольного борелевского множества, основанное на введенном ею понятии канонического элемента [2].

Серия работ Л.В. Келдыш по изучению свойств борелевских множеств в дескриптивной теории множеств завершилась защитой докторской диссертации в 1941 г. К этому времени она имела уже троих детей, а всего в семье Келдыш родилось пятеро детей, в связи с чем Людмила Всеволодовна была награждена медалью «Материнская слава» II степени.

Война прервала научную работу Л.В. Келдыш: все силы пришлось направить на спасение семьи.

После войны Людмила Всеволодовна перешла в отдел топологии Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Уже в работах по дескриптивной теории множеств она интересовалась топологическими аспектами результатов. Предметом ее исследований стала геометрическая топология. Этот термин, введенный М. Ньюменом, используют, когда хотят подчеркнуть, что алгебраический аппарат в исследованиях играет второстепенную роль или что речь идет о топологическом типе многообразия. Например, к геометрической топологии относится гипотеза Пуанкаре, доказанная Г.Я. Перельманом.

Основная проблема в топологии, интересовавшая Л.В. Келдыш, заключалась в выяснении условий, при которых непрерывное отображение повышает размерность. В этой области Л.В. Келдыш получила ряд интересных результатов. Примером таких результатов является открытое нульмерное отображение кривой Менгера на квадрат. Другие подобные результаты касались монотонных отображений кубов на кубы большей размерности. Их дополняла общая теорема о преобразовании такого отображения в монотонно-открытое [2].

В 1964 г. Л.В. Келдыш стала профессором МГУ. Ее дальнейшие топологические исследования посвящены теории непрерывных отображений компактов в тесной связи с теорией размерности. Кроме собственных исследований в этой области, она руководила семинаром по геометрической топологии в Математическом институте им. В.А. Стеклова. Семинар стал заметным явлением в математической жизни страны 1960-х – начала 1970-х годов. К сожалению, работа семинара прекратилась в 1974 г. Протестуя против неоправданного увольнения ее ученика, Л.В. Келдыш ушла из Математического института.

Двое ее сыновей стали академиками: Леонид Вениаминович Келдыш (от первого брака) и Сергей Петрович Новиков (от второго брака).

Умерла Людмила Всеволодовна 16 февраля 1976 г., спустя год после кончины мужа. Похоронены Л.В. Келдыш и П.С. Новиков в одной могиле на Новодевичьем кладбище в Москве.

Шэншэнь Чжэнь (Черн)

Выдающийся американский математик китайского происхождения Чжэнь (Черн) Шэншэнь родился 26 октября 1911 г. в семье доктора права, работавшего в правительстве. В 15 лет он поступил в университет в Нанкае на отделение физики, но затем стал изучать математику. В 1930 г. Чжэнь окончил университет в Тяньцзине и поступил в аспирантуру. В 1932 г. он познакомился с немецким математиком Вильгельмом Бляшке, по ходатайству которого после окончания аспирантуры в 1934 г. получил стипендию для продолжения образования на Западе. В Гамбурге Чжэнь совершенствовался в геометрии. Через два года, по совету Бляшке, он уехал в Париж, чтобы работать вместе с Эли Картаном. В 1936 г. он защитил диссертацию и вернулся в Китай. С 1937 по 1943 г. Чжэнь работал профессором университета Синьхуа в Пекине. В 1943 г. он был приглашен в Институт перспективных исследований в Принстоне, где проработал два года. Наиболее важные результаты Чжэнь получил в алгебраической топологии. Им доказана теорема, обобщающая формулу Гаусса – Бонне для произвольных римановых многообразий. Эта теорема практически объединяет геометрию и топологию. Дальнейшие исследования на основе доказанной теоремы привели Чжэня к открытию характеристических классов для комплексных векторных расслоений, названных его именем (классы Чжэня).

После окончания Второй мировой войны Чжэнь возвращается в Китай и участвует в организации Института математики Китайской академии наук. После победы Мао Цзедуна и образования КНР в 1949 г. он уезжает в США и работает профессором математики в Чикагском университете. В 1960 г. Чжэнь переезжает в Калифорнийский университет в Беркли. Там он организует Институт исследования математических наук и становится первым его директором. Объединив группу молодых математиков, Чжэнь сделал Беркли крупнейшим центром исследований в области геометрии. Он часто летал в Гонконг, Тайвань, Китай.

С 1958 по 1962 г. Чжэнь был членом Комитета по присуждению медалей Филдса.

В 1981 г. в Китае началось восстановление науки после культурной революции. Чжэня пригласили в Китай, где его имя стало ассоциироваться с достижениями китайской научной мысли. На родине Чжэня начали называть великим китайским математиком. Он организовал и возглавил Нанкайский математический институт в Тяньцзине. Учеником Чжэня является лауреат медали Филдса Яу Шинтан, который считает себя его преемником.

Чжэнь написал более 200 научных работ. Кроме алгебраической топологии, многие его исследования посвящены дифференциальной топологии, финслеровой геометрии и геометрии тканей. Он является членом многих иностранных научных обществ, лауреатом нескольких международных наград.

В 1975 г. Чжэнь был награжден Национальной медалью науки (США), в 1984 г. – премией Вольфа. В 1992 г. в связи с его 80-летием состоялся международный конгресс «Черн – великий математик XX века». В 2002 г. Казанский государственный университет наградил его медалью имени Лобачевского. На Международном математическом конгрессе в Пекине в 2002 г. Чжэнь был почетным председателем, в 2004 г. – получил премию Шоу.

Скончался Чжэнь 3 декабря 2004 г. в Тяньцзине в возрасте 93 лет от сердечной недостаточности (после инфаркта).

В 2010 г. в честь Чжэня (Черна) была учреждена медаль Черна, первым лауреатом которой стал американский математик Луис Ниренберг.

Глава 13

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

> Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.
>
> *А.Д. Александров*

Численные и аналитические методы

Вычислительная математика – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с проведением вычислений и использованием компьютеров. В более узком понимании вычислительная математика – теория численных методов решения типовых математических задач.

В период домашинной математики существовало различие между численными и аналитическими методами решения задач. Это различие было настолько велико, что математик воспринимал задачу до конца решенной лишь в случае нахождения ее аналитического решения. Численное решение, независимо от его практической ценности, в рамках «чистой» математики воспринималось как своего рода суррогат, с которым приходится мириться в случае невозможности нахождения «полноценного» аналитического решения. Недостаточное развитие численных методов в то время объясняется не их недооценкой, а их скромными возможностями. Они были неэффективными, а, следовательно, и неактуальными. Цели применения численных методов в домашинную эпоху и в настоящее время значительно отличаются: что было важно раньше – не столь существенно сейчас, и наоборот.

Развитие вычислительной математики показало, что в действительности различие между численными и аналитическими методами свидетельствует о разделении их сфер влияния и носит непринципиальный характер.

Попробуем ответить на вопрос, в чем же заключается отличие аналитических (формульных) решений от численных. Во-первых, аналитические решения записываются на более привычном для математиков языке и в более сжатом виде, чем программы. Во-вторых, запись решения позволяет сравнительно просто по формулам изучать качественные особенности решения, например, его асимптотическое поведение. В-третьих, имеются методы формальных преобразований, позволяющие быстро переходить от одной формы представления решения к другим формам.

Можно сказать, что аналитическое решение является качественным анализом задачи, а решение численными методами – количественным, позволяющим дать ответ в виде, применимом непосредственно в технических целях.

Уже в XIX в. было ясно, что формульный язык записи решений не всемогущ. У него нет преимущества в общности, как думают некоторые математики. Например, аналитические методы решения существуют только для алгебраических уравнений, степень которых не выше четвертой, и для каждой степени они различны. В то же время разрабатываемые стандартные и типовые программы создаются для решения целого класса задач. Не представляет труда создать стандартную программу, пригодную для численного решения любого алгебраического уравнения.

Использование математического аппарата в биологии, экономике и других науках показало, что часто невозможно получить сколько-нибудь полное представление о предмете исследований этих наук в обычном формульном языке. Поэтому в XX в. в математике начал складываться новый, более могущественный язык алгоритмов. В отличие от простого формульного языка, алгоритмические языки с одинаковой легкостью описывают не только задачи механики или физики, но и задачи биологии, генетики, экономики и лингвистики.

Приближенные и численные методы в математике существуют с самого ее возникновения. В разработке этих методов принимали участие крупнейшие ученые. С именами Ньютона, Эйлера, Гаусса, Лобачевского и других выдающихся ученых связаны известные и широко применяемые в численном анализе способы приближенного решения уравнений, интерполирования и численного интегрирования функций.

Активно развивались численные методы во второй половине XIX в. Английский астроном Дж. Адамс в 1855 г. предложил разностный метод численного интегрироания обыкновенных дифференциальных уравнений.

На рубеже XIX и XX вв. немецкие математики К. Рунге и М. Кутта разработали численные алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Эти алгоритмы являются модификациями метода Эйлера.

Швейцарский ученый В. Ритц в 1909 г. теоретически обосновал ранее предложенный английским физиком Дж.У. Рэлеем численный метод интегрирования линейных неоднородных дифференциальных уравнений (метод Рэлея – Ритца).

Значительный вклад в развитие численных методов внесли российские ученые. Пристальное внимание приближенным и численным методам уделяли ученые петербургской математической школы во главе с П.Л. Чебышёвым. Наряду с математиками, важный вклад в разработку приближенных и численных методов внесли ученые других специальностей (Б.Г. Галёркин, С.А. Чаплыгин и другие).

Работы А.А. Маркова по приближенным методам относятся к теории наилучших приближений. Основные научные исследования В.А. Стеклова связаны с уравнениями математической физики. Численному анализу посвящены его работы по теории приближения функций и механическим квадратурам. А.Н. Крылов создал и усовершенствовал приближенные методы по улучшению сходимости тригонометрических рядов, численному и механическому интегрированию дифференциальных уравнений, механическим квадратурам, решению «векового уравнения» и др. Он много сделал для пропаганды значения исследований в области приближенных и численных методов. В работах

С.Н. Бернштейна решены многие актуальные и трудные вопросы, относящиеся к различным областям анализа. Большой цикл его исследований посвящен теории приближения функций, в частности теории наилучшего приближения.

Широко известен метод Бубнова – Галёркина, применяемый для решения дифференциальных уравнений с частными производными и формирования основы метода конечных элементов. Метод приобрел популярность после исследований Б.Г. Галёркина (1915). Ранее его применял российский инженер и математик И.Г. Бубнов (1913) для решения задач теории упругости. Теория метода обоснована М.В. Келдышем в 1942 г.

Теория приближения функций, имеющая принципиальное значение в теории численных методов, принадлежит к классическому анализу. Эта теория получила дальнейшее развитие в работах А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского, Н.И. Ахиезера и других.

Позже стала развиваться теория приближений функций комплексного переменного. Фундаментальные результаты по проблеме равномерного приближения многочленами и рациональными функциями были получены М.А. Лаврентьевым, М.В. Келдышем, С.Н. Мергеляном. Важное место в теории функций комплексного переменного занимают конформные отображения. В прикладных науках требовалось создание эффективных приближенных методов конформных отображений. Этим занимались М.А. Лаврентьев, Л.В. Канторович и другие.

Градиентным методам решения задач линейной алгебры посвящены работы М.Ш. Бирмана, М.А. Красносельского и С.Г. Крейна. Л.В. Канторович предложил один из градиентных методов решения операторных уравнений – метод наискорейшего спуска. Решение плохо обусловленных систем уравнений исследовал А.Н. Тихонов.

Новая эпоха в истории приближенных методов началась с постановления Совета Министров СССР от 10 июня 1948 г. о проведении расчетов по созданию советской атомной бомбы. Следует заметить, что в целом в решении «атомной проблемы» по обе стороны океана были задействованы выдающиеся ученые и все ресурсы промышленности. Это привело не только к научно-технической революции, но и к прогрессу в области фундаментальных наук. Были созданы математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Отставание в области ЭВМ в СССР было компенсировано более передовыми, чем в США, алгоритмами и программами расчетов, разработанными под руководством А.Н. Тихонова и А.А. Самарского.

В 1950-х годах А.Н. Тихонов и А.А. Самарский получили важные результаты, относящиеся к электродинамике. Объектом изучения были волноводы – полые металлические трубы, служащие для передачи высокочастотной энергии. Волноводы появились в физике и радиотехнике для замены обычных двухпроводных линий. Электромагнитное поле было полностью сосредоточено внутри волновода, уменьшались потери, возрастала передаваемая мощность. Расчет возбуждения волноводов сводился к краевой задаче для системы уравнений Максвелла.

С появлением ЭВМ универсальным методом приближенного решения дифференциальных уравнений математической физики стал метод конечных

разностей (метод сеток). Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определяемые в узлах сетки и называемые «сеточными функциями». Производные заменяются разностными отношениями и дифференциальные уравнения заменяются системой алгебраических уравнений. Полученная задача называется разностной схемой.

Метод сеток считается эффективным, если разностная схема разрешима и ее решение при увеличении числа узлов приближается к точному решению исходной задачи. Однако доказательство эффективности требует использования современных методов функционального анализа. Поскольку постоянно происходит усложнение решаемых задач, одного совершенствования ЭВМ недостаточно. Даже с учетом повышения их быстродействия требуется обязательное совершенствование теории численных методов.

В 1950–1960-х годах Тихонов и Самарский разработали теорию решения консервативных разностных схем. Это позволило им и их ученикам создать удобные и экономичные алгоритмы решения многих практических задач.

Современная математическая физика имеет дело в основном с процессами и явлениями, которые описывают нелинейными уравнениями, содержащими несколько пространственных переменных. Численное моделирование в этом случае нередко сводится к решению систем линейных уравнений, содержащих 10^5–10^6 неизвестных. Методами, известными 40 лет назад, даже с учетом быстродействия нынешних компьютеров, такие задачи в принципе не могли быть решены. Именно практика диктует необходимость дальнейшего развития теории численных методов.

Невероятная разница в спектральных характеристиках самосопряженных и несамосопряженных матриц была выявлена именно благодаря численным методам и привела к развитию совершенно новой области псевдоспектрального анализа, который сегодня справедливо считается самостоятельным и полноправным разделом математики. В некоторых областях, в частности в области нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка, только компьютерные методы позволили доказать существование решений.

А.Н. Крылов

Выдающийся математик, механик и кораблестроитель Крылов Алексей Николаевич родился 15 августа 1863 г. в селе Висяге Ардатовского уезда Симбирской губернии (ныне город Алатырь Ульяновской области) в семье артиллериста. В 1884 г. он окончил Петербургское морское училище. Родственником Крылова был А.М. Ляпунов, который посоветовал ему освоить математику в объеме университетского курса и снабдил его лекциями П.Л. Чебышёва. После года работы на судостроительном заводе Алексей Николаевич поступил на кораблестроительное отделение Морской академии, по окончании которой в 1890 г. был оставлен в Академии для научной и педагогической работы.

Всего А.Н. Крыловым написано 285 работ по математике, механике, астрономии, физике, технике, истории науки и техники и особенно много по теории корабля. Решение практических задач кораблестроения требовало не только применения математических методов, но и их усовершенствования. На математику он смотрел с позиций инженера, и считал, что она сильна своими приложениями. По его мнению, важное место в математической подготовке инженеров должна занимать теория и практика приближенных вычислений. Отличительной чертой математических работ Крылова является исчерпывающее решение поставленных задач, доведение решения до конкретного числового результата. Остановимся на некоторых из них.

«Лекции о приближенных вычислениях» Крылова – первый в мировой литературе курс приближенных вычислений. Этот курс Крылов прочитал в 1906 г. для небольшого круга лиц, затем лекции были изданы и не раз переиздавались с дополнениями.

Очень важной является работа «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах», опубликованная в 1913 г. Крылов исследует различные случаи вынужденных радиальных колебаний полого упругого цилиндра. В некоторых случаях решение получается в виде плохо сходящихся рядов Фурье. Крылов изложил собственный метод улучшения сходимости этих рядов, основанный на выделении из суммы ряда элементарных функций таким образом, чтобы уничтожить часть коэффициентов ряда Фурье, медленно убывающих при возрастании порядкового номера. Во многих случаях метод Крылова приводит к определению суммы ряда в конечном виде.

По представлению Н.Е. Жуковского, в 1914 г. Московский университет присудил Крылову ученую степень почетного доктора прикладной математики. В том же году он был избран членом-корреспондентом, а в 1916 г. – академиком Российской академии наук. Перед самой революцией Крылов был генерал-лейтенантом морского флота и состоял членом Правления российского общества пароходства и торговли. После революции он активно участвовал в создании советского Военно-морского флота.

Проблемы конструирования корабельных установок, проблемы механики, приводящие к дифференциальным уравнениям, обусловили появление работы «Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений» (1923). Значительный научный и практический интерес представляет работа «О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения». Рассмотрение колебаний в технике приводит к интегрированию системы дифференциальных уравнений, в основном второго и четвертого порядков. Крылов предложил свой метод решения уравнения

$$x'' + n^2x + \alpha f(x) + \beta\varphi(x') = 0.$$

В работе «О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем»

Крылов установил метод решения так называемого векового уравнения, которое в технических задачах бывает двух видов: 1) для систем без погашения колебаний; 2) для систем с погашением колебаний. Уравнения в первом случае не отличаются по виду от векового уравнения небесной механики. Значительно сложнее уравнения во втором случае. Крылов предложил практический метод численного решения для всех случаев, который гораздо удобнее и проще методов Лагранжа, Лапласа, Якоби и Леверье. Он основывается на возможности сведения нормальной системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка.

Много внимания Крылов уделял приближенному решению уравнений баллистики, теории компасов и гироскопов.

После смерти В.А. Стеклова Крылов с 1927 по 1932 г. возглавлял Физико-математический институт АН СССР.

А.Н. Крылов перевел на русский язык «Математические начала натуральной философии» – основной научный труд Ньютона.

За разработку математической теории отечественного кораблестроения Крылову в 1941 г. присуждена Государственная премия, а в 1943 г. присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Скончался Алексей Николаевич 26 октября 1945 г.

Б.Г. Галёркин

Галёркин Борис Григорьевич родился 20 февраля 1871 г. в Полоцке в семье, члены которой занимались кустарным промыслом. С 12 лет Борис подрабатывал в суде переписчиком бумаг. После окончания реального училища в Полоцке он экстерном сдал экзамен за дополнительный класс, дававший право на поступление в институт. В 1893 г. Галёркина зачислили на механическое отделение Санкт-Петербургского технологического института.

Материальные затруднения заставляли Бориса Григорьевича отвлекаться от учебы ради заработка уроками и чертежной работой. Как и многие другие студенты-технологи, он оказался вовлеченным в политическую жизнь, вступил в социал-демократический кружок. Возможно, именно это обстоятельство стало причиной частых перемен места службы. Первые три года после института Галёркин работал инженером-конструктором на Харьковском заводе Русского паровозостроительного и механического общества, одновременно проводил занятия на курсах для рабочих. С конца 1903 г. он – инженер на строящейся линии Восточно-Китайской железной дороги, а через полгода – заведующий техническим отделом Северного механического и котельного завода в Петербурге. Галеркин увлекся политической деятельностью, участвовал в организации Союза инженеров в Петербурге и в 1905 г. был арестован за подготовку всеобщей забастовки инженеров. В 1906 г. он становится членом Петербургского Комитета РСДРП от меньшевистского крыла РСДРП.

23 июля 1906 г. вместе с другими членами Комитета Галёркин был арестован и 13 марта 1907 г. приговорен к полутора годам заключения. В тюрьме он навсегда охладел к революционной деятельности и полностью посвятил себя науке и инженерному делу. С апреля 1907 г. Галёркин в течение года числился инженером по проектированию и постройке котельной электростанции в Петербурге (позже Первой Государственной электростанции).

После освобождения из тюрьмы Галёркин стал преподавателем Петербургского политехнического института. В 1909 г. в «Известиях» института была опубликована его первая научная работа «Теория продольного изгиба и опыт применения теории продольного изгиба к многоэтажным стойкам, стойкам с жесткими соединениями и системам стоек», написанная во время заключения. В том же году летом Борис Григорьевич отправился за границу для осмотра интересующих его сооружений, и до начала Первой мировой войны он каждое лето проводил за рубежом: в Германии, Австрии, Швейцарии, Бельгии, Швеции.

Б.Г. Галёркин читал курс строительной механики в Политехническом институте, где работали В.Л. Кирпичёв, И.Г. Бубнов, А.Н. Крылов, И.В. Мещерский, С.П. Тимошенко. С осени 1911 г. Борис Григорьевич по совместительству преподавал также в Женском политехническом институте. В 1913 г. он получил заказ на проектирование первого в России крупного металлического здания котельной электростанции в Петербурге, способного выдержать значительные нагрузки. Позднее оно было признано одним из самых выдающихся инженерных сооружений в Европе. До 1915 г. научные интересы Галёркина были сосредоточены в основном на стержневых системах, а после – на пластинах.

В 1915 г. Борис Григорьевич опубликовал статью, в которой предложил приближенный метод решения краевых задач дифференциальных уравнений. Этот метод был применен им к большому числу задач о равновесии стержней и пластин. Несколько ранее И.Г. Бубнов указал на аналогичную последовательность расчета для приближенного решения вариационных задач, которая трактовалась им как возможное видоизменение алгоритма метода Ритца. Галёркин не связывал развиваемый им метод с непосредственным решением вариационных задач и считал его общим для решения дифференциальных уравнений. В задачах равновесия он дал трактовку своему методу на основе начала возможных перемещений. Именно эти идеи оказались весьма плодотворными не только применительно к решению задач строительной механики, но и вообще в математической физике.

Метод Галёркина, или метод Бубнова – Галёркина, и галеркинская форма постановки задачи решения дифференциальных уравнений широко известны во всем мире. Они легли в основу алгоритмов решения большого числа задач математической физики из области механики, термодинамики, электромагнетизма, гидродинамики. Существует множество программных комплексов, реализующих алгоритм метода Галёркина.

В 1917–1919 гг. Борис Григорьевич опубликовал серию работ по изгибу прямоугольных и треугольных пластин. В январе 1919 г. он стал профессором 2-го Политехнического института (бывшего Женского), оставаясь преподава-

телем механического факультета (бывшего отделения) 1-го Политехнического института (так стали именовать бывший Политехнический институт императора Петра Великого), а в 1920 г. стал заведующим кафедрой строительной механики. В 1922 г. он перешел на инженерно-строительный факультет, где также руководил кафедрой строительной механики.

В декабре 1923 г. Галёркин был избран деканом инженерно-строительного факультета Политехнического института. В 1924–1929 гг. Борис Григорьевич по совместительству был профессором в Путейском институте и Ленинградском государственном университете. В 1924 г. ему довелось в последний раз побывать за границей в качестве участника Конгресса по прикладной механике в Голландии. За время пребывания Бориса Григорьевича на посту декана на факультете была создана первая лаборатория – гидротехническая (ныне гидравлическая), пристроенная к гидробашне. Он добился правительственного одобрения идеи о создании для факультета других крупных лабораторий (на их базе был создан ВНИИ гидротехники).

Уже в 1920-х годах имя Галёркина было известно во всем мире. Его авторитет признали и инженеры-проектировщики. Нередко Бориса Григорьевича приглашали в качестве консультанта при проектировании и строительстве ряда крупнейших сооружений. Он был членом Правительственной комиссии по приемке Днепропетровской ГЭС.

В январе 1928 г. Б.Г. Галёркин был избран членом-корреспондентом АН СССР. Инженерно-строительный факультет Политехнического института вскоре преобразовался в Институт инженеров промышленного строительства, а факультет водного хозяйства стал Гидротехническим институтом. Борис Григорьевич был профессором в обоих институтах.

В 1934 г. Галёркин получил две ученые степени: доктора технических наук и доктора математики, а также звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР. В начале 1936 г. его избрали действительным членом АН СССР, включили в состав Высшей аттестационной комиссии Всесоюзного комитета по высшему техническому образованию. Галёркин являлся председателем группы технической механики отделения технических наук АН СССР, возглавлял Институт механики АН СССР, Всесоюзное научное инженерно-техническое общество строителей и Ленинградское отделение этого общества.

Несмотря на многочисленные титулы, Галёркин оставался профессором все той же кафедры строительной механики гидротехнического факультета (Гидротехнический институт снова преобразовался в факультет в 1934 г.).

Небольшого роста, худощавый, с тихим голосом, он не соответствовал стереотипу известного ученого. Однажды академика просто вытолкнули из трамвая более крупные граждане, после этого происшествия администрация института ходатайствовала о предоставлении Галёркину личного автомобиля.

В 1939 г. на базе Института инженеров промышленного строительства было образовано Высшее военно-инженерное училище, и Галёркин, как академик и начальник кафедры строительной механики этого училища, получил звание генерал-лейтенанта.

Летом 1941 г. при Ленинградском горкоме ВКП(б) и горсовете была создана Комиссия по руководству строительством оборонительных сооружений, в которой Галёркин являлся авторитетным специалистом и фактическим руководителем. Одновременно он возглавлял группу экспертов при начальнике инженерной обороны Ленинграда.

После эвакуации в Москву Галёркин Борис Григорьевич вошел в состав Военно-инженерной комиссии при АН СССР.

Он скончался 12 июля 1945 г.

А.Н. Тихонов

Тихонов Андрей Николаевич родился 30 октября 1906 г. в городе Гжатске (ныне – Гагарин) Смоленской губернии в малограмотной семье. После революции он с родителями переехал сначала в Украину, а затем в Москву. В украинской школе Андрей учился недолго. Уже в 13 лет он начал работать конторщиком на Белорусско-Балтийской железной дороге, а образование пришлось продолжать на вечерних курсах и самостоятельно готовиться к поступлению на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета.

В 1922 г. Тихонов успешно выдержал экзамены и был зачислен в ряды студентов. Андрею Николаевичу хотелось стать членом «Лузитании», но своего имени он не обнаружил в списке первокурсников, принятых в популярное сообщество. На втором курсе Тихонов стал активным членом семинара по топологии под руководством П.С. Александрова. В следующем году Александров уехал в длительную командировку в Гёттинген. В переписке Тихонов сообщал руководителю о своих результатах, которые были опубликованы в 1925 г. в немецком журнале «Mathematische Annalen». Вскоре Андрей Николаевич пришел к собственному определению произведения топологических пространств, которое стали называть тихоновским. Это определение было настолько парадоксальным, что сначала даже Александровым было встречено с недоверием. Так начался первый период научного творчества Тихонова, посвященный топологии и функциональному анализу.

В дипломной работе Андрей Николаевич доказал теорему о том, что тихоновское произведение любого числа бикомпактных пространств бикомпактно. Эта теорема оказалась важной не только для топологии, но и для функционального анализа и динамического программирования. В мировой общематематической литературе по числу ссылок она занимает первое место среди топологических теорем. После окончания Московского университета в 1927 г. и аспирантуры в 1929 г. Тихонов, наряду с преподаванием в МГУ, начал работать в Геофизическом институте. С тех пор его научные интересы принадлежат к области прикладной математики.

Андрей Николаевич не только работал активно, но и предпочитал активно отдыхать. Его самыми любимыми видами отдыха были горный туризм

и альпинизм. Со своей будущей женой Натальей он познакомился в Теберде, когда отдыхал вместе с П.С. Александровым, А.Н. Колмогоровым и В.В. Немыцким на берегу Бадукского озера. А в свадебное путешествие молодожены отправились к Кирилло-Белозерскому монастырю. Тихонов очень любил живопись, никогда не упускал возможности посетить картинную галерею.

Второй период научного творчества Тихонова посвящен изучению общих вопросов теории дифференциальных и интегральных уравнений и исследованию актуальных задач геофизики и электродинамики. Первая задача, решенная Андреем Николаевичем в Геофизическом институте, была связана с выяснением причины наличия на значительной части территории Советского Союза вечной мерзлоты. Исследования Тихонова показали, что вечная мерзлота осталась со времени ледниковых периодов, но достоверно определить климат далекого прошлого не удалось. Усложнение исходной математической модели привело к появлению нелинейных граничных условий в уравнении теплопроводности. Задача, решавшаяся Тихоновым, является одной из обратных задач математической физики. Обратными называют задачи по определению количественных характеристик явления по результатам измерений их косвенных проявлений. Их сложность заключается в том, что к похожим эффектам часто могут приводить разные причины, поэтому отсутствие дополнительной информации делает задачу некорректной. Обязательным условием ее корректности является малое изменение решения при малом изменении исходных данных. Математики избегали решения обратных задач, считая, что решать нужно только корректные задачи.

Результатом исследования некорректных задач стала докторская диссертация Тихонова, защищенная в 1936 г. Он свел задачу к нелинейному интегральному уравнению, которое решал методом последовательных приближений. Развитая Тихоновым математическая теория выходила за рамки исходной задачи и служила базой для новых прикладных исследований.

В 1936 г. Андрей Николаевич становится профессором МГУ, а через год его приглашают работать в только что созданный Институт теоретической геофизики АН СССР. В 1939 г. Тихонова избирают членом-корреспондентом Академии наук.

В предвоенные годы Тихонов выполнил цикл работ, связанных с расчетом динамики химических процессов. Полученные результаты могут применяться при разработке новых типов противогазов, систем очистных сооружений и т. п. Многие задачи сводились к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными. Тихонов разработал способ сопряжения численных и асимптотических методов.

Вскоре после начала войны Институт теоретической геофизики эвакуировали в Казань, а затем в Уфу. В то время поиск новых месторождений нефти был стратегически важным. Тихонову пришлось решать задачи, связанные с расшифровкой результатов разведки залежей нефти электрическим зондированием Земли. С математической точки зрения эти задачи некорректны. В то же время нефтяники-практики интуитивно находили правильные решения. Необходимо было учесть практический опыт нефтяников, чтобы задачу

сделать корректной. Тихонов ввел в исходную постановку задачи дополнительную информацию, сужающую пространство возможных решений. В конце 1943 г. он опубликовал статью «Об устойчивости обратных задач», в которой предложил решать подобные задачи методом подбора.

В 1949 г. Тихонов доказал теорему единственности, в соответствии с которой обратная задача электрического зондирования на постоянном токе может иметь только одно решение. После публикации из этой теоремы выросло новое направление в исследовании некорректных задач, которые можно преобразовать в «корректные по Тихонову».

Нестабильность результатов глубинного электрического зондирования заставила Тихонова разработать математическую модель естественного электромагнитного поля Земли (геофизики называют его магнитотеллурическим). В начале 1950-х годов Тихонов обосновал возможность зондирования на переменном токе. Для этого он решил задачу определения электромагнитного поля, создаваемого расположенным на поверхности Земли проводом при пропускании через него переменного тока. Это способствовало техническому переоснащению электроразведки недр. Так выдающийся математик стал выдающимся геофизиком.

Наряду с основополагающими работами в области геофизики, в послевоенные годы Тихонов выполнил цикл работ по обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр при старшей производной. Из его статьи «О зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра», опубликованной в 1948 г., выросла теория сингулярных возмущений – раздел науки о дифференциальных уравнениях, как обыкновенных, так и с частными производными.

Тихонову было поручено возглавить выполнение всех расчетов, связанных с созданием водородной бомбы. Не обладая такой вычислительной техникой, которая имелась у американцев, сотрудники отдела проводили расчеты на немецких трофейных электромеханических машинах «Мерседес». С точки зрения числа операций, остро стояли вопросы экономичных алгоритмов расчета. Тихонов успевал в эти годы руководить отделом, читать лекции и вести семинары в МГУ, продолжать фундаментальные исследования в области геофизики и теории дифференциальных уравнений с малыми параметрами, писать учебники. Его исключительные заслуги перед страной были отмечены в 1953 г. Государственной премией СССР и присуждением звания Героя Социалистического Труда.

В 1963 г. из Математического института им. В.А. Стеклова выделился Институт прикладной математики, которым руководил М.В. Келдыш. Его заместителем, а с 1979 г. директором института стал Андрей Николаевич Тихонов. Вместе с А.А. Самарским в 1950–1960 гг. Тихонов провел фундаментальные исследования в области проблем вычислительной математики. Были получены новые результаты в теории разностных схем, с помощью которых приближенно решаются краевые задачи для уравнений математической физики. Они ввели в вычислительную математику понятие однородных разностных схем и на основе новых численных методов создали удобные и экономичные алгоритмы.

Основная идея, предложенная Тихоновым для решения некорректных задач, – регуляризация, замена одной некорректной задачи семейством зависящих от параметра корректных задач. Реализации этой идеи было посвящено более 20 публикаций в период с 1963 по 1966 г. Создание метода устойчивого решения широкого класса некорректных задач считается одним из наиболее значимых достижений современной математики. В 1966 г. цикл работ А.Н. Тихонова по некорректным задачам был отмечен Ленинской премией, а сам Андрей Николаевич стал действительным членом АН СССР [18].

Под руководством А.Н. Тихонова были осуществлены многие работы вычислительной диагностики – совокупности методов и средств, предназначенных для исследования объектов по имеющейся косвенной информации с помощью вычислительной техники. Например, были созданы отечественные компьютерные томографы для диагностики состояния головного мозга.

В 1976 г. Тихонов получил вторую Государственную премию, а в 1986 г. стал дважды Героем Социалистического Труда.

Умер 7 ноября 1993 г. в Москве.

А.А. Дородницын

Дородницын Анатолий Алексеевич родился 2 декабря 1910 г. в селе Башино Тульской области в семье врача. Детские годы он провел в Украине, в 1925 г. окончил школу-семилетку на Полтавщине. Затем семья переехала в Грозный, где Дородницын получил сначала среднее образование, а затем окончил в 1931 г. горный факультет Грозненского нефтяного института по специальности «инженер по эксплуатации нефти».

Проработав несколько лет начальником сейсмических геологоразведочных партий на Урале, в Башкирии и Туркмении, в 1935 г. Дородницын стал сотрудником, а с 1936 г. аспирантом Главной геофизической обсерватории в Ленинграде. Им выполнен цикл работ по метеорологии, в которых успешно применен математический аппарат для анализа ранее не учитывающегося волнового характера воздушных течений.

В 1939 г. Дородницын защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые задачи обтекания неровностей поверхности земли воздушным потоком». Он начинает работать доцентом кафедры высшей математики Ленинградского горного института и старшим научным сотрудником Главной геофизической обсерватории. В 1941 г. Дородницына приглашают в Москву в Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ) имени Н.Е. Жуковского. Вся его дальнейшая жизнь связана с этим институтом. Там в 1942 г. он защитил докторскую диссертацию на тему «Пограничный слой в сжимаемом газе».

В 1944 г. Дородницын стал профессором Московского авиационного института имени С. Орджоникидзе, а в 1945 г. – старшим научным сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1947 г.

Дородницын получил Государственную премию за разработку проектов новых крыльев для скоростных самолетов.

Развитие реактивной авиации и ракетостроения потребовало интенсивных исследований аэродинамических свойств тел вращения, обтекаемых потоком газа с ударными волнами. Для американских ученых, в распоряжении которых были лучшие вычислительные средства, вопрос создания оптимальных методов расчета при решении аналогичных задач не стоял так остро, как для их российских ученых. Дородницын создает рациональные методы расчета, учитывающие ограниченные возможности отечественных вычислительных средств. При решении конкретных практических задач российским ученым параллельно приходилось совершенствовать математический аппарат.

Фундаментальные результаты получил Дородницын в теории асимптотических методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты его исследований в этой области широко используются в прикладных задачах, связанных с колебательными процессами и динамикой летательных аппаратов при их входе в атмосферу. Они привели к созданию нового направления исследований.

Дородницын занимался также решением задач линейной алгебры. Им развит метод нахождения собственных значений и собственных векторов движением по параметру для симметрической вещественной матрицы, зависящей от параметра. Математические работы Дородницына публиковались параллельно с его работами по теории крыла, теории сверхзвуковых течений, по метеорологии. В 1952 г. Анатолий Алексеевич опубликовал капитальный труд «Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка».

В 1951 г. Дородницын получил Государственную премию за исследования в области аэродинамики и возглавил отдел в МИАН СССР, в 1953 г. был избран действительным членом Академии наук СССР и назначен начальником отдела в Отделении прикладной математики.

С 1955 по 1989 г. Дородницын возглавлял Вычислительный центр АН СССР. После появления первых ЭВМ основным направлением в творчестве Дородницына становится разработка новых вычислительных методов и их приложение к актуальным научно-техническим проблемам. Он первым применил машинные численные методы при решении задач, связанных с аэродинамикой летательных аппаратов. Для численного интегрирования нелинейных уравнений с частными производными Дородницын предложил простой и эффективный метод интегральных соотношений. Этот метод развивался под его руководством в Вычислительном центре АН СССР, где было решено множество важных задач газовой динамики для авиации и космонавтики. Много сил Дородницын отдавал внедрению вычислительной техники в научные исследования в различных отраслях народного хозяйства.

В 1961 г. Дородницын стал главным редактором «Журнала вычислительной математики и математической физики». Ряд его публикаций посвящен информатике. Он приложил немало усилий для того, чтобы информа-

тика стала самостоятельной наукой, которая занимается разработкой и анализом вычислительных средств, алгоритмов и программного обеспечения. В 1968 г. его избрали президентом Международной федерации по обработке информации.

С конца 1960-х годов интересы Дородницына сосредоточились на численном решении задач о движении вязкой жидкости, которые на практике возникают в условиях полета с гиперзвуковой скоростью на больших высотах. Им были разработаны методы решения таких задач с введением малого параметра.

Научное творчество Дородницына – выдающегося ученого в области прикладной математики, аэродинамики и физики атмосферы – отличается многогранностью. К области научных интересов Анатолия Алексеевича принадлежали разработка систем автоматического проектирования в самолетостроении, внедрение математического моделирования в биологию, экономику, агрономию, распознавание образов в геологии и медицине. Он изучал вопросы математического моделирования взаимодействия человека и биосферы, активно выступал в защиту Аральского моря, боролся против переброски вод северных рек.

Как ученый Дородницын пользовался огромным авторитетом за рубежом и принимал активное участие в различных научных конференциях и конгрессах на всех континентах.

В 1970 г. ему присвоено звание Героя Социалистического Труда, в 1983 г. присуждена Ленинская премия за работу в области вычислительной техники. Он награжден пятью орденами Ленина и многими другими орденами и медалями.

Скончался Анатолий Алексеевич Дородницын 7 июня 1994 г. в Москве.

Г.И. Марчук

Марчук Гурий Иванович родился 8 июня 1925 г. в селе Петро-Херсонец (ныне Оренбургская область) в семье учителя химии. Летом 1941 и 1942 гг. Гурий работал помощником комбайнера. В 17 лет он окончил школу и поступил в Ленинградский университет, эвакуированный в тыл. В 1943 г., по достижении совершеннолетия, его призвали в армию. После демобилизации в 1945 г. он продолжил учебу на математико-механическом факультете Ленинградского университета.

После окончания университета (1949) Гурий Иванович работал в Московском геофизическом институте АН СССР. В 1952 г. после учебы в аспирантуре защитил кандидатскую диссертацию на тему «Динамика крупномасштабных полей метеорологических элементов в бароклинной атмосфере».

В 1952 г. Г.И. Марчук был приглашен в Лабораторию «В» Первого главного управления Совета министров СССР, в 1955 г. переименованную в Физико-энергетический институт Госкомитета СССР по использованию атомной

энергии. В Обнинске, где находилась эта лаборатория, Г.И. Марчук работал в течение десяти лет. Здесь он занимался исследованиями, связанными с созданием теории ядерных реакторов и методов их расчета. Численные методы решения задач расчета ядерных реакторов легли в основу его докторской диссертации, защищенной в 1957 г. Монография Г.И. Марчука «Численные методы расчета атомных реакторов» была издана в 1959 г. в издательстве «Атомная энергия». Вторая более общая монография «Методы расчета атомных реакторов» была издана в 1961 г. В 1959–1961 гг. Г.И. Марчук принял участие в разработке требований к ядерной безопасности для заводов и других предприятий атомной промышленности. На основе работ Г.И. Марчука созданы реакторы с теплоносителями на жидком металле для атомных подводных лодок. За эти работы ему в 1961 г. присуждена Ленинская премия.

В 1962 г. М.А. Лаврентьев и С.Л. Соболев пригласили Гурия Ивановича в Новосибирский Академгородок. Марчука избрали членом-корреспондентом по Сибирскому отделению (СО) АН СССР (по специальности «атомная энергетика»). Он возглавил Вычислительный центр (ВЦ) Института математики СО АН СССР, который позже стал самостоятельной организацией – ВЦ СО АН СССР. В Новосибирском университете Марчук с 1962 по 1980 г. возглавлял кафедру вычислительной математики.

При создании ядерных реакторов расчет переноса излучения нейтронов представлял сложность, устранение которой сводилось к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для чего Г.И. Марчук предложил аппарат матричного исчисления (переход к векторно-матричным уравнениям). Предложенный математический аппарат в виде интегро-дифференциальных уравнений Больцмана можно было применить не только для задач расчета ядерных реакторов, но и для описания теплового режима атмосферы. Результаты исследований Марчук докладывал на IV Всесоюзном математическом съезде в 1964 г. и на Международном конгрессе математиков в 1966 г.

Совместно с Н.Н. Яненко в 1964–1965 гг. Г.И. Марчук предложил метод расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики, в частности для уравнений переноса излучения. Предложенный метод оказался применим для решения задач динамики атмосферы при составлении долгосрочных прогнозов погоды и изменений климата.

В области вычислительной математики Марчук внес вклад в развитие теории разностных схем. Им построены и исследованы разностные схемы для классов уравнений, возникающих в теории ядерных реакторов, предложен метод построения разностных схем на основе интегральных тождеств, который получил дальнейшее развитие в работах отечественных и зарубежных ученых. Вместе с учениками им решен ряд проблем в теории разностных и вариационно-разностных схем для различных задач математической физики. Значительную часть времени Гурий Иванович уделял разработке и обоснованию новых численных методов линейной алгебры.

Марчук создал теорию оптимального управления в задачах охраны окружающей среды. Им предложены алгоритмы решения общей задачи опреде-

ления допустимой области размещения промышленных предприятий, планирования строительства объектов с учетом степени загрязнения. Он является одним из авторов нового направления прикладной математики – математического моделирования в медицине. Им выведена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих иммунные реакции человеческого организма на вирусные и бактериальные инфекции.

В 1968 г. Г.И. Марчук стал действительным членом АН СССР по Отделению наук о Земле (физика атмосферы). В 1975 г. ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда. Общим собранием Сибирского отделения АН СССР в 1975 г. Марчук был избран председателем этого отделения. Он проработал на этом посту в течение 5 лет, будучи одновременно вице-президентом АН СССР. В 1979 г. Г.И. Марчук был награжден Государственной премией СССР в области науки и техники. В 1980 г. он создал и возглавил Отдел вычислительной математики АН СССР. В 1991 г. Отдел был преобразован в Институт вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН). С 1980 по 1986 г. Г.И. Марчук был заместителем председателя Совета министров СССР и председателем Государственного комитета СССР по науке и технике, а с 1986 по 1991 г. – президентом АН СССР.

Большой цикл трудов Марчука посвящен моделированию климата и его изменений. Он исследовал проблемы теории крупномасштабных атмосферных процессов и разработал численные методы решения прогностических уравнений в квазигеострофическом приближении, провел исследования по выявлению энергоактивных районов Мирового океана, существенно влияющих на колебания климата. В 1975 г. за эти работы он был удостоен премии им. А.А. Фридмана АН СССР, а в 2000 г. – Государственной премии.

До 2000 г. Марчук работал директором Института вычислительной математики Российской академии наук, после – советником Российской академии наук, почетным директором ИВМ РАН, президентом российского общества «Знание». Научная деятельность Г.И. Марчука связана с глобальными проблемами: изменением климата и загрязнением планеты, сохранением генофонда Земли.

В 1980–2003 гг. Марчук был заведующим кафедрой математического моделирования физических процессов Московского физико-технического института. С 2004 г. он возглавляет кафедру вычислительных технологий и моделирования факультета вычислительной математики и кибернетики в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

Марчук избран иностранным членом 11 академий, является почетным доктором 8 университетов мира, награжден золотыми медалями им. М.В. Келдыша, им. П.Л. Чебышёва, им. М.А. Лаврентьева, медалью Гамбургского международного общества Тепфера и многими орденами.

А.А. Самарский

Самарский Александр Андреевич родился 19 февраля 1919 г. в селе Ивановко Донецкой области в многодетной крестьянской семье. После окончания школы в 1936 г. Самарский поступил на физический факультет Московского университета. Будучи студентом, он принимал участие в работе научного семинара А.Н. Тихонова.

В июле 1941 г. Самарский вступил добровольцем в 8-ю Краснопресненскую дивизию московского народного ополчения и был направлен телефонистом в отдельный батальон связи. Во время отступления к Москве Самарский стал бойцом разведроты 108-й дивизии. У реки Угры погибло практически все московское ополчение. Во время наступления 12 декабря 1941 г., находясь с группой бойцов в разведке, Самарский подорвался на мине, был тяжело ранен в обе ноги и отправлен в тыл. В сентябре 1942 г. в Минусинске его выписали из госпиталя. Он стал работать учителем математики на золотом прииске «Коммунар» в Ширинском районе Красноярского края.

В конце 1943 г. А.Н. Тихонов сумел добиться для Самарского вызова в Москву для продолжения учебы на физическом факультете МГУ. В 1945 г. Самарский окончил университет. Его дипломная работа была настолько хорошо выполнена, что оппоненты предлагали присвоить Самарскому ученую степень кандидата наук. Александр Андреевич не имел московской прописки, поэтому после присвоения степени должен был бы уехать из Москвы. Тихонов предложил ему поступать в аспирантуру, чтобы еще три года работать в университете и заниматься наукой. За это время Самарский написал 20 научных работ, а его кандидатская диссертация содержала 20 страниц введения и 20 страниц текста. В ней молодой ученый указал на ошибочность выводов в статье Л.Д. Ландау и Д.Д. Иваненко о структуре атома.

Вопрос об отъезде Самарского из столицы вновь встал после защиты им диссертации, но постановлением Совета министров СССР от 10 июня 1948 г. была учреждена математическая лаборатория для решения задач, связанных с созданием атомной бомбы. Эту лабораторию возглавил Тихонов, а Александр Андреевич был назначен ведущим сотрудником. Ему поручили разработку численных методов. Перед лабораторией была поставлена задача расчета мощности взрыва с учетом всех имеющихся к тому времени уравнений. Вычислительной математике в то время требовалось разработать эффективные и надежные численные методы для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Такие методы были разработаны. Это позволило проводить математическое моделирование поведения реальных изделий до, а иногда и вместо, физических испытаний. Так создавались математическое моделирование и вычислительный эксперимент – новая методология исследований на стыке наук. Использовалась оптимальная триада

математического моделирования: модель – алгоритм – программа. До 1953 г. использовалась ручная вычислительная техника («Мерседес»). В США уже были ЭВМ. Американские ученые возлагали большие надежды на технику, и поэтому отстали в разработке новых методов.

В 1953 г. был создан Институт прикладной математики АН СССР, первым директором которого был назначен М.В. Келдыш, заместителем директора – А.Н. Тихонов, математическая лаборатория превратилась в самый крупный отдел, который возглавил Самарский. В Институте был установлен первый экземпляр ЭВМ «Стрела». В 1957 г. Самарский защитил докторскую диссертацию, в которой были заложены основы современной теории разностных схем. Диссертация содержала около 800 страниц.

В 1959 г. Александр Андреевич стал профессором МГУ. В 1960-х годах тематика его научных исследований расширилась. Он начал заниматься проблемами физики плазмы, магнитной гидродинамики, механики сплошных сред.

В конце 1960-х годов А.Н. Тихонов и А.А. Самарский сделали открытие в физике. «Эффект *Т*-слоя» в плазме был обнаружен ими математически, при расчете на ЭВМ процесса расширения плазменного столба в магнитном поле. Результаты численного решения сложнейших уравнений свидетельствовали о том, что в отдельных зонах, слоях столба, сосредотачиваются электрические токи, поддерживающие более высокую температуру.

В 1970-х годах группа сотрудников Физического института АН СССР им. П.Н. Лебедева, возглавляемая лауреатом Нобелевской премии академиком Н.Г. Басовым, изучала механизм возбуждения термоядерной реакции при помощи лазера. Математическим моделированием процесса в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша занимались А.Н. Тихонов и А.А. Самарский [59].

А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским написан уникальный учебник «Уравнения математической физики». При всей его математической строгости он наиболее полно объясняет суть физических явлений, в сравнении с другими учебниками по математической физике. Этот учебник выдержал пять изданий и переведен на многие языки. По нему продолжают заниматься все те, для кого эта наука важна как метод исследования.

Около 50 лет Самарский возглавлял кафедру на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ и около 30 лет – кафедру в Московском физико-техническом институте. В 1966 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 1976 г. – действительным членом АН СССР. В 1979 г. Самарскому присвоено звание Героя Социалистического Труда. Скончался Александр Андреевич 11 февраля 2008 г. после продолжительной и тяжелой болезни.

Глава 14

ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Здесь что? Мысль роль мечты играла,
Металл ей дал пустой рельеф;
Смысл – там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж *d* и *f*!

В.Я. Брюсов

Обыкновенные дифференциальные уравнения

В 1929–1930 гг. появились первые работы И.А. Лаппо-Данилевского по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений на основе разработанной им общей теории функций от матриц. Исследования Лаппо-Данилевского получили серьезное развитие в работах Н.Е. Кочина, Н.П. Еругина и других.

С 1926 г. в Киеве весьма интенсивно работают Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов. Крылову на тот момент 47 лет, а Боголюбову – 17. В 1932 г. они начали большую интересную серию исследований в области нелинейной механики, на что, по-видимому, повлияли выступления Л.И. Мандельштама и А.А. Андронова.

В исследованиях Крылова и Боголюбова сразу наметилось оригинальное направление, обусловленное задачами нелинейной механики и астрономии. Ученые рассматривали нелинейные уравнения, содержащие малый параметр. Они решили трудную и важную для приложений задачу нахождения функционального приближенного значения решений таких уравнений.

Новым этапом в развитии исследований по нелинейной механике явилась работа Н.Н. Боголюбова «О некоторых статистических методах в математической физике», написанная в 1945 г. В ней автор обосновал и дал точную формулировку так называемого метода осреднения, применявшегося раньше в более простых случаях, и распространил его на решение многих трудных задач нового типа.

Метод осреднения встречался уже в одной из работ Ван-дер-Поля 1920 г., но в ней не был обоснован. Некоторые коррективы внес П. Фату. Этот метод широко использовали в 1934 г. Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси и в 1960 г. А.А. Андронов, А.А. Витт и С.Э. Хайкин. Н.Н. Боголюбов же придал методу более общий характер.

Исследования Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова послужили тем фундаментом, опираясь на который, выросла киевская школа дифференциальных уравнений. Результаты проделанной Н.Н. Боголюбовым работы нашли и находят применение во многих областях теории дифференциальных уравнений,

в том числе теории бесконечных систем дифференциальных уравнений, а также в теории уравнений с частными производными.

В сплочении научного коллектива московских математиков большую роль сыграли выдающиеся педагоги и ученые, такие как Н.Н. Лузин, Д.Ф. Егоров и В.В. Степанов. Эрудированность, общительность, способность разобраться в еще не законченных исследованиях и выслушать рассказ начинающего ученого привлекали к Степанову многих людей. Он стал основателем и достойным руководителем московской школы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

К середине 1920-х годов ученики Лузина расширяют тематику исследований: одни занимаются топологией, другие – теорией вероятностей, третьи – дифференциальными уравнениями. М.А. Лаврентьеву удалось найти дифференциальное уравнение, для которого все точки некоторой области являются точками неединственности. П.С. Александров и В.В. Немыцкий доказали принцип неподвижной точки для гильбертова пространства и новые теоремы существования для дифференциальных уравнений, но Шаудер опубликовал аналогичные результаты раньше, что не позволило работе отечественных ученых стать приоритетной.

Внимание математиков привлекала теория динамических систем. В широком смысле динамической системой называется произвольная физическая система, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений или даже сама такая система безотносительно ее происхождения. Иногда теорию динамических систем называют качественной теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Это в основном относится к ее разделам, исследующим поведение траекторий в некоторых частях фазового пространства возле замкнутых траекторий или возле положений равновесия.

Метрическую теорию динамических систем называют эргодической теорией. Она изучает динамические системы с инвариантной мерой, смежные вопросы и тесно связана с функциональным анализом, теорией вероятностей и теорией информации.

В 1927 г. вышла книга Г. Биркгофа «Динамические системы». Учеников Лузина в особенности привлекла седьмая глава, где к решению механических проблем прилагался такой рафинированный аппарат теории множеств, как трансфинитные числа, да и все остальное было чистейшей теорией множеств. Этой проблематикой заинтересовался живший в то время в Ленинграде А.А. Марков-мл. Он полностью пересмотрел, уточнил и развил материал седьмой главы. Книга Биркгофа о системах с двумя степенями свободы привлекла внимание и членов семинара П.С. Александрова.

В 1930 г. В.В. Степанов собрал молодежь в Физическом институте в одной из лабораторий Мандельштама. Это и было началом семинара по качественной теории дифференциальных уравнений. Первые доклады читал А.А. Марков.

1930–1935 гг. были исключительно благоприятными для развития теории дифференциальных уравнений в нашей стране, в частности в Москве. Ученик Д.Ф. Егорова И.Г. Петровский написал работу о структуре окрестности особой точки для систем дифференциальных уравнений, значительно усилив

результаты О. Перрона, относящиеся к тому же времени. А.Н. Тихонов и В.В. Степанов построили топологическую теорию почти периодических движений. В.В. Немыцкий развил метод сечений и ввел понятие седла на бесконечности и вполне неустойчивые системы. А.А. Марков-мл. написал целый ряд работ по теории динамических систем, в частности установил связи между почти периодичностью и устойчивостью по Ляпунову. А.Я. Хинчин доказал новую, самую общую форму эргодической теоремы, уточнил классическую теорему о возвращении Пуанкаре, В.В. Степанов нашел формулировку эргодической теоремы на случай пространства бесконечной меры.

В 1936–1941 гг. Л.С. Понтрягин и А.А. Андронов получили значительные результаты в теории «грубых систем». На примере этих систем были четко поставлены задачи о характеристике поведения интегральных кривых в целом. Ранее такие задачи рассматривал Пуанкаре, но Понтрягин и Андронов сформулировали проблему более обще и приступили к изучению топологических инвариантов систем интегральных кривых. С тех пор исследование топологических инвариантов системы интегральных кривых стало одной из основных проблем для развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений в Москве.

В период 1935–1941 гг. продолжались исследования по метрической теории динамических систем. Поскольку в системах с интегральным инвариантом почти все движения устойчивы по Ляпунову, решалась задача определения условий существования интегрального инварианта. Крылов и Боголюбов показали, что инвариантная мера может быть введена в любых компактных системах. Эта же задача исследовалась в работе Маркова «Абелевы множества». На семинаре Немыцкого и Степанова была поставлена обратная задача: задать топологические свойства траекторий так, чтобы в систему можно было ввести интегральный инвариант, при котором любая область имела бы положительную меру. Эта задача была частично разрешена аспирантом Немыцкого Демидовичем.

В 1940 г. Немыцкий вел семинар по системам дифференциальных уравнений. В серии работ его аспирантов Минкевича и Барбашина была создана общая теория динамических систем.

Во время войны московские математики работали в различных научных центрах. В послевоенный период до конца 1940-х годов подводились итоги исследований. Вышла монография Степанова и Немыцкого «Качественная теория дифференциальных уравнений». Была опубликована работа Рохлина «Избранные вопросы метрической теории динамических систем». Постепенно метрическая теория динамических систем стала частью функционального анализа, а спектр – основной характеристикой систем.

В период с 1948 по 1955 г. в теории обыкновенных дифференциальных уравнений возникло много новых направлений, два из которых образовались по инициативе Колмогорова и Гельфанда.

Первое – изучение возмущений гамильтоновых систем – сразу было широко признано у нас и за рубежом. В 1954 г. на пленарном заседании Амстердамского конгресса математиков Колмогоров говорил о проблемах, которыми занимался еще Пуассон. Колмогоров показал, что классические

интегрируемые случаи имеют некоторую степень устойчивости, которую можно характеризовать в терминах меры Лебега. Тогда не все удалось завершить. Но позже ученик Колмогорова В.И. Арнольд довел теорию до логического завершения и установил, что ее методы приложимы не только к классической проблеме устойчивости Солнечной системы, но и к современной проблеме существования магнитной ловушки. Эти работы были опубликованы уже в 1960-х годах.

Начало второму направлению – изучению систем линейных уравнений с периодическими коэффициентами – было положено в работах И.М. Гельфанда. Речь идет о теории устойчивости Ляпунова. Эта проблема была связана с краевыми задачами и, следовательно, с вариационными методами. Трудами И.М. Гельфанда, В.Б. Лидского, М.Г. Нейгауз, В.А. Якубовича, а также в работах М.Г. Крейна создана теория областей устойчивости и неустойчивости для этих систем. При построении теории привлечен аппарат алгебры и функционального анализа.

В это же время возник семинар под руководством А.Н. Тихонова. Андрей Николаевич изучил вопрос о зависимости от параметра решений дифференциальных уравнений, если этот параметр находится при старших производных. В семинаре занимались также и аналитической теорией дифференциальных уравнений. Уравнения с малым параметром исследовались и в семинаре Понтрягина в Математическом институте им. В.А. Стеклова, где Е.Ф. Мищенко рассмотрел существование периодических решений для таких уравнений.

Труды Лаппо-Данилевского в трех томах на французском языке были изданы под редакцией В.И. Смирнова и Н.Е. Кочина. Кочин изучал проблему Римана (построение регулярной линейной системы дифференциальных уравнений с заданными многозначными особенностями в окрестности фиксированных особых точек). Н.П. Еругин впервые разрешил проблему Пуанкаре для иррегулярной системы.

В конце 1930-х годов Н.А. Артемьев занялся качественной теорией. В 1939–1941 гг. он исследовал гамильтоновые линейные системы с периодическими коэффициентами на основе метода Лаппо-Данилевского. До 1941 г. в Ленинграде велись работы только по аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. Интерес к этим вопросам у Еругина возник благодаря лекциям Гюнтера. Но в 1932 г. Гюнтер перестал работать в Ленинградском университете. Не был привлечен к работе кафедры и Еругин.

В 1939 г. Гюнтер возвращается в университет в качестве заведующего кафедрой дифференциальных уравнений и зачисляет сотрудником кафедры Еругина. С этого года работа по обыкновенным дифференциальным уравнениям в Ленинграде активизируется. Но уже в 1941 г. деятельность кафедры прекратилась в связи со смертью Гюнтера и уходом на фронт Еругина.

В сентябре 1942 г. Еругин после тяжелого ранения возвратился в Елабужский филиал Ленинградского университета, где в течение двух месяцев выполнял исследования, в том числе сумел построить теорию приводимых систем. Эти исследования легли в основу докторской диссертации, которую Еругин защитил в июле 1943 г. Успех в работе был обеспечен соединением метода Лаппо-Данилевского с идеями Ляпунова. Это новое направление

исследований Еругина, связанное с качественной теорией и теорией устойчивости, было осуществлением общих планов, продиктованных Еругину Гюнтером в 1940 г.

Ленинградский университет вернулся из эвакуации в 1944 г. Заведующим кафедрой дифференциальных уравнений университета стал Еругин. На семинаре кафедры велись работы по многим вопросам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, по теории линейных систем дифференциальных уравнений, по качественной теории и теории устойчивости. Новое направление началось в аналитической теории нелинейных систем дифференциальных уравнений и по многим другим вопросам. К 1956 г. на кафедре выполнено около 150 работ и напечатано пять монографий.

В 1956 г. Еругин переехал в Минск. Кафедра дифференциальных уравнений в Ленинграде разделилась на две: кафедру уравнений в частных производных и кафедру обыкновенных дифференциальных уравнений.

В 1945 г. вышла монография Боголюбова, в которой было по-новому определено на ближайшие десятилетия развитие асимптотических методов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Интересно отметить, что ученым Боголюбов стал в 16 лет. Имея формально образование только за семь классов, он публикует несколько научных работ по теории дифференциальных уравнений, требующих знания университетского курса математики. Через два года, в 1927 г., он получает степень доктора от Болонской академии наук без защиты диссертации, а в 1930 г. – от Украинской академии наук. Появилась книга Немыцкого и Степанова «Качественная теория дифференциальных уравнений», изданная в 1947 и 1949 гг. и переведенная впоследствии в США. Трудно переоценить значение этой книги в образовании и развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Руководитель киевской школы Н.Н. Боголюбов все больше углубляется в теоретическую физику, но появляется продолжатель асимптотических методов, ученик Боголюбова Ю.А. Митропольский.

С 1952 г. в Воронежском университете начинает работать семинар под руководством М.А. Красносельского, а с 1954 г. вторым руководителем стал С.Г. Крейн. Его участники развивали новые методы исследования в теории дифференциальных уравнений, опирающиеся на функциональный анализ, топологию и изучение дифференциальных уравнений в обобщенных пространствах, рассматривали вопросы теории периодических решений и их устойчивость, ограниченные и почти периодические решения, общие вопросы качественной теории в банаховых пространствах, зависимость решений от параметра, многомерные дифференциальные уравнения и другие вопросы.

Дифференциальные уравнения с частными производными

В России до 1917 г. теорией дифференциальных уравнений с частными производными занимались только в трех научных центрах: Киеве, Харькове, и Петербурге.

В.А. Стеклов исследовал смешанную задачу для линейных уравнений гиперболического типа при двух независимых переменных с коэффициентами,

не зависящими от t, и граничные задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Он построил теорию замкнутых ортонормированных систем функций и использовал созданный им метод усреднения функций.

В работах С.Н. Бернштейна рассматривались в основном краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений, а также задачи вариационного исчисления и геометрии поверхностей, приводящие к таким уравнениям. Первые публикации Бернштейна по этим вопросам относятся к 1904 г. Его результаты на несколько десятилетий опередили развитие теории уравнений с частными производными, а его идеи используются и в современных работах. Большой цикл его работ посвящен решению 19-й и 20-й проблем Гильберта о вариационной задаче для функционалов.

Бернштейн утверждал, что разрешимость задачи зависит от наличия априорных оценок максимумов модулей решений и их производных до определенного порядка для какого-либо однопараметрического семейства задач, связывающего данную задачу с заведомо разрешимой. Это положение Бернштейна нашло свое строгое и полное оформление много позже в топологических принципах неподвижной точки. Ему принадлежит также ряд важных результатов, касающихся свойств нелинейных эллиптических уравнений. Им получено обобщение теоремы Лиувилля из теории функций комплексного переменного для случаев решений уравнений эллиптического и параболического типов.

Работы Н.М. Гюнтера и С.Л. Соболева по теории уравнений с частными производными конца 1920-х – начала 1930-х годов связаны с использованием идей функционального анализа.

Гюнтер считал, что вместо функций точки надо рассматривать функции областей и строить их теорию. В связи с этим большое значение в его работах имеют интегралы типа интеграла Стилтьеса. Их применение связано с тем, что, исходя из физического смысла задач механики, он вводил и изучал обобщенные решения из класса линейных функционалов в пространстве непрерывных функций. Гюнтеру также принадлежат работы по теории потенциала, продолжающие традиции А.М. Ляпунова. Они связаны с его исследованиями по гидродинамике и некоторыми задачами для уравнения Лапласа и волнового уравнения.

В середине 1930-х годов С.Л. Соболев ввел и начал использовать новые понятия, вошедшие в его последующие работы и во многом способствовавшие созданию функциональных методов в теории уравнений с частными производными. Основная монография Соболева, посвященная этим вопросам, называется «Некоторые применения функционального анализа в математической физике» (1950). Им рассмотрены понятия «обобщенная функция» и «обобщенная производная». Впервые некоторый класс обобщенных функций был введен Соболевым и использован им в 1935 г. при решении задачи Коши для линейных гиперболических уравнений второго порядка, в которых свободный член является обобщенной функцией. Решение уравнений Соболев также искал в классе обобщенных функций.

В 1930-е годы выход за рамки классических решений краевых задач можно видеть в исследованиях Ж. Лере по нестационарным задачам гидро-

динамики для вязких несжимаемых жидкостей и в работах Н.М. Гюнтера по задаче Дирихле и начальной краевой задаче для уравнения колебаний неоднородной струны.

Развернутую теорию обобщенных функций в 1950 г. построил французский математик Лоран Шварц. В 1950-х годах И.М. Гельфандом в соавторстве с другими математиками опубликована серия монографий «Обобщенные функции», в которых изложено дальнейшее развитие теории. Важные результаты получены Л. Хёрмандером. Термин «обобщенная функция» был введен не сразу. В работе Соболева говорится об идеальных функциях, а посвященная обобщенным функциям монография Шварца называлась «Теория распределений».

В 1930-е годы И.Г. Петровским написаны фундаментальные работы по теории систем дифференциальных уравнений с частными производными, где выделены основные классы систем – эллиптические, параболические и гиперболические – и проведено их исследование. Большая работа, выполненная Петровским в 1946 г., посвящена исследованию лакун для уравнений высоких порядков и систем гиперболического типа.

В XX в. в теории дифференциальных уравнений с частными производными широко стал применяться метод конечных разностей (метод сеток), который ранее широко использовался только для обыкновенных дифференциальных уравнений. Он играет большую роль как в численном решении задач, так и в их теоретическом анализе. Этому методу посвящены работы Л.А. Люстерника (1926), Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви (1928), И.Г. Петровского (1938).

С.Н. Бернштейн

Бернштейн Сергей Натанович родился 22 февраля 1880 г. в Одессе в семье доктора медицины. Отец умер за несколько месяцев до рождения сына, но мать смогла дать хорошее образование всем четверым детям. Сергей Натанович после окончания гимназии не был принят ни в один из российских университетов, поэтому уехал во Францию. В 1899 г. он окончил Парижский университет, а в 1901 г. – Парижскую высшую электротехническую школу.

В 1903 г. 24-летнему математику удалось решить 19-ю проблему Гильберта. Это решение Бернштейн представил в Париже в качестве диссертации на соискание ученой степени доктора наук. И эта степень была ему присуждена комиссией, в которую входили Адамар, Пикар и Пуанкаре.

За свою жизнь Бернштейн сравнительно недолго работал в Петербурге, однако, исходя из методологических взглядов, он вполне обоснованно может считаться представителем Петербургской математической школы. В 1907–1908 гг. Бернштейн работал на Высших женских курсах в Петербурге. В 1908 г. он переезжает в Харьков, где до 1933 г. работает профессором Харьковского университета.

В 1908 г. Бернштейн в Харькове защитил магистерскую диссертацию, в которой, кроме видоизмененного решения 19-й проблемы Гильберта, представил решение 20-й проблемы. Через пять лет в докторской диссертации «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени» он продолжил исследование идей Чебышёва. После этого харьковская школа математики под его руководством многие годы занималась исследованиями проблемы теории наилучшего приближения функций многочленами.

Значительную роль сыграл Бернштейн в установлении контактов между математиками Советского Союза и западноевропейских стран. В 1922–1924 гг. он находился в научной командировке в Германии и Франции, с 1 сентября 1923 г. по 1 ноября 1924 г. – читал в Сорбонне курс теории вероятностей. В 1911 г. Бернштейн был избран академиком Бельгийской академии наук, в 1924 г. – членом-корреспондентом Академии наук (СССР), а в 1925 г. – академиком Украинской академии наук, в 1929 г. – академиком Академии наук СССР. В 1928 г. он возглавил Украинский институт математических наук, организованный в Харькове на базе научно-исследовательских кафедр.

Сергей Натанович был очень скромным человеком, но всегда последовательно и бескомпромиссно отстаивал собственные взгляды, невзирая на возможные негативные последствия своей принципиальности. Он возражал против внедрения диалектики в математику и пострадал из-за своего выступления на I Всесоюзном съезде математиков и статьи в институтской многотиражке – был уволен с должности директора основанного им Украинского института математических наук. В 1932 г. его не пустили на Международный конгресс математиков в Цюрихе В 1936 г. он вновь смело выступил в защиту Н.Н. Лузина, рискуя карьерой.

Предметом научных исследований Бернштейна стали три больших раздела математики: теория дифференциальных уравнений с частными производными, теория функций и теория вероятностей. В каждом из этих разделов им получены важнейшие результаты. В 1920-х годах Бернштейн и Лузин были наиболее известными математиками в Советском Союзе.

О вкладе Бернштейна в теорию дифференциальных уравнений с частными производными уже упоминалось в связи с решением 19-й и 20-й проблем Гильберта. Его результаты на несколько десятилетий опередили работы других исследователей.

В теории функций С.Н. Бернштейн является основателем нового большого раздела – конструктивной теории функций вещественной переменной. Еще до революции им были получены фундаментальные результаты, лежащие в основе современной теории приближения функций. Он является создателем современной конструктивной теории функций вещественной переменной, которая возникла, как он сам писал, на основе идей двух великих математиков прошлого столетия – Вейерштрасса и Чебышёва.

Весьма разнообразны его результаты в теории вероятностей. К началу XX в. возникла потребность изучить основные понятия теории вероятностей, которую тогда считали разделом физики, выяснить условия, в которых можно пользоваться ее методами, и систематизировать результаты. Вот почему

особенно важное значение приобрело формально-логическое обоснование теории вероятностей. Первая попытка такого рода обоснования относится к 1917 г. и принадлежит академику Бернштейну. Он поставил перед собой более сложную цель: на базе создаваемой им системы аксиом теории вероятностей построить логически безупречную теорию математической статистики и показать возможность строгого и точного изучения важнейших проблем естествознания. Эти идеи явились источником для целого ряда работ Бернштейна как математического, так и естественнонаучного плана, в особенности посвященных теоретическим проблемам биологии. Им написана одна из лучших в мире книг по теории вероятностей с одноименным названием («Теория вероятностей»).

Работы Бернштейна первого периода по теории вероятностей представляют собой блестящее завершение исследований Чебышёва, Маркова и Ляпунова по предельным теоремам для сумм случайных величин. Ему принадлежат весьма общие, в известном смысле подводящие итог результаты по предельным теоремам как для независимых, так и для зависимых случайных величин. Он исследовал условия, при которых выполняется двумерный нормальный закон, и границы его применения к задачам биологии. Им введено в рассмотрение важное понятие мартингала. Бернштейн существенно продвинул теорию неоднородных цепей Маркова. Он первым исследовал стохастические дифференциальные уравнения.

Бернштейн с большим уважением относился к членам московской школы теории вероятностей, но считал, что старым классическим методам уделяется недостаточно внимания, что они себя еще не исчерпали, поэтому их необходимо развивать дальше.

В 1933 г. после переезда в Ленинград С.Н. Бернштейн в Ленинградском университете и Ленинградском политехническом институте, а затем и в других технических вузах, организованных на базе факультетов этого института, создал центры научных исследований в различных областях математики. С 1935 г. он возглавлял отдел теории вероятностей и математической статистики Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Институт находился в Москве, а Бернштейн продолжал жить в Ленинграде и бывал в столице лишь наездами. Из Ленинграда он уехал в эвакуацию в 1941 г. и уже не вернулся. Там во время блокады от голода умер его сын.

В 1942 г. Бернштейн стал лауреатом Государственной премии, в 1955 г. – избран иностранным членом Парижской академии наук.

До 1947 г. он читал лекции в Московском университете. По воспоминаниям Б.В. Гнеденко, Сергей Натанович тяготился педагогической работой, его больше интересовали математические исследования, а не передача знаний ученикам.

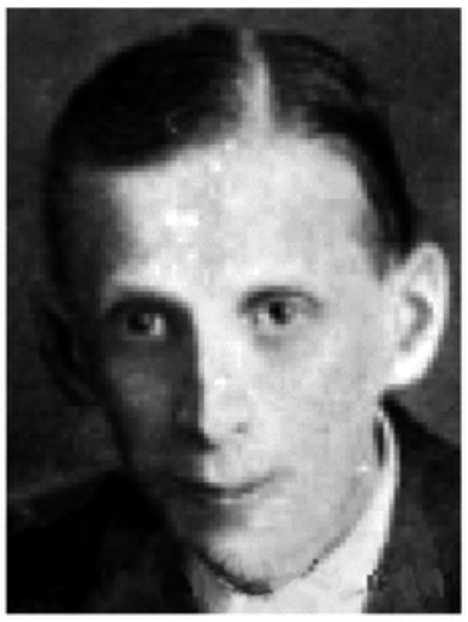
Бернштейн возглавил московскую группу теории приближения. Его труды оказали заметное влияние на развитие теории приближения в нашей стране и за рубежом. Работы Бернштейна по конструктивной теории функций составляют два тома собрания сочинений, изданного Академией наук СССР.

После 1946 г. С.Н. Бернштейн занимался изучением функции конечной степени. Он разработал теорию приближения на действительной оси при

помощи целых функций конечной степени, аналогичную теории приближения периодических функций тригонометрическими рядами. Значительно обобщив свои результаты, Бернштейн решил некоторые интерполяционные задачи для целых функций конечной степени.

Последние 25 лет Сергей Натанович провел в Москве. Умер Бернштейн 26 октября 1968 г.

И.А. Лаппо-Данилевский



Лаппо-Данилевский Иван Александрович родился 16 октября 1896 г. в Петербурге в семье известного историка, происходившего из дворян Екатеринославской губернии. В 1914 г. Иван Александрович поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. Через год он заболел, и учеба была прервана на многие годы. После революции Лаппо-Данилевский работал управдомом. В 1924 г. он восстановился в университете и за год сдал все экзамены. После окончания Ленинградского университета Иван Александрович поступил в аспирантуру к В.И. Смирнову и начал преподавать математику в высших учебных заведениях. Диссертацию он защитил в 1929 г.

За период с 1927 по 1930 г. Лаппо-Данилевский опубликовал 17 работ. Им построена теория аналитических функций от матриц и успешно применена к решению систем линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Соединенные с методами А.М. Ляпунова, исследования Лаппо-Данилевского позволили разрешить чрезвычайно трудные проблемы в других областях теории линейных уравнений: теории приводимых систем, теории линейных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, теории асимптотических разложений и т. д. В них впервые была построена развернутая теория функций от многих матриц и на основании этого предложены новые методы решения кардинальных задач теории линейных систем дифференциальных уравнений в алгоритмической форме, о чем ранее, казалось, нельзя было и мечтать.

На I Всесоюзном съезде математиков в 1930 г. Лаппо-Данилевским был прочитан доклад «Основные задачи теории систем линейных дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами». В том же году Иван Александрович за свои работы получил Рокфеллеровскую премию-стипендию и премию Главнауки Наркомпроса. По предложению академиков И.М. Виноградова, А.Н. Крылова и Н.Н. Лузина в 1931 г. ему присвоено звание члена-корреспондента АН СССР.

Лаппо-Данилевский поставил перед математиками проблему, которая была названа его именем и заключается в построении интегральной матрицы для иррегулярной линейной системы дифференциальных уравнений в виде произведения двух матриц. Одна матрица однозначна во всей плоскости независимого переменного, другая – многозначна и является решением регулярной

системы с теми же особыми точками, что и у исходной иррегулярной системы. Исследования Лаппо-Данилевского после его смерти продолжали многие ученые, наибольших успехов достигли Н.Е. Кочин и Н.П. Еругин.

В 1931 г. Лаппо-Данилевский отправился в командировку в Германию, где скончался на 35-м году жизни от острой сердечной недостаточности 15 марта.

М.А. Лаврентьев

Лаврентьев Михаил Алексеевич родился 19 ноября 1900 г. в Казани в семье научного работника Алексея Лаврентьевича Лаврентьева, позднее ставшего профессором механики. После окончания Коммерческого училища Михаил поступил на физико-математический факультет Казанского университета. После третьего курса он перевелся в Московский университет, который окончил в 1922 г. Работая в Научно-исследовательском институте математики и механики Московского университета, он стал одним из самых активных членов «Лузитании» и выполнил под руководством Н.Н. Лузина ряд исследований в области дескриптивной теории множеств и топологии.

Начало пути Лаврентьева в науке поражает стремительностью и размахом. В 1924–1925 гг. он исследует устойчивость множеств при отображениях и получает результаты, давшие ему признание у нас и за рубежом. Он доказывает теоремы о топологической инвариантности суслинских и борелевских множеств и теоремы о разбиении классов множеств на подклассы. В 25 лет ему присуждена премия Главнауки СССР за работы по математике. В 27 лет после завершения аспирантской работы «К теории гомеоморфных множеств» он на полгода командирован во Францию, его статьи публикуются в трудах Французской академии наук, его избирают членом Московского математического общества.

Основным направлением научных исследований Лаврентьева становится теория функций комплексного переменного. В 1928 г. он выступает с докладом о квазиконформных отображениях на Международном математическом конгрессе в Болонье, а в 1929 г. ему присваивается звание профессора Московского химико-технологического института, где он возглавляет кафедру математики. В том же году он начинает работать в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ) имени Н.Е. Жуковского под руководством С.А. Чаплыгина.

В 1931 г. Лаврентьев становится профессором Московского университета. Без защиты диссертаций ему присваивают две ученые степени – доктора технических наук (1934) и доктора физико-математических наук (1935). Разрабатываемые им методы по теории функций комплексного переменного находят широкое применение в аэродинамике и гидродинамике, а также в других разделах современной механики. Совместно со своим учеником М.В. Келдышем он получает важные результаты в теории приближений функций комплексного переменного.

В 1935 г. Лаврентьев начинает работать в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР, где возглавляет созданный им отдел теории функций.

Важное значение приобретают качественные исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Одно из направлений этих исследований, начало которым было положено в работах М.В. Келдыша (1937) и М.А. Лаврентьева (1937), состоит в исследовании зависимости решений краевых задач от изменений области.

В 1939 г. Лаврентьева избирают действительным членом Академии наук УССР. Так начался киевский период его деятельности. В столице Украины он руководил Институтом математики и механики Академии наук УССР.

Во время войны Лаврентьев вместе с коллективом института был эвакуирован в Уфу, где работал над решением с помощью математики и механики различных проблем оборонного характера, занимался теорией взрыва. Во время Курской битвы немецкие войска впервые применили кумулятивные снаряды, и необходимо было понять принцип их действия, чтобы определить, какая броня этим снарядам «не по зубам». Идея Лаврентьева о том, что металл облицовки заряда и металл брони ведут себя как жидкости, многим показалась нелепой, и его первое выступление на эту тему в Академии артиллерийских наук было встречено смехом. Ему удалось доказать, что при пробивании брони прочностные и упругие силы пренебрежимо малы по сравнению с инерционными.

В 1946 г. Лаврентьев был избран действительным членом Академии наук СССР и стал лауреатом Государственной премии за работы по теории струй и квазиконформным отображениям. В 1949 г. его работа по гидродинамической теории кумуляции была отмечена второй Государственной премией СССР. Позже теория кумуляции была использована при разработке защиты космических кораблей от метеоритов.

В 1948 г. Лаврентьев возвратился в Московский университет. Он активно участвовал в создании физико-технического факультета Московского университета, на базе которого был создан Московский физико-технический институт.

В 1949 г., обеспокоенный тем, что в СССР не придается должного значения созданию ЭВМ для решения научных задач, Лаврентьев написал письмо Сталину. В результате он был назначен директором Института точной механики и вычислительной техники АН СССР. Лаврентьеву предстояло решить задачу создания быстродействующей электронной счетной машины (БЭСМ).

В начале 1950-х годов в США была создана пушка, стреляющая ядерными зарядами. Лаврентьев был привлечен к разработке в СССР аналогичной пушки, которая была создана, но в серийное производство не пошла, так как приоритет был отдан ракетным системам. В 1958 г. за эту работу Лаврентьеву была присуждена Ленинская премия.

В 1957 г. Лаврентьева избирают вице-президентом Академии наук СССР. В том же году три академика, М.А. Лаврентьев, С.Л. Соболев и С.А. Христианович, решили обратиться в Президиум Академии наук и правительство с планом создания научных центров на востоке страны. После учета

пожеланий коллег-академиков окончательный вариант предусматривал создание следующих институтов: математики с вычислительным центром, теоретической и прикладной механики, гидродинамики, ядерной физики, автоматики и электрометрии, геологии и геофизики, цитологии и генетики, экспериментальной биологии и медицины, экономики. Позже к ним добавились четыре химических института. Нужно было выбрать место для будущего центра сибирской науки. Академики остановились на пригороде Новосибирска.

В конце 1957 г. было принято решение о создании Сибирского отделения (СО) Академии наук СССР, началось строительство Академгородка. М.А. Лаврентьев стал первым председателем Сибирского отделения Академии наук СССР и директором созданного им Института гидродинамики. Как организатор и руководитель крупнейшего научного центра страны, Лаврентьев подобрал высококвалифицированных ученых, сумел объединить и направить их усилия на решение важнейших научных проблем. Сибирское отделение АН СССР стало первым в стране крупным центром, объединяющим и организационно, и территориально институты, работающие по различным направлениям фундаментальной науки.

Вместе с группой учеников Лаврентьев создал теорию направленного взрыва. Считая грунт как бы несжимаемой жидкостью, они показали, что можно перебросить целый массив грунта без изменения его формы в заданном направлении, если в нужной пропорции обложить его со всех сторон взрывчаткой. Распределение толщины заряда должно быть таким, как и распределение давления в гидростатике, а именно, пропорциональным удалению от плоскости, перпендикулярной направлению желаемой скорости перемещения массива. Это аналогично ситуации, когда в наполненном графине возникает дополнительное давление стенок на воду при внезапном придании графину движения в заданном направлении. Теоретическими и экспериментальными исследованиями по механике взрыва занимаются издавна, а эффект давления обнаружен Лаврентьевым около 60 лет тому назад. Под руководством Лаврентьева направленным взрывом было осуществлено создание противоселевой плотины в урочище Медео, защитившее Алма-Ату от селевых потоков.

В 1959 г. Лаврентьев предложил новую схему плоского установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости. Он рассматривал поток как потенциальный в основной части и как движение с постоянной завихренностью у стенок.

Изучение теории струй идеальной жидкости значительно продвинулось. Исследования Лаврентьева были основаны на развитых им же принципах геометрической теории функций комплексного переменного. Он доказал теорему существования и единственности для струйного обтекания дуги, имеющей ось симметрии, и получил ряд выводов качественного характера о струйном обтекании выпуклых контуров. На основе полученного им поведения функций, реализующих конформное отображение, при деформации границы отображаемой области он получил в теории струй теоремы существования и единственности решения.

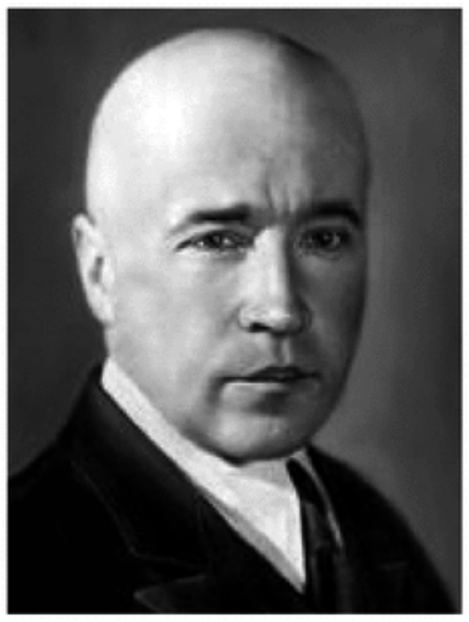
Результаты этих исследований изложены в монографии Лаврентьева «Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа» (1962).

Научные достижения Лаврентьева отмечены, кроме Государственных и Ленинской премий, золотой медалью им. М.В. Ломоносова АН СССР. В 1967 г. ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда. Он организовал ряд международных симпозиумов, неоднократно руководил советскими делегациями на научных конференциях за рубежом, был избран членом многих иностранных академий. С 1966 по 1970 г. он был вице-президентом Международного математического союза.

Среди специалистов по уравнениям с частными производными хорошо известна работа Лаврентьева о некорректных задачах математической физики. Широкое распространение получил учебник по теории функций комплексного переменного, написанный Лаврентьевым совместно с Б.В. Шабатом.

Михаил Алексеевич Лаврентьев умер 15 октября 1980 г. Его имя носят улицы в Москве и Казани, центральный проспект Новосибирского Академгородка и Институт гидродинамики СО РАН, физико-математическая школа при Новосибирском государственном университете, научно-исследовательское судно.

И.Г. Петровский



Петровский Иван Георгиевич родился 5 января 1901 г. в городе Севске Орловской губернии (ныне Брянская область). Дед Петровского стал купцом, женившись на дочери своего хозяина. Иван не захотел продолжать семейное дело, и в 1917 г. после окончания реального училища уехал учиться в Москву. Он поступил на естественное отделение физико-математического факультета Московского университета.

В связи с революционными событиями по требованию деда Иван оставил учебу и возвратился в семью, которая к тому времени переехала в Елизаветград (ныне Кировоград). В Москву он вернулся лишь в 1922 г. и поступил уже на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Как внука купца его неоднократно исключали из университета, но Ивану Георгиевичу удавалось восстанавливаться. Чтобы иметь средства к существованию, он вынужден был работать дворником в детском доме, грузчиком, а с 1923 – преподавателем математики на рабфаке в Высших художественно-технических мастерских (Вхутемас). В том же детском доме, где трудился Петровский, работала воспитательницей Ольга Афанасьевна, на которой в 1925 г. Иван Георгиевич женился. Позже Ольга Афанасьевна стала преподавателем мединститута, кандидатом биологических наук, а затем сотрудником научно-исследовательского института.

После окончания университета в 1927 г. Петровский стал аспирантом Д.Ф. Егорова. Он не входил в «Лузитанию», но его первая научная работа,

посвященная исследованию задачи Дирихле об отыскании гармонической функции, задаваемой уравнением Лапласа, близка по тематике к работам Лузина.

Он посещал семинар Хинчина и Колмогорова, хотя по возрасту был старше последнего. В начале 1930-х годов Петровским получены интересные результаты в теории вероятностей.

С 1929 г. Иван Георгиевич начинает преподавать в МГУ, читает курсы по теории дифференциальных и интегральных уравнений и другим разделам математики, организовывает научные семинары. Им получены фундаментальные результаты в алгебраической геометрии, теории вероятностей, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математической физике, теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В 1933 г. Петровский стал профессором Московского университета, а в 1935 г. ему без защиты диссертации присвоено ученое звание доктора физико-математических наук.

Алгебраическая геометрия была одним из разделов математики, которыми интересовался Иван Георгиевич. Первая работа по этой тематике – «Вопросы о топологической природе алгебраических кривых и поверхностей в действительной области» – опубликована в 1933 г. Важный результат в этом разделе математики, касающемся 16-й проблемы Гильберта, был получен Петровским в 1938 г. Он исследовал расположение алгебраических кривых на проективной плоскости. Позже, в 1940-х годах, в работах, написанных в соавторстве с О.А. Олейник, эти результаты были обобщены на проективное пространство. В работах, выполненных совместно с Е.М. Ландисом в 1950-х годах, получены результаты по оценке числа предельных циклов для полиномиальных дифференциальных уравнений. Однако полностью решить 16-ю проблему Гильберта не удалось.

Петровский часто говорил, что он думает медленно и ему все равно, решать легкую или сложную задачу. Поэтому он всегда выбирал самые трудные.

В 1930-х годах появились фундаментальные работы И.Г. Петровского по теории систем уравнений с частными производными, где выделены основные классы систем – эллиптические, параболические и гиперболические – и проведено их исследование. В 1934 г. опубликована его большая работа «О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки». С 1936 г. Петровский работал над задачей Коши и вопросом аналитичности решений систем уравнений в частных производных.

В 1930-е годы Петровский занимался исследованиями по топологии алгебраических многообразий и достиг значительных результатов в решении 16-й проблемы Гильберта. В настоящее время она включена в число наиболее важных проблем, которые предстоит решить в XXI в.

Не менее важной, чем научные исследования, Петровский считал общественную работу. В 1930-е годы в стране проводилась реорганизация вузов. В 1935 г. кафедра математики Саратовского университета была разделена на пять, и И.Г. Петровский был назначен заведующим кафедрой математического анализа. Столичные ученые работали в Саратове около двух лет. В 1939 г.

Петровский был назначен деканом механико-математического факультета Московского университета.

В 1941 г. он занимался приближенными и численными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных и дал новое общее доказательство разрешимости задачи Дирихле для случая многих переменных, основанное на применении так называемых барьеров и априорных оценок для разностных уравнений. Разработанный им метод переносится на широкий класс линейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Одна из основных работ Петровского выполнена в годы войны, опубликована в 1946 г. и посвящена исследованию лакун для уравнений высоких порядков и систем гиперболического типа. Лакунами Петровский называет области, в которых решение обладает специфическим свойством. За эту работу в 1946 г. Петровский получил Государственную премию.

В 1943 г. И.Г. Петровский был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1946 г. – действительным членом.

Вторую Государственную премию он получил в 1952 г. за учебники по трем основным курсам: обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с частными производными.

В 1940–1950-е годы И.Г. Петровский продолжил исследования в области обыкновенных дифференциальные уравнения и дифференциальных уравнений с частными производными. Несколько позже он приступил к исследованиям в области алгебраической геометрии, которые иногда проводил с О.А. Олейник.

В первые послевоенные годы Петровский был заместителем И.М. Виноградова, директора Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, а в 1949–1951 гг. исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-математических наук АН СССР.

С 1951 г. Петровский – ректор Московского университета и заведующий кафедрой дифференциальных уравнений механико-математического факультета. Свою работу на посту ректора Петровский начал в разгар строительства здания МГУ на Ленинских горах. Эта большая работа требовала постоянного внимания.

За 22 года пребывания Петровского на посту ректора к преподавательской работе было привлечено более 100 академиков, созданы новые факультеты, организовано более 70 кафедр и 200 лабораторий. Многое было сделано для налаживания контактов с крупнейшими научными и образовательными центрами мира. Петровского отличали демократичность взглядов и интерес ко всему, что его окружало.

Иван Георгиевич продолжал участвовать и в учебном процессе, и в научной работе. С 1946 г. до последних дней жизни он руководил научным семинаром по дифференциальным уравнениям и математическим задачам в физике. Кроме того, существовал другой семинар (семинар Петровского – Соболева – Тихонова), но его работа прервалась после отъезда Соболева в Новосибирск.

Перед войной Петровский построил дачу недалеко от Сергиева Посада. Многие из его работ написаны именно там во время отпуска, так как

в течение учебного года ректору трудно было заниматься собственными исследованиями.

По словам О.А. Олейник, в последние годы жизни Петровский интересовался проблемой циклов для обыкновенных дифференциальных уравнений с рациональной правой частью. Он сформулировал несколько интересных идей, но реализовать их не успел [52].

С 1962 по 1973 г. Иван Георгиевич был депутатом, а с 1966 по 1973 г. членом Президиума Верховного Совета СССР. Он многое сделал для восстановления Оптиной пустыни. В частности, при его активном содействии монастырю придан статус государственного музея и решены многие проблемы этого монастыря.

В 1969 г. И.Г. Петровскому было присвоено звание Героя Социалистического Труда. В том же году после инфаркта он вынужден был оставить работу на несколько месяцев. В 1971 г. Петровский отказался от торжественного чествования по случаю своего 70-летия. Юбилей был отмечен выпуском специального номера журнала «Успехи математических наук», посвященного Ивану Георгиевичу.

Умер Петровский от повторного инфаркта 15 января 1973 г. Похоронен в Москве, на Новодевичьем кладбище.

М.В. Келдыш

Келдыш Мстислав Всеволодович родился 10 февраля 1911 г. в Риге в профессорской семье. Его дед по материнской линии – полный генерал от артиллерии А.Н. Скворцов, а дед по линии отца закончил духовную семинарию, затем занимался медициной и тоже дослужился до генерала. Отец Мстислава Всеволодовича – Всеволод Михайлович Келдыш – профессор, генерал-майор инженерно-технической службы, один из основоположников методологии расчета железобетонных конструкций.

У Мстислава Всеволодовича было три брата и три сестры. Он – младший из братьев. После окончания школы в 1927 г. из-за молодого возраста его не приняли в Строительный институт, тогда Мстислав поступил на математическое отделение Московского университета. В 1931 г. Келдыш окончил университет и по рекомендации Лаврентьева был направлен на работу в Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ). Уже в 1933 г. первыми работами по применению математических методов для решения задач гидро- и аэродинамики Мстислав Всеволодович обратил на себя внимание научного руководителя ЦАГИ С.А. Чаплыгина.

В 1934 г. Келдыш поступил в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Без защиты диссертации ему в 1935 г. была присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук. В том же году Московское математическое общество учредило премии для молодых математиков. Первые премии были присуждены И.М. Гельфанду,

М.В. Келдышу и П.К. Рашевскому. В 1936 г. также без защиты диссертации Келдыш стал кандидатом технических наук и получил звание профессора по специальности «аэродинамика».

В 1930-е годы для авиации была весьма актуальна проблема флаттера – сочетания изгибных и крутильных колебаний элементов конструкции самолета, на определенной скорости приводивших даже к его разрушению. С явлением флаттера столкнулись авиастроители всех передовых стран, но раньше других и в наиболее полном объеме разновидностей, во всем диапазоне скоростей полета флаттер был преодолен в СССР благодаря работам М.В. Келдыша и его коллег. За эти работы Мстиславу Всеволодовичу присуждена Сталинская премия, а спустя год он был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Во время войны Келдыш, как руководитель отдела ЦАГИ, курировал изготовление противофлаттерных конструкций на авиационных заводах.

В 1938 г. в Математическом институте им. В.А. Стеклова Мстислав Всеволодович защитил докторскую диссертацию на тему «О представлении рядами полиномов функций комплексного переменного и гармонических функций». Эта работа завершила целый этап творческой деятельности Келдыша.

Не все в жизни Мстислава Всеволодовича было благополучно. В период ежовщины арестован и расстрелян его брат Михаил, арестован, но через год отпущен на свободу брат Александр. Не украшало анкету Келдыша и наличие дяди-белогвардейца.

В 1943 г. Келдыш избран членом-корреспондентом АН СССР и, продолжая работать в ЦАГИ, с 1944 г. руководит (по совместительству) отделом механики Математического института им. В.А. Стеклова. Еще одна проблема в самолетостроении, решенная Келдышем, возникла в связи с переходом авиации на трехопорную схему шасси с передним колесом. Такой переход был продиктован увеличением взлетно-посадочных скоростей самолетов. При достижении некоторой скорости у передней стойки шасси начинались самовозбуждающиеся колебания, которые приводили к ее поломке. Это явление получило название «шимми». Келдыш решил эту проблему в 1945 г. и в дополнение к теоретическому решению сформулировал практические инженерные рекомендации. В 1946 г. работа была удостоена Сталинской премии. Важные математические результаты, полученные Келдышем в, казалось бы, абстрактных разделах математики, были вызваны необходимостью решения конкретных прикладных задач. Для этого Мстислав Всеволодович, умеющий находить неожиданные аналогии, решал абстрактные математические проблемы. Например, полученные им результаты в детально разработанной теории несамосопряженных операторов были вызваны необходимостью раскрыть причины колебаний конструкций.

В 1946 г. Келдыша избирают действительным членом АН СССР, тогда же назначают начальником Реактивного научно-исследовательского института (НИИ-1), которым он руководил до 1955 г. Келдыш принимал активнейшее участие в создании ракетно-ядерного щита страны. В НИИ-1 он создал и возглавил расчетное бюро, которое вместе с отделом механики Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР стало частью Отделения прикладной математики, организованного Келдышем в 1953 г. в этом институте.

В этом отделении занимались атомной тематикой, в 1966 г. его переименовали в Институт прикладной математики АН СССР.

В послевоенный период главным в деятельности Келдыша становится научно-организационный аспект. Он руководит большими научно-техническими коллективами, является председателем ответственных комиссий, членом Президиума Академии наук СССР, а позже – вице-президентом Академии.

В 1954 г. М.В. Келдыш, С.П. Королёв и М.К. Тихонравов представили Правительству СССР предложение о создании искусственного спутника Земли. В 1955 г. Келдыш был назначен председателем комиссии Академии наук по этой проблеме. После запуска первого искусственного спутника Земли в 1957 г. Келдыш, которого в средствах массовой информации стали называть Теоретиком космонавтики, являлся научным координатором общегосударственных программ по освоению ближнего и дальнего космоса и по пилотируемой космонавтике. Он же руководит созданием методов расчета и их применения для решения на ЭВМ задач атомной тематики. В связи с этим формировался новый самостоятельный раздел математики – вычислительная и прикладная математика. Как автор Келдыш лично участвовал в создании новых вычислительных методов и алгоритмов, развивая численные методы решения задач математической физики. За эти работы в 1956 г. Мстислав Всеволодович получил звание Героя Социалистического Труда (награжден золотой медалью «Серп и молот»). В 1957 г. ему присуждена Ленинская премия, а в 1961 г. после полета в космос Юрия Гагарина Келдыш награжден второй золотой медалью «Серп и молот» и избран президентом Академии наук СССР.

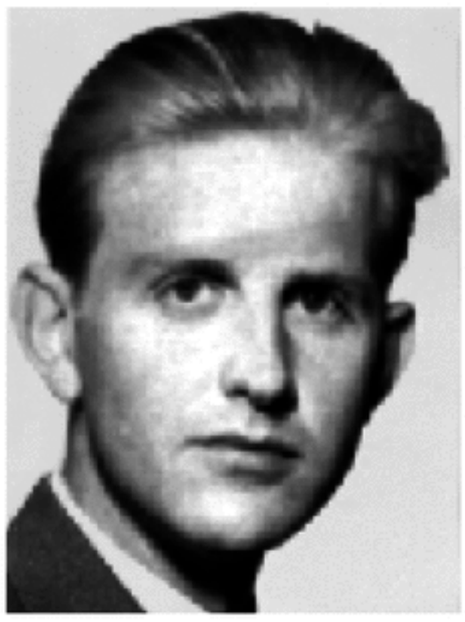
Под его руководством Академия наук стала подлинным штабом и крупнейшим центром фундаментальной науки. Были проведены глубокие преобразования, восстановлены такие научные направления, как генетика и кибернетика, созданы условия для развития новых разделов науки – молекулярной биологии, квантовой электроники и др. Благодаря Мстиславу Всеволодовичу не допущено изгнание из Академии опального А.Д. Сахарова.

В 1971 г. за исключительные заслуги перед государством в развитии науки Келдыш был удостоен еще одной золотой медали «Серп и молот» (стал трижды Героем Социалистического Труда). Когда тяжелая болезнь сделала невозможным продолжение работы в привычном для Келдыша ритме, он в 1975 г. решил оставить пост президента Академии наук СССР. Это случилось накануне празднования 250-летия Академии.

24 июня 1978 г. на 68-м году жизни в закрытом гараже на даче Мстислав Всеволодович отравился угарным газом от работавшего на холостых оборотах двигателя. Урна с прахом Келдыша покоится в Кремлевской стене на Красной площади.

Имя Мстислава Всеволодовича Келдыша увековечено в названиях научно-исследовательского судна, малой планеты Солнечной системы, кратера на Луне, площади в Москве. Его имя носят Исследовательский центр (бывший НИИ-1) и созданный им Институт прикладной математики. Золотая медаль им. М.В. Келдыша, учрежденная Академией наук СССР, вручается за выдающиеся научные работы в области прикладной математики и механики и теоретических исследований по освоению космического пространства.

Ларс Хёрмандер



Шведский математик Хёрмандер Ларс Вальтер родился 24 января 1931 г. в деревне Мьёльбю в графстве Блекинг в Южной Швеции в семье преподавателя. Среднее образование он получил в соседнем городе, до которого добирался поездом, а высшее образование – в Лундском университете, который окончил в 1948 г.

После получения степени магистра Лундского университета в 1950 г. Хёрмандер начал исследования в классической теории функций и гармоническом анализе. В этой области он не достиг значительных результатов, но получил большой опыт исследования дифференциальных уравнений с частными производными. В 1953–1954 гг. он служил в армии, а затем вернулся к работе над диссертацией по теории дифференциальных уравнений с частными производными, которую закончил в 1955 г.

Для совершенствования знаний в области теории дифференциальных уравнений Хёрмандер уехал в США, где в течение двух лет повышал квалификацию в университетах Чикаго, Канзаса, Миннесоты и в Институте математических наук в Нью-Йорке. В 1957 г. он стал профессором Стокгольмского университета, но проработал в этой должности недолго. В Америку для научных исследований и чтения лекций в Станфордском университете он приезжал в 1960 и 1961 гг. Там он написал бóльшую часть книги по дифференциальным уравнениям с частными производными, закончил эту работу в Стокгольме в 1962 г.

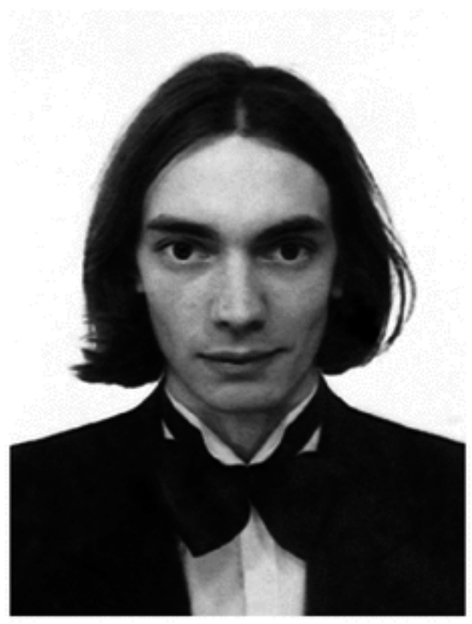
Хёрмандер внес заметный вклад в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Им построена общая теория таких уравнений. Изучение соотношений между гладкостью коэффициентов дифференциального оператора и гладкостью решений было одной из важнейших тем в теории дифференциальных уравнений. Теоремой такого типа является вошедшая во многие учебники теорема Коши – Ковалевской.

Более сложной оказалась задача описания классов дифференциальных операторов, имеющих только аналитические решения. Она составила 20-ю проблему Гильберта. 19-я и 20-я проблемы Гильберта трудами ученых XX в. были объединены. Они легли в основу программы исследований многих математиков. Интересные результаты были получены С.Н. Бернштейном, Р. Курантом, А. Лебегом, И.Г. Петровским и другими. В формулировке Гильберта проблема была решена Петровским в 1940-е годы, но развитие идей, связанных с этой темой продолжается. Исследования Хёрмандера, построившего общую теорию линейных операторов, идею которых предложил И.Г. Петровский, были удостоены медали Филдса. Награда была вручена Хёрмандеру в 1962 г. на Международном математическом конгрессе в Стокгольме, в организации которого он принимал непосредственное участие. Дальнейшие работы Хёрмандера связаны с теорией псевдодифференциальных операторов, где ему также принадлежат основополагающие результаты. Его четырехтомная монография по теории дифференциальных операторов дает фундаментальные знания по этому вопросу.

Остаться профессором в Стокгольме Хёрмандеру не удалось. В 1963 г. он получил должность профессора с неполной нагрузкой в США в Станфордском университете, а в конце 1964 г. – должность профессора в Институте перспективных исследований в Принстоне.

В 1967 г. Хёрмандер решил вернуться в Швецию. С 1968 г. он работал профессором в Лундском университете и в течение следующих двух десятилетий не раз бывал во многих университетах США. В 1984–1986 гг. Хёрмандер был директором Института супругов Миттаг-Лёффлер в Стокгольме, но административные обязанности его тяготили, с 1987 по 1990 г. был вице-президентом Международного математического союза. В 1988 г. Хёрмандер получил премию Вольфа. В 1996 г. – вышел на пенсию.

Седрик Виллани



Французский математик Виллани Седрик родился 5 октября 1973 г. в Брив-ла-Гайард. В 1992 г. он поступил в Высшую нормальную школу в Париже. После окончания этой школы в 1996 г. он был оставлен там в должности доцента. Научными исследованиями Виллани занимался в Университете Париж-Дофин. Там он в 1998 г. получил степень доктора под руководством Пьера Луи Лионса, лауреата медали Филдса 1994 г.

В 2000 г. Виллани стал профессором и начал преподавать теорию вероятностей, математическую статистику, теорию информации и теорию дифференциальных уравнений с частными производными в Высшей нормальной школе в Лионе.

Виллани предпочитает решать математические задачи, связанные с конкретными физическими проблемами. По его мнению, математический результат получается гораздо более красивым, если он связан с реальным миром или отражает процессы, происходящие в реальном мире. Как и его руководитель Лионс, Виллани развивал теорию дифференциальных уравнений с частными производными. В частности, его интересовало качественное исследование решений кинетического уравнения Больцмана из неравновесной статистической механики и уравнения затухания Ландау из физики плазмы.

Кинетическое уравнение Больцмана, известное более ста лет, является основным уравнением теории неравновесных процессов. Оно используется для изучения переноса тепла и электрического заряда в жидкостях и газах и позволяет изучать такие свойства, как теплопроводность, электропроводность, вязкость. Исследовать скорость сходимости процессов к равновесию впервые удалось Виллани.

При любой скорости волны в плазме число электронов, опережающих волну и отдающих ей энергию, меньше, чем число электронов, отстающих от волны и отбирающих энергию. В результате волна в плазме затухает даже в отсутствие парных столкновений. Этот эффект обнаружен Л.Д. Ландау в 1946 г. и получил название «затухание Ландау». Теория этого явления была разработана в линейном варианте. Виллани получил значительные результаты для нелинейного затухания Ландау.

Виллани умеет находить связь между разными разделами математики в тех случаях, когда считается, что эта связь отсутствует. Из ученых современников ему близки идеи М.Л. Громова и Г.Я. Перельмана.

Седрик Виллани был приглашенным лектором в университетах Атланты (1999) и Беркли (2004). В январе–июне 2009 г. он читал лекции в Институте перспективных исследований в Принстоне. В июле 2009 г. Виллани был назначен директором Института Анри Пуанкаре при университете Пьера и Мари Кюри. По совместительству он работал в Институте высших исследований в Бюр-сюр-Иветт.

В августе 2010 г. на Международном математическом конгрессе в Хайдарабаде Седрик Виллани получил медаль Филдса за доказательство нелинейного затухания Ландау и доказательство сходимости к равновесию для уравнения Больцмана. В сентябре 2010 г. Виллани стал профессором Лионского университета Клода Бернара.

Виллани любит музыку и считает, что звук любимых мелодий обеспечивает необходимые ритмы работы мозга. Кроме родного языка, он владеет английским и итальянским. Он женат и имеет двоих детей.

Седрик Виллани награжден в 2007 г. – премией Французской академии наук, в 2008 – премией Европейского математического общества, в 2009 г. – премией Анри Пуанкаре Международной ассоциации по математической физике и премией Ферма.

Глава 15

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества.

Р. Бэкон

Теория функций

Теорией функций называют раздел математики, изучающий общие свойства функций, в котором выделяют теорию функций действительного переменного и теорию функций комплексного переменного.

Теорию функций действительного переменного условно делят на:

– метрическую теорию функций, где свойства функций изучают, основываясь на понятия меры множества;

– теорию приближения функций, изучающую вопросы приближенного представления функций при помощи соответствующих аналитических средств;

– дескриптивную теорию функций, в которой основным объектом изучения является операция предельного перехода.

Метрическая теория функций действительного переменного занимается изучением свойств функций, производных, интегралов и функциональных рядов. Ее фундамент составляют введенное Лебегом в начале XX в. понятие меры множества и разработанная им же на основе этого понятия теория интеграла, получившего название интеграла Лебега.

Н.Н. Лузин был создателем и руководителем отечественной школы метрической теории функций, в которой можно выделить два направления. В рамках первого исследуют как общие свойства функций, интегралов, тригонометрических и других ортогональных рядов, так и более конкретные тонкие их свойства, сложные для изучения в рамках классического анализа. Теория тригонометрических рядов является той частью теории функций, при исследовании которой чаще всего формировались новые методы. Первой настольной книгой ученых стала диссертация Н.Н. Лузина, защищенная в 1915 г., «Интеграл и тригонометрический ряд». Дополнениями к ней являются работы Д.Е. Меньшова и Н.К. Бари. Серьезные результаты были получены также А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом, А.Г. Витушкиным и другими.

Второе направление состоит в проникновении методов метрической теории функций в другие разделы математики. Так, например, Н.Н. Лузин, И.И. Привалов, В.В. Голубев, М.А. Лаврентьев, М.В. Келдыш и другие на базе метрической теории функций действительного переменного изучали граничные свойства аналитических функций. На этой же базе А.Я. Хин-

чин создал метрическую теорию чисел, М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник и Н.Н. Боголюбов развивали вариационное исчисление, П.С. Новиков – математическую логику, А.Н. Колмогоров и А.Я. Хинчин – теорию вероятностей.

Теория приближения функций многочленами берет свое начало в трудах П.Л. Чебышёва. Далее она развивалась его учениками Е.И. Золотарёвым, А.Н. Коркиным, А.А. Марковым. В 1930-е годы глубокие исследования в этой области проводили А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев, М.В. Келдыш.

Теория дифференцируемых функций многих переменных возникла в 1930-е годы в математической физике. Первые фундаментальные исследования в этой области принадлежат С.Л. Соболеву.

В дескриптивной теории функций изучаются свойства тех или иных классов функций, полученных в результате предельных переходов. Ее основы, как и основы метрической теории функций, были заложены в исследованиях Э. Бореля, Р. Бэра и А. Лебега. Основополагающие результаты по дескриптивной теории множеств были получены в 20–30-е годы XX в. Н.Н. Лузиным и его учениками.

Теория функций комплексного переменного многим студентам кажется очень абстрактным разделом математики, слишком далеким от решения практических задач. В действительности эта теория является мощным аналитическим аппаратом, позволяющим решать не только трудные задачи различных разделов математики, но и практические задачи народного хозяйства.

Без теории функций комплексного переменного невозможно было бы получить многие результаты в теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории аппроксимации, алгебре, аналитической теории чисел, геометрии, гидро- и аэродинамике, теории упругости, радио- и электротехнике, самолето- и кораблестроении, электронной оптике, теории фильтрации и других областях науки и техники.

«Отец русской авиации» Н.Е. Жуковский, основываясь на работах по теории функций комплексного переменного, разработал теорию подъемной силы крыла, решил многие задачи гидро- и аэродинамики.

Из его последователей наиболее заметный вклад в развитие теории функций комплексного переменного, в решение на ее основе многих проблем механики и задач народно-хозяйственного значения внес М.А. Лаврентьев. Разработав вариационные методы теории конформных отображений, он получил результаты по теории волн и теории струй, ставшие классическими. Совместно с М.В. Келдышем им исследованы вопросы математической теории и разработана теория корабля на подводных крыльях. В области механики сплошной среды Лаврентьев разработал гидродинамическую теорию кумуляции, создал теорию динамической устойчивости стержней. Им получены важнейшие результаты в теории детонации и создана теория направленного взрыва.

М.В. Келдыш, занимавшийся теорией приближений в комплексной области, теорией приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, теорией несамосопряженных операторов и теорией потенциала, применял полученные им математические результаты для решения практических задач. Он разработал теорию подъемной силы крыла самолета с учетом сжимаемости воздуха, теорию флаттера, теорию автоколебаний колес, получил

важные результаты в теории движения подводного крыла и теории волнового сопротивления.

Практически невозможно перечислить всех ученых, развивающих теорию функций комплексного переменного и ее приложений. Важнейшие результаты в нашей стране были получены И.Н. Векуа, В.В. Голубевым, Л.В. Канторовичем, Н.Е. Кочиным, П.Я. Кочиной, Л.И. Седовым, С.Л. Соболевым и многими другими.

Функциональный анализ

Функциональным анализом называют раздел математики, в котором изучают общие свойства функциональных пространств (чаще всего, бесконечномерных), взаимные связи между этими пространствами, функционалы и операторы в них и методы решения уравнений, содержащих операторы. Для функционального анализа характерно сочетание геометрических представлений, почерпнутых из обычного трехмерного пространства, и алгебраических методов исследования.

Создание Кантором абстрактной теории множеств привело к осознанию возможности применения математического анализа к исследованию множеств. Стали рассматривать множество кривых, множество функций и т. п. На рубеже XIX–XX вв. были разработаны новые математические дисциплины, которые обычно включают в функциональный анализ. Это теория интегральных уравнений Фредгольма, созданная Д. Гильбертом и Э. Шмидтом, теория интегральных уравнений с симметричным ядром, гильбертовы пространства, прямые методы вариационного исчисления.

Началом функционального анализа можно считать период с начала XX в. до Первой мировой войны. В нем соединились многие концепции классического анализа, линейной алгебры и геометрии.

Интенсивные работы в развитии функционального анализа вели М. Фреше, Ф. Рисс, С.Н. Бернштейн, С. Банах, Н. Винер, Г. Хан и другие. Первый этап развития функционального анализа завершился в 1932 г. публикацией монографии С. Банаха «Теория линейных операций» и построением Дж. фон Нейманом и М. Стоуном теории абстрактных гильбертовых пространств, самосопряженных и унитарных операторов, действующих в них.

В нашей стране исследования по функциональному анализу начались, в основном, в конце 1920-х годов под влиянием московской топологической школы. Это исследования П.С. Александрова, В.В. Немыцкого, А.Н. Тихонова по принципам неподвижных точек, Л.А. Люстерника, Л.Г. Шнирельмана по топологическим методам вариационного исчисления. В начале 1930-х годов появляются работы по теории линейных нормированных и топологических пространств А.Н. Колмогорова, Г.М. Фихтенгольца, Л.В. Канторовича, Б.З. Вулиха. Во второй половине 30-х годов XX в. увеличивается число новых результатов, и к исследованиям упомянутых выше авторов добавляются работы С.Л. Соболева, И.М. Гельфанда, М.Г. Крейна, Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова и других.

Новые важные результаты в этой области появлялись в военные годы. Например, Л.С. Понтрягин доказал фундаментальную теорему теории само-

сопряженных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, а Л.В. Канторович начал цикл работ по применению функционального анализа в вычислительной математике.

Идеи и методы функционального анализа начинают проникать почти во все разделы математики и теоретической физики. Часто невозможно определить, относится математическое исследование к функциональному анализу или другому разделу математики. Происходит глубокий синтез идей функционального анализа, алгебраической топологии, теории функций многих комплексных переменных и современной алгебры.

Основным понятием функционального анализа является понятие оператора, т. е. способа построения одной функции из другой. Операторы, встречающиеся в различных задачах, имеют почти всегда определенное аналитическое задание в виде алгебраического, дифференциального или интегрального выражения, суммы ряда или другой предельной операции. Оператор, который переводит функцию в число, называют функционалом.

При изучении операторов и операторных уравнений на множествах функций возникает потребность в предельных переходах в этом множестве, что приводит к необходимости введения топологии. Если в линейном пространстве введена топология, в которой алгебраические операции непрерывны, то оно называется линейным топологическим пространством. Топологию можно ввести путем задания метрики – расстояния между двумя функциями. Пространство в этом случае называется метрическим.

Развитие вариационных методов теории уравнений с частными производными привело к необходимости изучения функционалов типа норм на классах дифференцируемых функций нескольких переменных.

Появление в 1950-х годах работ французских математиков, в частности книга Лорана Шварца по теории распределений (теории обобщенных функций), повсеместно вызвало новый интерес к исследованиям линейных топологических пространств.

Введение этих пространств в рассмотрение позволило начать в 1950-е годы построение общей теории уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

Обилие функциональных пространств, применяемых в современном анализе, приводит к необходимости изучения структуры самого множества этих пространств или его частей.

И.М. Гельфанд в 1939–1941 гг. создал новое направление в функциональном анализе – общую теорию коммутативных нормированных колец (банаховых алгебр). В этой теории гармонично сочетаются идеи современной алгебры и общей теории банаховых пространств. Она позволила исследовать многие вопросы классического анализа.

В 1956 г. вышла монография М.А. Наймарка «Нормированные кольца», а в 1960 г. – монография И.М. Гельфанда, Д.А. Райкова и Г.Е. Шилова «Коммутативные нормированные кольца».

Теория коммутативных банаховых алгебр Гельфанда по-новому осветила классический гармонический анализ и дала аппарат для построения гармонического анализа на произвольных коммутативных локально компактных группах.

Источником теории представлений, по крайней мере, той ее части, которая принадлежит функциональному анализу, является классическая теория рядов Фурье.

Созданная Гельфандом, Наймарком и их учениками теория представлений классических групп вместе с работами Дж. фон Неймана по кольцам операторов открывает новый этап в теории представлений. Связь специальных функций с теорией представлений групп впервые была обнаружена в 1920-х годах Э. Картаном.

Возникновение теории операторов, в первую очередь, связано с теорией интегральных уравнений, разработка которых начата в работах В. Вольтерры, И. Фредгольма, А. Пуанкаре, Д. Гильберта, Э. Шмидта. Большинство результатов теории интегральных уравнений можно рассматривать как иллюстрации абстрактной теории операторов, хотя теория специальных классов интегральных уравнений имеет собственный интерес. Поэтому трудно провести границу между теорией абстрактных операторных уравнений и теорией интегральных уравнений.

Важное значение в теории нелинейных интегральных уравнений приобрели методы нелинейного функционального анализа.

Методы функционального анализа широко применяются во всех разделах механики. Спектральная теория и общая теория вполне непрерывных операторов, теория линейных и нелинейных интегральных уравнений, вариационные методы – это далеко не полный перечень разделов функционального анализа, без которых трудно себе представить теорию колебаний, гидродинамику, теорию пластин и оболочек и другие области механики. Функциональный анализ все в большей мере становится языком теоретической механики. Значительная часть работ настолько тесно связана с функциональным анализом, что их можно отнести и к этому разделу математики.

Возникавшие в различных областях механики задачи привели к развитию основных понятий функционального анализа, а созданные для решения этих конкретных задач методы стали важными его разделами. С задач о фигурах равновесия вращающейся жидкости и теории волн на поверхности тяжелой жидкости начинаются теория нелинейных интегральных уравнений и теория ветвления решений операторных уравнений.

Работы Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова по теории динамических систем послужили отправным пунктом в создании ряда общих методов нелинейного функционального анализа.

Исследования Б.Г. Галёркина, И.Г. Бубнова, Г.И. Петрова, Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова, М.В. Келдыша по приближенным методам решения уравнений, описывающих различные механические явления, обусловили создание важной области функционального анализа – теории проекционных методов приближенного решения операторных уравнений.

Поскольку увлечение функциональным анализом в определенный период научной деятельности испытали почти все выдающиеся математики XX в., затем более значимо проявившие себя в иных разделах науки, статьи о них включены в другие главы.

В середине XX в. казалось, что функциональный анализ является центром всей математики: бурно развивались теория обобщенных функций, общая теория топологических векторных пространств, выпуклый анализ. Однако в последующие десятилетия все это отошло на второй план [76].

Гёста Миттаг-Лёффлер

Шведский математик Миттаг-Лёффлер Магнус Гёста родился 16 марта 1846 г. в Стокгольме в семье доктора философии. Один из двух его братьев был профессором филологии, а сестра – известной писательницей.

Математические способности Гёсты проявились очень рано. В стокгольмской гимназии он был освобожден от уроков математики и изучал ее самостоятельно по работам классиков, в частности Коши.

В 1865 г. Миттаг-Лёффлер поступил в университет города Упсала. Первые его публикации относятся к студенческим годам. В 1972 г. издательство Упсальского университета выпустило книгу Миттаг-Лёффлера «Об отделении корней синектической функции одного переменного», ставшую диссертацией, которая была защищена в том же году.

В 1873 г. Миттаг-Лёффлер получил Византийскую премию и возможность поехать за границу на три года с целью повышения образования. В Париже он прослушал лекции Эрмита, который посоветовал ему ехать в Берлин к Вейерштрассу, считая его лучшим из математиков того времени. С осени 1874 г. в течение года Миттаг-Лёффлер слушал в Берлине лекции Вейерштрасса и Кронекера. Там он познакомился с Софьей Ковалевской, написал книгу «О методе изучения аналитических свойств эллиптических функций», содержащую переработку лекций Вейерштрасса с включением результатов Якоби, Эрмита, Лиувилля и других математиков. В 1876 г. были опубликованы результаты его самостоятельных исследований, высоко оцененные Вейерштрассом и Эрмитом.

Стать профессором в Берлине Миттаг-Лёффлеру не удалось, и он прошел по конкурсу в университет Гельсингфорса (Хельсинки), где лекции читали на шведском языке, хотя Финляндия входила тогда в состав России. Преподавательская деятельность Миттаг-Лёффлера была в Гельсингфорсе успешной, но в 1881 г. он переехал в Стокгольм. Высшая школа Стокгольма, функционирующая с 1879 г., университетом стала только в 1909 г. В 1881 г. Миттаг-Лёффлер основал и до выхода в отставку в 1911 г. возглавлял кафедру математики. В 1884 г. он пригласил на кафедру в качестве профессора Софью Ковалевскую.

Миттаг-Лёффлер является автором одной из основных теорем теории аналитических функций, теоремы о мероморфных функциях (однозначных аналитических функциях, имеющих в конечной области особыми точками только полюсы).

В 1881 г. Софус Ли предложил Миттаг-Лёффлеру создать и возглавить математический журнал, печатающий статьи на шведском и немецком языках. Через посредничество короля Оскара II было получено согласие ведущих

немецких математиков на выход конкурирующего журнала. Первый номер «Акта математика» вышел в 1883 г. Редакция журнала состояла из математиков скандинавских стран: Швеции, Норвегии, Дании и Финляндии. Издание журнала, получившего широкую известность благодаря высокому уровню публикуемых материалов, стало главным делом жизни Миттаг-Лёффлера, возглавлявшего журнал в течение 45 лет. Он организовал премию Оскара II за лучшие статьи, опубликованные в журнале. Первыми лауреатами этой премии были французы А. Пуанкаре (за задачу трех тел) и П. Аппель (за исследование в области дифференциальных уравнений).

Важные исследования по теории аналитических функций проведены Миттаг-Лёффлером в конце XIX – начале XX в. В 1900–1920 гг. в журнале «Акта математика» опубликованы шесть его статей, объединенных общим названием «Об аналитическом представлении однозначной ветви моногенной функции». В теории аналитических функций имеются теоремы, носящие имя Миттаг-Лёффлера, относящиеся к основам анализа. Его исследования по теории трансцендентных функций явились основой для работ других авторов.

В 1882 г. Миттаг-Лёффлер женился на дочери генерала Линдфорса Сигне Юлии Эмилии. Они прожили в мире и согласии долгую жизнь, но детьми из-за болезни супруги не обзавелись. В 1916 г., в день 70-летия Гёсты супруги Миттаг-Лёффлер составили завещание, опубликованное в «Акта математика», в котором все имущество после своей смерти они завещали организации «Математический институт супругов Миттаг-Лёффлер». Свой дом они передали Шведской академии наук для здания Математического института. Согласно завещанию, задачей института было сохранение и дальнейшее укрепление чистой математики в скандинавских странах. Институт является научным, а не учебным заведением. В него может приехать математик из любой страны, воспользоваться библиотекой или архивом. Официально институт был открыт в 1919 г. Геста Миттаг-Лёффлер стал его первым директором. В 1980-е годы институт возглавлял Ларс Хёрмандер.

Миттаг-Лёффлер скончался 7 июля 1927 г. в Юрсхольме близ Стокгольма.

Константин Каратеодори

Каратеодори Константин, потомок влиятельной греческой семьи, родился 13 сентября 1873 г. в Берлине. Детство он провел в Брюсселе, где его отец был первым секретарем в турецком посольстве в Бельгии. Во время учебы в школе Константин дважды получал награды по математике как лучший ученик Бельгии. Он хотел стать военным инженером и с 1891 по 1895 г. учился в Бельгийской военной академии. После окончания Академии его послали в Египет для работы в британской колониальной службе. Там до апреля 1900 г. он строил первую Асуанскую плотину. Когда строительные работы прерывались из-за наводнений, Константин самостоятельно изучал математику. Им произведены обмеры пирамиды Хеопса, результаты которых опубликованы

в 1901 г. В том же году была издана книга Каратеодори об истории и географии Египта.

Каратеодори в совершенстве владел немецким, греческим и французским языками, прекрасно говорил и писал на английском, итальянском, турецком и нескольких древних языках. Его ждала успешная карьера инженера и многообещающее будущее, но в 1900 г. он решил всерьез заняться математикой.

Студент Каратеодори учился в Берлинском университете у Фробениуса и Шварца, а весной 1902 г. приехал в Гёттинген, чтобы учиться у Клейна, Гильберта и Минковского. В 1904 г. он получил ученую степень доктора за диссертацию по вариационному исчислению и остался в Гёттингене для прохождения хабилитации, после которой с 1905 по 1908 г. читал в Гёттингене лекции в должности приват-доцента. После смерти отца в 1908 г. Каратеодори переехал в Бонн. В Боннском университете он работал приват-доцентом в течение года, затем перевелся в Ганновер на должность профессора математики технического университета Ганновера.

В 1909 г. он женился на своей двоюродной тете, которая была моложе его на 11 лет. В их семье было традицией вступать в брак с близкими родственниками.

Однако Каратеодори занимался не только математическими исследованиями, но и их приложениями в физике. В 1909 г. он дал логически четкое аксиоматическое построение основ термодинамики.

С 1 октября 1910 г. Каратеодори работал профессором математики в техническом университете в Бреслау, а с 1 апреля 1913 г. – профессором Гёттингенского университета. Он вернулся в Гёттинген, чтобы поддержать Клейна, испытавшего в 1911 г. проблемы со здоровьем.

Основные труды Каратеодори этого периода относятся к комплексному анализу. Он занимался теорией конформных отображений – непрерывных отображений, сохраняющих форму бесконечно малых фигур. Первые конформные отображения появились в картографии. Эйлер в 1777 г. применил к задачам картографии функции комплексного переменного, а Гаусс в 1825 г. создал теорию конформных отображений двумерных поверхностей друг на друга. В 1851 г. Риман сформулировал и доказал методами физики основную теорему теории конформных отображений плоских односвязных областей. Результаты, полученные Риманом, обосновали и доказали новыми способами Гильберт, Пуанкаре. В 1912 г. Каратеодори в теореме о конформных отображениях развил и усилил результаты Римана, Гильберта и Пуанкаре.

После пяти лет работы в Гёттингене Каратеодори в 1918 г. перешел в Берлинский университет на должность умершего Фробениуса, где работал в течение года. По просьбе греческого правительства в 1919 г. он разработал план нового университета в Греции. 31 декабря 1919 г. был расторгнут контракт с Берлинским университетом и Каратеодори переехал в Грецию. По приглашению премьер-министра он начал создавать университет в Смирне. В 1922 г. во время войны с Турцией греческое население было изгнано из города, университет так и не начал свою работу, но ныне существующий

Эгейский университет считается основанным по проекту Каратеодори. Он сумел сохранить и перевез в Афины университетскую библиотеку и до 1924 г. преподавал математику в Афинском университете.

С 1924 по 1939 г. Каратеодори был профессором Мюнхенского университета. Работы Каратеодори того времени посвящены общей теории меры множеств и построению теории экстремалей в вариационном исчислении. Он занимался также геометрической оптикой и общей теорией относительности. Из переписки Каратеодори с Эйнштейном, продолжавшейся с 1916 по 1930 г., можно сделать вывод, что исследования Каратеодори оказали заметное влияние на формирование взглядов Эйнштейна.

В 1939 г. Каратеодори уехал в Грецию, где стал ректором Афинского университета.

Умер Константин Каратеодори в Мюнхене 2 февраля 1950 г.

Харальд Бор

Датский математик Бор Харальд Август родился 22 апреля 1887 г. в Копенгагене. Его отец Кристиан Бор – профессор физиологии в Копенгагенском университете, мать Эллен Адлер – из богатой еврейской семьи, связанной с банковским делом и политикой. Харальд – младший брат знаменитого физика Нильса Бора, лауреата Нобелевской премии по физике 1922 г. Почти всю жизнь Х. Бор прожил в Дании, за исключением 1943–1945 гг., когда он скрывался от нацистов в Швеции.

В 1904 г. Харальд поступил в Копенгагенский университет. Большую известность ему принесли не ранние научные успехи, а игра в футбол, которой он увлекался с 1903 г. В сезоне 1905 г. Харальд играл вместе с братом Нильсом. Нильс стоял на воротах. Харальд был членом сборной команды Дании, завоевавшей в 1908 г. серебряную медаль на Олимпийских играх в Лондоне. В 1909 г. Бор окончил университет, а через год получил степень доктора. Некоторое время он слушал лекции в Гёттингене, где познакомился с немецким математиком Эдмундом Ландау, с которым позже работал. Бор занимался исследованиями в области теории чисел. Он активно взаимодействовал с Харди и Литлвудом. В 1913–1914 гг. он работал в Оксфорде и Кембридже, затем несколько месяцев сотрудничал с Лебегом в Париже.

Большая часть ранних работ Бора посвящена теории рядов Дирихле. Его основные научные труды относятся к теории функций и теории чисел. В 1914 г. совместно с Э. Ландау Харальд Бор сформулировал теорему о распределении нулей дзета-функции Римана. В 1915 г. Бор был назначен профессором Высшей технической школы в Копенгагене, а с 1930 г. – профессором Копенгагенского университета, в котором он проработал 21 год. На основе исследования дзета-функции в 1924–1926 гг. им были опубликованы труды по теории почти периодических функций, превратившейся в самостоятельную математическую дисциплину. Эта теория имеет многочисленные приложения в математическом анализе, небесной механике и физике.

В теории функций комплексного переменного и функциональном анализе именем Бора названы почти периодические функции, неравенство, преобразование. Написанный Бором учебник оказал значительное влияние на преподавание математики в Дании.

Всю жизнь Бор продолжал активно трудиться. Он возглавлял Комитет по присуждению премии и медали Филдса на Международном конгрессе математиков в 1950 г. в Гарварде.

Скончался Харальд Бор в Копенгагене 22 января 1951 г.

Стефан Банах

Банах Стефан (Степан) родился 30 марта 1892 г. в Кракове. Его настоящая фамилия – Гречек. Он ничего не знал о своей матери. Когда Стефану было несколько дней от роду, она отдала сына на воспитание бабушке, матери отца, позже его воспитывали опекуны. Отец обещал матери Стефана, что не будет ничего рассказывать о ней сыну, и сдержал слово.

Стефан сначала окончил народную школу, а затем гимназию в Кракове. Материальная помощь со стороны отца после окончания гимназии прекратилась, и на обучение во Львовском политехническом институте Стефан должен был зарабатывать самостоятельно. Перед Первой мировой войной в 1914 г. он сдал экзамены на «полудиплом», т. е. за два первых курса. На этом его официальное образование закончилось. Он вернулся в Краков и стал зарабатывать на жизнь репетиторством.

В 1916 г. Банах познакомился с известным математиком Штейнгаузом, который случайно услышал разговор Банаха с другом об интеграле Лебега. Штейнгауз рассказал Банаху о задаче, которую пытался решить сам. Через несколько дней, к удивлению Штейнгауза, Банах принес ее решение. Это была их первая совместная публикация. В 1920 г. по рекомендации Штейнгауза Банах стал работать ассистентом профессора Львовского политехнического института и написал диссертацию по функциональному анализу, после защиты которой получил степень доктора философии. Хотя Банах не имел законченного высшего образования, за талант и особую ценность научных работ ему присвоили звание профессора, и с 1922 г. он стал преподавать во Львовском университете. Его научный семинар по функциональному анализу был самым многочисленным в университете. Им написаны учебники по математическому анализу и механике. В 1920-е годы он читал лекции по дифференциальному и интегральному исчислениям.

В 1924 г. его избирают членом-корреспондентом Польской академии наук. Позже он становится членом-корреспондентом Академии наук Украины.

Благодаря работам Банаха функциональный анализ стал важным разделом математики. Полученные Банахом результаты входят во все учебники по функциональному анализу. Его работы публиковались в научном журнале львовской математической школы «Студия математики».

Штейнгауз рассказывал, что на заседаниях математического общества часто не успевали обсудить все проблемы. Математики заходили в кафе, и там, на мраморных столиках, продолжали писать математические формулы. Однажды они просидели в кафе 17 часов, наблюдая, как Банах доказывает теорему. Цель была достигнута, но само доказательство не было записано на бумаге, и его никто не может воспроизвести, потому что официанты вытирали столы. Такая судьба постигла и многие другие доказанные Банахом теоремы. Ему просто не хватало времени записывать и редактировать свои теоремы: он получал все новые и новые результаты. Решение одних проблем приводило к возникновению следующих. Банах не делал записей своих научных открытий, он только устно сообщал о них членам математического общества.

Ситуацию попыталась спасти жена Банаха. Она купила записную книгу, которую потом стали называть «Шкотской (шотландской) книгой». В этой книге на нечетных страницах записывали условия возникающих задач, а четные страницы оставляли для будущих ответов. За решение задачи, зачастую весьма сложной, полагался приз (например, пять малых кружек пива). За самую сложную задачу призом был живой гусь. Первая запись в книге была сделана 17 июля 1935 г., а последняя – 31 марта 1941 г. Всего в книге зафиксировано 193 математические проблемы. Закопав в землю, эту книгу сумели сохранить и во время войны. Уже после войны копию книги Штейнгауз переслал в США одному из ее авторов, друзей Банаха. Книгу перевели на английский язык, размножили и роздали участникам очередного Международного конгресса математиков.

Роль «Шкотской книги» в развитии функционального анализа неоценима. Часть сложных задач была решена сразу, некоторые не решены до сих пор. Задача под номером 153, датируемая 6 ноября 1936 г., за решение которой был обещан гусь, была решена в 1972 г. шведским математиком Пэром Энфло, который получил в Варшаве обещанную награду.

После войны оригинал книги Банаха перешел к его жене, а затем он стал собственностью Института математики Польской академии наук и хранится в Центре Банаха.

В 1939 г. Стефан Банах был избран председателем Польского математического общества. Он стал первым деканом физико-математического факультета Львовского университета. Во время оккупации Банаха включили в список сотрудников Биологического института, где с целью выработки противотифозной сыворотки его использовали для выкармливания вшей на теле. Это спасло ученого от смерти. Стефан Банах умер 31 августа 1945 г. от рака легких.

Основными публикациями Банаха принято считать «Интегральное и дифференциальное исчисление» и «Теорию линейных операций». Имеются его работы по теории дифференциальных уравнений.

Математики высоко ценят достижения Банаха. В специальной литературе встречаются понятия: банахово пространство, функционал Банаха – Мазура, теорема Банаха – Штейнгауза, банахов модуль, банахова алгебра, банахова решетка.

Д.Е. Меньшов

Меньшов Дмитрий Евгеньевич родился 6 апреля 1892 г. в Москве в семье врача.

После окончания гимназического отделения при Лазаревском институте восточных языков в 1911 г. поступил в Инженерное училище. Там он проучился всего полгода и стал самостоятельно изучать университетский курс математики. В это время он зарабатывал частными уроками. Когда в 1912 г. Дмитрий поступил на физико-математический факультет Московского университета, то программа первого и частично второго курса им уже была освоена, поэтому он изучал дополнительные учебники. В четвертом семестре Меньшов посещал семинар Егорова, на котором изучали метрическую теорию функций и интеграл Лебега. На третьем курсе, осенью 1914 г., он стал одним из первых студентов, кто был допущен посещать семинар Лузина по теории функций.

Первый научный результат Меньшова был получен в 1916 г., в год окончания Московского университета. Меньшов установил, что интеграл Данжуа шире интеграла Бореля. Второй результат гораздо значительнее: он построил пример тригонометрического ряда

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

сумма которого всюду, за исключением множества меры нуль, равна нулю, несмотря на то, что коэффициенты a_k и b_k ($k = 1, 2, 3\ldots$) не все равны нулю. Данный результат явился полной неожиданностью для всех математиков, работавших в области теории функций. Он был источником большого числа позднейших работ как советских, так и иностранных ученых. Благодаря построению такого тригонометрического ряда направление исследований по проблеме единственности тригонометрических рядов стало совершенно иным. Статья Меньшова, содержащая этот результат, была переведена Лузиным на французский язык и напечатана во французском математическом журнале в январе 1917 г.

После окончания обучения Меньшов был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. С конца 1918 г. работал в Иваново-Вознесенском политехническом институте, а в 1919–1920 гг. – в Нижегородском университете. Там Меньшов занимался теоретико-множественной топологией, но серьезных результатов не достиг. По совету Лузина в 1920 г. он переехал в Иваново, где работал А.Я. Хинчин. Они организовали семинар, на котором, кроме собственных научных исследований, занимались изучением «Оснований геометрии» Гильберта. Многие теоремы в этой книге не имели доказательств из-за сжатого повествования. Хинчин и Меньшов самостоятельно восстанавливали доказательства и проводили исследования в интересующих их разделах математики. Этот тандем принес свои плоды: у Меньшова появилась важная работа по теории ортогональных рядов, а у Хинчина – работы по теории функций и теории чисел.

В Москве в это время у Лузина появились новые ученики: П.С. Урысон, М.А. Лаврентьев, Н.К. Бари, Л.А. Люстерник и другие. Группу учеников и единомышленников под руководством Лузина стали называть «Лузитанией».

Осенью 1922 г. Меньшов переехал в Москву. Он работал доцентом в Московском университете и Лесотехническом институте и читал почти все математические курсы. В январе 1923 г. был организован Математический институт Московского университета, в котором Меньшов стал старшим научным сотрудником. Там он работал до перехода в Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР в 1934 г. В этом же году он получил звание профессора, а в 1935 г. – ученую степень доктора физико-математических наук. Основная математическая специализация Д.Е. Меньшова – теория функций действительного переменного и частично – теория функций комплексного переменного.

Меньшов занимался исследованиями в области теории метрических функций в направлении развития идей, заложенных в диссертации Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд». Ему принадлежат замечательные результаты по проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд.

Им получены основополагающие результаты по вопросу сходимости ортогональных рядов. Он доказал, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \log^2 n < \infty,$$

то для всякой ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$ $(x \in [0,1])$ сходится почти всюду на этом отрезке.

Кроме того, и это является более принципиальным и важным, Меньшов показал, что приведенное выше утверждение теряет силу, если в неравенстве заменить множитель $\log^2 n$ на любую более медленно растущую функцию.

Меньшов – один из первых учеников Лузина – оставался ему предан всегда. Он не только продолжал исследования по той же тематике, но и не покидал своего учителя тогда, когда все другие ученики, кроме Н.К. Бари, отвернулись от Лузина.

Вместе с Н.К. Бари, а впоследствии с П.Л. Ульяновым, он руководил в Московском университете семинаром по теории функций действительного переменного.

Меньшов был энергичным, высоким человеком, с нестандартной фигурой и громким голосом, до преклонного возраста играл в теннис. Будучи сильным физически, Дмитрий Евгеньевич переплывал Оку в Тарусе даже пожилым.

Многие отмечали исключительную порядочность Меньшова. Он ничего для себя не требовал, а требовал только от себя – и в науке, и в жизни. С 1922 г. Меньшов жил в одной комнате коммунальной квартиры на четвертом этаже без лифта. И.Г. Петровский (тогда ректор МГУ) уговаривал его переехать в более благоустроенную квартиру, но тот не захотел нарушать привычный уклад жизни и отказался.

Меньшов любил приключенческую литературу на английском языке, фантастику и не любил поэзию. Нередко он участвовал в мероприятиях Математического института им. В.А. Стеклова. В этом дружном коллективе по праздникам разыгрывались целые сатирические пьесы, автором которых был Д.Ю. Панов. Меньшов часто играл в этих пьесах различные шутливые роли (серого волка, хулигана и Клеопатры, облаченной в покрывало). В пьесе «Доктор Фауст» Меньшов играл роль кандидата наук, который на защите своей докторской диссертации говорит всякие глупости, а в пьесе «Королева Кристина» о Декарте – бандита, который посылал Кристину (ее роль исполняла П.Я. Кочина) за пивом [47].

В 1951 г. Меньшову присуждена Государственная премия, а в 1953 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР.

Умер Дмитрий Евгеньевич 25 ноября 1988 г. в Москве.

М.Я. Суслин

Суслин Михаил Яковлевич родился 3 ноября 1894 г. в селе Красавка Балашовского уезда Саратовской губернии. Он был единственным ребенком в бедной крестьянской семье Якова Гавриловича и Матрены Васильевны Суслиных.

После окончания начального Красавского 2-го училища он поступил в Балашовское частное мужское заведение 1-го разряда, вскоре переименованное в гимназию. Обучение было платным, поэтому Михаил давал уроки детям богатых родителей, чтобы самому оплачивать учебу. Гимназию он окончил с золотой медалью. В 1913 г. Суслин поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета.

Изучив на семинаре Егорова в 1913/14 учебном году курс по метрическим множествам и интегралу Лебега, с осени 1914 г. Суслин стал заниматься в семинаре вернувшегося из Франции Н.Н. Лузина. Вместе с П.С. Александровым он интересовался дескриптивной теорией множеств. Введенная Александровым в октябре 1915 г. операция по построению борелевских множеств, по инициативе Суслина, была названа в честь Александрова A-операцией. Лузин предложил Александрову и Суслину решить обратную задачу, т. е. выяснить, всякое ли множество, полученное путем применения A-операции из замкнутого множества, является борелевским? По мнению Лузина ответ на этот вопрос являлся центральной проблемой всей дескриптивной теории множеств. Александров эту задачу решить не смог.

В это время, по рекомендации Лузина, Суслин также изучал мемуар Лебега об аналитически представимых функциях, опубликованный в 1905 г. во французском издании «Journal des Mathematiques». В этом мемуаре была сформулирована без доказательства лемма, которую Лебег считал очевидной. Суслин засомневался в правильности леммы и решил построить контрпример, т. е. доказать, что лемма неверна. Ему это удалось. В присутствии Серпиньского Суслин продемонстрировал свой первый научный результат

Лузину. Лузин очень серьезно отнесся к сообщению Суслина и подтвердил, что тот нашел ошибку у Лебега. Суслин стал исследовать истинность теорем, в доказательстве которых Лебег использовал эту лемму. Он доказал без применения этой леммы все теоремы, за исключением одной, согласно которой проекция плоского борелевского множества на прямую сама непременно является борелевским множеством.

Суслин решил доказать неверность этой теоремы на опровергающем примере. И в этом ему сопутствовал успех. Он построил плоское борелевское множество, проекция которого на прямую не является борелевским множеством. Вскоре выяснилось, что именно А-операция позволяет получать такие множества, ранее неизвестные. Следовательно, А-операция позволяет получать множества, класс которых шире класса борелевских множеств. Эти множества были названы А-множествами или «суслинскими». Суслин также нашел условие, при котором А-множество становится борелевским. Позже это условие стало называться условием Суслина.

О своем открытии студент четвертого курса Суслин доложил на заседании студенческого научного кружка в ноябре 1916 г. По рекомендации Лузина статья объемом в четыре страницы с изложением результатов Суслина без их доказательства была напечатана на французском языке в 164-м томе журнала «Доклады Парижской академии наук» в январе 1917 г. Эта статья является единственной прижизненной публикацией Суслина. Посылая его работу в Париж, Лузин письменно известил Лебега об ошибке в мемуаре 1905 г. Лебег ответил, что лишь теперь узнал о допущенной им некогда глупой ошибке и сейчас этим вопросом больше не занимается [37].

Открытый Суслиным новый класс множеств стал на много лет важнейшим объектом исследований в дескриптивной теории множеств. Открытие вывело московскую школу теории множеств и функций на ведущие позиции в мире, предоставило ей новую перспективную тематику для исследований, выделив ее из традиционной тематики французской математической школы, значительно расширило возможности математического анализа как науки. Это открытие Суслина было воспринято и по достоинству оценено его современниками. Теорию А-множеств позже исследовали Лузин, Серпиньский, Хаусдорф и другие математики.

Вполне естественно, что после окончания учебы в 1917 г. М.Я. Суслин был оставлен при Московском университете для подготовки к профессорскому званию (в аспирантуре) под руководством Н.Н. Лузина. Как магистрант (так тогда называли аспирантов) Суслин должен был сдать определенное число экзаменов.

Сила воли и блестящие способности Суслина в полной мере компенсировали недостаток материальных средств и слабое здоровье. По воспоминаниям П.С. Александрова, Суслиным была намечена обширная долгосрочная программа интеллектуального развития. Освоение математики составляло лишь первый пункт этой программы. Следующими пунктами были физика, химия, биология и, наконец, медицина, которой Суслин хотел посвятить всю жизнь. Однако его жизни хватило лишь на то, чтобы стать блестящим математиком, одним из создателей дескриптивной теории множеств.

Суслин продолжал искать новые пути в математике. Он задумался над проблемой, которая еще не стояла перед математиками: «Будет ли всякое упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям, выполняющимся для множества действительных чисел, действительной числовой прямой?» Он предположил, что это будет действительная числовая прямая, но не смог обосновать свое предположение. Эта глубокая проблема о связях между математическими структурами оказалась не под силу и его современникам.

Уже после его смерти в первом номере нового польского математического журнала «Fundamenta Mathematicae» за 1920 г. Серпиньский поместил формулировки нескольких математических проблем. Автором проблемы, опубликованной под третьим номером, был назван Суслин. Над ее решением математики трудились более 40 лет. Еще не найденное множество из гипотезы Суслина было названо континуумом Суслина. Доказано, что существование континуума Суслина равносильно существованию специального упорядоченного множества, названного деревом Суслина. В начале 1960-х годов благодаря работам П. Коэна было показано, что гипотеза Суслина, как и континуум-проблема Кантора, не зависит от остальных гипотез теории множеств. Это значит, что возможна теория множеств, в которой гипотеза Суслина справедлива, и возможна теория множеств, в которой эта гипотеза не выполняется.

Когда из-за трудного материального положения в Москве в 1918 г. Лузин вместе с некоторыми учениками переехал в Иваново-Вознесенск, туда решили пригласить и Суслина. Михаил Яковлевич был болен, но в письме согласился на переезд в Иваново-Вознесенск, если «выкарабкается» из болезни. В начале 1918/19 учебного года Суслин был избран экстраординарным профессором на химическом факультете Иваново-Вознесенского политехнического института [37].

Проработал он один учебный год и с 1 сентября 1919 г. был уволен по собственному желанию. Причиной увольнения был конфликт с Лузиным. Существовало мнение, что Лузин завидовал успехам ученика. Лузин объяснял это тем, что за два года Суслин не успел сдать все положенные экзамены и не защитил диссертацию. Лузин как руководитель не дал согласия на продолжение работы Суслина в Иваново-Вознесенске и не дал ему рекомендации на работу профессором в Саратове, куда Суслин был приглашен. Михаил Яковлевич остался без работы и решил вернуться на малую родину. По пути домой он заболел сыпным тифом и 21 октября 1919 г. скончался. По мнению учеников Лузина, смерть Суслина произвела на учителя очень тяжелое впечатление. На столе Лузина до конца его жизни стояла фотография Суслина с надписью: «Моему горячо любимому учителю, глубокоуважаемому и дорогому Николаю Николаевичу Лузину на добрую память. Михаил Суслин» [54].

Недолго продолжалась научная жизнь Михаила Яковлевича Суслина – всего два года, но за этот короткий срок он успел сделать важные открытия. Его имя до сих пор не сходит со страниц математических журналов, его именем назван широкий класс множеств, его идеи стали увлекательным и важным полем деятельности большого числа математиков [30].

Н.К. Бари

Бари Нина Карловна родилась 6 ноября 1901 г. в Москве в семье врача. Еще в гимназии она увлеклась математикой, которая была ее любимым предметом. В 1918 г. Нина Карловна поступила на физико-математический факультет Московского университета. Это был первый прием студентов в университет после Октябрьской революции. Талант Бари заметил Лузин, и она стала активной участницей его семинаров. Вместе с сокурсником Люстерником ее причисляли к «лузитанцам» второй волны. На третьем курсе Бари получила первые результаты в теории множеств. Университет она окончила за три года в 1921 г.

С 1921 по 1926 г. Бари вела занятия в Московском институте лесного хозяйства (ныне Московский государственный университет леса). В 1923 г. был организован Институт математики и механики при МГУ. Бари стала первой в списке аспирантов, получивших право на обучение с выплатой стипендии в этом институте. В 1925 г. Н.К. Бари блестяще окончила аспирантуру, а в январе следующего года успешно защитила кандидатскую диссертацию на тему «О единственности тригонометрических разложений». Эта работа получила премию Главнауки. С 1926 г. Бари стала преподавателем МГУ. В 1927 г. она избрана членом Французского и Польского математических обществ, получила возможность стажироваться во Франции и уехала в Париж, работать в Сорбонне и Коллеж де Франс. Она активно участвовала в семинаре Адамара, в польском математическом конгрессе во Львове. «Лузитания» к тому времени распалась, и Бари, имевшая грант Рокфеллера, в 1928 г. опять уехала в Париж для продолжения научных исследований.

В Москву Бари вернулась в 1929 г. К этому времени она была известным ученым, имевшим большие заслуги в исследовании тригонометрических рядов и теории множеств. В 1934 г. она получила ученое звание профессора, а в 1935 г. – стала первой женщиной в Советском Союзе, имевшей ученую степень доктора физико-математических наук. Степень была присвоена Бари без защиты диссертации. Несколько позже докторские степени защитили Е.А. Нарышкина (1939), П.Я. Кочина (1940), Л.В. Келдыш (1941).

Бари занималась исследованиями в области теории функций действительного переменного, теории аналитических функций, функционального анализа. Ею доказаны важные теоремы в теории ортогональных рядов. В 1930-е годы Н.К. Бари и Д.Е. Меньшов вели семинар по тригонометрическим рядам. Они оставались до конца преданными Лузину и активно защищали его во время так называемого дела Лузина.

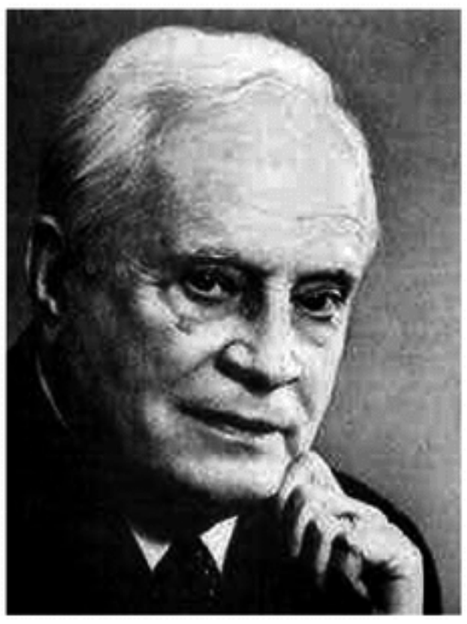
В 1940-е годы Бари и Меньшов руководили всеми исследованиями в области теории функций действительного переменного. После смерти Лузина в 1950 г. его диссертация «Интеграл и тригонометрический ряд» в 1951 г. была переиздана с примыкающими к этой работе добавлениями Бари и Меньшова, в которых учтены результаты исследований по тригонометрическим

рядам до 1950 г. Бари принимала участие в работе III Всесоюзного съезда математиков в 1956 г. и Международного математического конгресса в Эдинбурге в 1958 г. В том же году вышла обзорная статья «Тригонометрические ряды». Последней научной работой Бари является монография, объем которой составляет 936 страниц, «Тригонометрические ряды», опубликованная в 1961 г. Эта монография стала основным пособием для математиков, ведущих исследования в области тригонометрических рядов.

Нина Карловна была остроумной, на людях всегда оживленной, словом, душой компании. Она любила и хорошо знала литературу и искусство, писала стихи. Вместе с мужем, математиком и альпинистом В.В. Немыцким, активно занималась горным туризмом, ходила в походы на Кавказ, Алтай, Памир и Тянь-Шань.

15 июля 1961 г. Нина Карловна Бари трагически погибла, попав под поезд в метро.

Рольф Неванлинна



Финский математик Неванлинна Рольф Герман родился 22 октября 1895 г. в Йоэнсу. В 1913 г. он поступил в Хельсинкский университет. Во время Первой мировой войны он не был призван в армию из-за недостатка веса, продолжал изучать математику. После окончания университета он занимался диссертацией, которую защитил в 1919 г. Ввиду отсутствия вакантных должностей в университете Неванлинна стал работать учителем математики в школе. Преподавать в Хельсинкском университете он стал в 1922 г. и до 1926 г. совмещал основную работу с работой в школе.

Основным научным направлением исследований Неванлинны является теория аналитических функций, в частности теория римановых поверхностей. В 1923 г. Неванлинна рассмотрел класс аналитических функций, представимых в виде отношения двух ограниченных аналитических функций и получил ряд важных результатов. Им доказана теорема о факторизации класса функций ограниченного вида, лежащая в основе теории классов аналитических функций в круге $|z| < 1$.

С конца 1920-х годов центральное место в теории мероморфных функций заняла теория распределения значений, основы которой в 1925 г. заложил Неванлинна. При этом основные классические результаты теории целых функций включались в неванлинновскую теорию как частные случаи.

В 1926 г. Неванлинна получил звание профессора, оставил работу в школе и до 1946 г. работал в Хельсинкском университете, с 1941 по 1944 г. – в должности ректора. В годы Второй мировой войны Неванлинна поддерживал фашистов.

Проблема нахождения условий, необходимых и достаточных для разрешимости интерполяционной задачи в классе аналитических в области римановой поверхности функций, сформулирована Г. Пиком в 1916 г. и Неванлинной в 1929 г. и называется проблемой Неванлинны – Пика.

Важнейшей заслугой Неванлинны является создание общей теории мероморфных функций. Им доказан ряд теорем, две из которых лежат в основе теории распределения значений мероморфных функций.

После Второй мировой войны Неванлинна переехал в Швейцарию и с 1946 г. работал профессором Цюрихского университета. В 1948 г. он избран членом Финской академии наук.

Умер Неванлинна 28 мая 1980 г. в Хельсинки.

На русском языке изданы следующие книги Неванлинны: «Однозначные аналитические функции» (1941), «Униформизация» (1955), «Пространство, время и относительность» (1966).

Через год после его смерти Исполнительным комитетом Международного математического союза была учреждена премия Неванлинны, которая вручается раз в четыре года одному математику за достижения в следующих разделах информатики и вычислительной математики: теория алгоритмов, криптография, теория управления, теория оптимизации, теория распознавания образов, обработка информации и моделирование интеллекта. Статут этой премии и правила отбора кандидатов такие же, как и при присуждении премии и медали Филдса.

Л.А. Люстерник

Люстерник Лазарь Аронович родился 19 декабря 1899 г. в городе Здунская Воля в Смоленской губернии (ныне территория Польши). В 1918 г. окончил Смоленскую общественную гимназию и поступил на физико-математический факультет Московского университета и на геодезический факультет Межевого института. К 1921 г. Люстерник перестал ходить в Межевой институт и сосредоточился на изучении математики. Учился он вместе с Ниной Карловной Бари.

«Лузитанец» с 1921 г. и аспирант Лузина с 1922 по 1926 г., Люстерник вместе со Шнирельманом создал новое направление, характеризующееся внедрением топологических методов в классические области анализа и дифференциальной геометрии, особенно в задачах вариационного исчисления.

В 1926 г. Люстерник пишет работу по применению метода конечных разностей к задачам с уравнениями с частными производными.

В период 1928–1930 гг. он работал профессором Нижегородского университета, а с 1930 г. – профессором Московского университета. Позже он преподавал во многих вузах, в том числе в Биологическом институте им. К.А. Тимирязева в Замоскворечье.

С 1931 г. исследования Люстерника относятся к различным направлениям математики. Основными являются работы в области вариационного исчисления и его приложений. Он руководил семинаром по топологическим методам вариационного исчисления, выполнил также ряд работ по функциональному анализу, вычислительным методам и др.

В 1935 г. опубликована большая монография по вариационному исчислению, написанная в соавторстве с М.А. Лаврентьевым. Публикуются работы Люстерника в области теории дифференциальных уравнений, в области исследования дискретных вычислительных процессов, исследования скорости сходимости и устойчивости уравнений в конечных разностях.

В 1940–1943 гг. Л.А. Люстерник с помощью созданной Колмогоровым и Александером теории верхних гомологий определил основные понятия теории пересечений и понятие длины множества в бесконечномерных пространствах.

В 1946 г. Л.А. Люстерник был награжден Государственной премией и избран членом-корреспондентом АН СССР. В 1947 и 1956 гг. им были предложены способы улучшения сходимости методов последовательных приближений при решении линейных систем дифференциальных уравнений.

В 1951 г. опубликованы «Элементы функционального анализа» Л.А. Люстерника и В.И. Соболева.

В 1957 г. в работе Л.А. Люстерника и М.И. Вишика рассматривались линейные дифференциальные уравнения и развивались методы, применимые также к уравнениям с частными производными. В их же работе 1960 г. рассматривались задачи, связанные с собственными значениями и собственными функциями линейных операторов.

С появлением в СССР первых отечественных ЭВМ в 1950-х годах Люстерник принимал участие в создании начальной методики программирования во внутреннем языке этих машин с учетом ограниченности их памяти.

Л.А. Люстерник занимался вопросами истории математики. Особенно ценны его работы 1920-х годов, посвященные московским математикам. Люстерник был чрезвычайно остроумным человеком, талантливо писал стихотворные пародии. В соавторстве с Н.К. Бари им была опубликована первая книга о Н.Н. Лузине. В 1960 г. во время болезни Люстерник в стихах описывал воспоминания о «Лузитании», отрывки из которых уже цитировались в данной книге.

Умер Л.А. Люстерник 23 июля 1981 г. в Москве.

П.С. Новиков

Новиков Петр Сергеевич родился 28 августа 1901 г. в Москве в купеческой семье. В 1919 г. после окончания гимназии он поступил в Московский университет, но в марте 1920 г. был призван в Красную армию и вернулся в университет только в 1922 г. Он сразу стал одним из ближайших учеников Н.Н. Лузина и активным членом «Лузитании». Новиков дольше других учеников Лузина следовал в своей научной работе его идеям и получил наиболее глубокие результаты в намеченных направлениях в дескриптивной теории множеств. По совету Лузина он взялся за одну из наиболее трудных задач – анализ сходства и отличий явных и неявных борелевских функций.

В 1925 г. Новиков окончил университет и продолжал работать в нем под руководством Лузина. В 1927 г. он полностью решил поставленную перед

ним задачу, создав принцип сравнения индексов, который является эффективным методом исследования проблем дескриптивной теории множеств. Этот принцип стал широко применяться в дальнейшем Лузиным и другими исследователями. Центральной задачей дескриптивной теории множеств являлось изучение открытых Лузиным проективных множеств, получаемых из борелевских повторным применением операций проектирования и перехода к дополнению. Ряд последующих работ П.С. Новикова и его учеников был посвящен различным обобщениям принципа сравнения индексов и приложениям его к изучению строения A-множеств и проективных множеств. Итог его первых исследований в этой области вошел в монографию Лузина 1930 г., обобщающую результаты, полученные самим Лузиным и многими его учениками [1].

В 1929–1934 гг. Новиков работал в Московском химико-технологическом институте, а в 1934 г. перешел на работу в Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1934–1935 гг. при детальном изучении проективных множеств второго класса он показал, что комплекс вопросов, доступных средствам теории множеств, оказался существенным образом шире, чем это предполагал Лузин. Новиков доказал, что во втором классе проективных множеств имеют место законы отделимости, обратные по отношению к законам отделимости в первом проективном классе.

Среди прочих положительных качеств, особенно хотелось бы отметить порядочность П.С. Новикова. Во время травли Лузина в 1936 г., в которой, к сожалению, приняли участие некоторые «лузитанцы», Новиков вел себя достойно и до конца сохранил уважительное, сердечное и искренне благодарное отношение к своему учителю [1].

В 1938 г. опубликована работа Новикова «О единственности обратной задачи потенциала», относящаяся к математической физике. В связи с открытием Курской магнитной аномалии возник вопрос о возможности определения формы рудного пласта с помощью гравитационных измерений. В упомянутой работе Новиков одним из первых решал некорректную задачу и доказал единственность восстановления формы тела по его гравитационному потенциалу. Эта работа имеет важное значение для теоретической геофизики. Методику решения некорректных задач развивал А.Н. Тихонов.

Доктором физико-математических наук Новиков стал в 1935 г., профессором – в 1939 г. Больших успехов он достиг в вопросах математической логики. Основной задачей в области математической логики Новиков считал выяснение роли логических принципов в математике. С полным правом его можно считать основным создателем советской школы в этой области математики. Всего в стране сложились четыре школы математической логики: московские школы Новикова (дескриптивная теория множеств, логика, алгоритмические проблемы алгебры) и А.Н. Колмогорова (логика, теория рекурсивных функций), ленинградская школа А.А. Маркова-мл. – Н.А. Шанина (конструктивное направление), новосибирская школа А.И. Мальцева (теория моделей, проблемы разрешимости).

Большая часть результатов в исследованиях по математической логике получена П.С. Новиковым и его учениками. Он стал автором первого в оте-

чественной литературе учебного пособия по математической логике. Поскольку выяснилось, что методы, разработанные для применения теории алгоритмов к массовым проблемам алгебры, пригодны и для решения чисто алгебраических задач, П.С. Новиков постепенно стал обращаться к исследованиям в теории групп. Совместно с его учеником С.И. Адяном им получено решение известной проблемы Бернсайда о периодических группах. В 1952 г. Новиков решил проблему тождества для групп, сформулированную еще в 1912 г. В том же году он установил существование конечноопределенной группы с неразрешимой проблемой тождества слов. К числу крупных достижений в области логики относится результат Новикова 1953 г. о непротиворечивости некоторых предложений теории множеств. Он дал ответы на многие вопросы, сформулированные Лузиным в 1930 г. Также Новиков занимался проблемой континуума и близкими к ней проблемами мощности и измеримости проективных множеств.

В 1953 г. Новикова избрали членом-корреспондентом Академии наук. В 1957 г. он стал лауреатом Ленинской премии и первым руководителем созданного им отдела математической логики Математического института им. В.А. Стеклова, в котором работал до 1973 г. В 1960 г. Петр Сергеевич был избран действительным членом АН СССР.

Новиков уделял много внимания организации учебной работы в вузах и до 1972 г. читал лекции в Московском городском педагогическом институте.

Умер Петр Сергеевич 9 января 1975 г. в Москве.

Ларс Альфорс

Финский математик Альфорс Ларс Валериан родился 18 апреля 1908 г. в Хельсинки в семье профессора механики технологического института. С 1924 г. до Второй мировой войны жизнь Альфорса связана с Хельсинкским университетом, который он окончил в 1928 г. Там же в 1930 г. защитил диссертацию и получил степень доктора, с 1933 по 1936 г. работал адъюнкт-профессором, а с 1938 г. – заведующим кафедрой математики.

Основным направлением научных интересов Альфорса была теория функций комплексного переменного. За работы по теории конформных и квазиконформных отображений, развивающие теорию римановых поверхностей, в 1936 г. он стал одним из двух первых лауреатов медали и премии Филдса. С тех пор более полувека Ларс Альфорс оставался одним из лидеров в области комплексного анализа.

В годы Второй мировой войны все университеты в Финляндии были закрыты. В 1944 г. Альфорсу предложили работу в Федеральном институте технологии в Цюрихе, и в марте 1945 г. он переехал в Швейцарию. Там Альфорс работал недолго, в 1946 г. уехал в США и до 1977 г. был профессором Гарвардского университета. В Америке вышли его основные книги: «Комплексный анализ» (1953), «Римановы поверхности» (1960), «Конформные

инварианты» (1973). Альфорс занимался условиями приближения аналитических функций. Он ввел понятие аналитической емкости множеств в связи с проблемой Пенлеве об устранимых особенностях аналитических функций. С Пфлюгером Альфорс изучал Q-квазиконформные отображения, определяющиеся как такие отображения, которые изменяют конформный модуль произвольного топологического четырехугольника не более чем в Q раз.

В 1963 г. Альфорс участвовал в работе советско-американского симпозиума по дифференциальным уравнениям с частными производными, состоявшемся в Новосибирске.

В 1981 г. Альфорс получил премию Вольфа. В 1986 г. он был избран почетным президентом конгресса в Беркли. Во время выступления на конгрессе Альфорс вспоминал о первом присуждении медали Филдса. В 1988 г. он был избран иностранным членом АН СССР.

Скончался Альфорс 4 июля 2002 г. в Париже.

С.Л. Соболев

Соболев Сергей Львович родился 6 октября 1908 г. в Петербурге в семье присяжного поверенного. Он рано потерял отца, воспитанием занималась мать, которая преподавала литературу и историю. После окончания медицинского института она работала доцентом 1-го Ленинградского медицинского института.

В годы Гражданской войны Сергей с матерью жили в Харькове, а в 1923 г. переехали в Петроград. В 15 лет, кроме программы средней школы, он знал неплохо философию, медицину, биологию, любил играть в шахматы, писал стихи. Так как в университет принимали только с 16 лет, он поступил в Первую государственную художественную студию по классу фортепиано. В 1925 г., продолжая учиться в студии, Сергей стал студентом физико-математического факультета Ленинградского государственного университета. Художественную студию он окончил успешно, но не пошел получать диплом, так как к тому времени понял, что его призванием является математика. Дипломную работу об аналитических решениях системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными он написал под руководством Н.М. Гюнтера. В 1929 г. защиты дипломных работ были отменены. Защищать свою работу Соболеву не пришлось. В 1930 г. она была опубликована в «Докладах Французской академии наук» [15].

Первая печатная работа студента Соболева «Замечания по поводу работ Н.Н. Салтыкова…» появилась в «Докладах Академии наук СССР» в 1929 г. Он нашел ошибки в доказательстве теоремы, предложенном профессором Салтыковым, и построил примеры, противоречащие утверждениям автора.

После окончания университета Соболев три года работал в теоретическом отделе Сейсмологического института АН СССР. Им опубликовано более 30 работ по исследованию распространения волн в упругих средах, в которых

разработан новый метод решения задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка. Результаты одной из работ были доложены в 1930 г. на I Всесоюзном математическом съезде в Харькове. Присутствовавший на съезде Адамар писал Соболеву: «Я буду очень счастлив, молодой коллега, если Вы будете держать меня в курсе дальнейших Ваших работ, чрезвычайно меня заинтересовавших» [60].

В 1930 г. Соболев получает звание профессора и в 1932 г. переходит в отдел дифференциальных уравнений Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1933 г. его избирают членом-корреспондентом Академии наук СССР, в 1934 г. – присваивают степень доктора физико-математических наук. Соболев переезжает в Москву и с 1935 г. преподает в Московском университете на кафедре дифференциальных уравнений. В 1936–1937 гг. он заведует кафедрой высшей математики Военно-технической академии.

В 1932 г. в соавторстве с В.И. Смирновым Соболев предложил метод решения динамических задач теории упругости с использованием теории функций комплексного переменного, что открыло большие возможности в решении актуальных задач механики.

На II Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде Соболев выступил с тремя докладами. Наиболее значимый из них – «Обобщенные решения волнового уравнения». В его работах 1935–1936 гг. была сформулирована концепция рассмотрения решений дифференциальных уравнений в частных производных как обобщенной функции (функционала). Понятие обобщенного решения дифференциального уравнения рассматривалось и ранее в работах Н.М. Гюнтера и К.О. Фридрихса, но именно в работах С.Л. Соболева оно впервые получило систематическое применение и глубокое развитие. Созданные им новые методы позволили решить ряд давно стоявших проблем математической физики, придать окончательную форму многим ранее полученным результатам, поставить и решить ряд новых задач. Это в короткий срок изменило облик многих разделов математической физики.

Идеи теории обобщенных функций распространились и на другие разделы математики – обыкновенные дифференциальные уравнения, теорию представлений групп, теорию случайных процессов, вариационное исчисление и даже на теорию чисел. Эти идеи широко используются в механике, теоретической физике, в ряде инженерных дисциплин.

Соболев не только ввел в науку понятия обобщенного решения краевой задачи и обобщенной функции как функционала, но и заложил основы теории, построенной на этих понятиях. Сами функционалы естественным образом классифицируются, образуя определенные нормированные пространства. Соболевым было установлено, что различные пространства обобщенных функций связаны между собой внешне простыми, но отнюдь не тривиальными связями. Теоремы, выражающие эти связи, называют теоремами вложения Соболева, а пространства – пространствами Соболева или соболевыми пространствами. В настоящее время современные проблемы теории дифференциальных уравнений с частными производными не излагаются без функциональных пространств, введенных в науку Соболевым [15].

Научные достижения Соболева получили признание. В 1939 г. он становится самым молодым академиком в СССР, гордостью нации. О нем много и восторженно пишут газеты, его избирают депутатом в руководящие органы Москвы и РСФСР. Во время войны на Соболева возложены обязанности директора Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Вскоре поступил приказ эвакуировать институт из Москвы в Казань.

В 1943 г. Математический институт вернули в Москву. Приказом Государственного Комитета Обороны СССР была организована лаборатория № 2, впоследствии переименованная в Институт атомной энергии. Директором лаборатории назначен академик И.В. Курчатов, главным (первым) заместителем директора и председателем ученого совета – академик С.Л. Соболев. С этого момента его фамилия надолго исчезла со страниц газет. В обстановке полной секретности велись интенсивные работы по созданию атомного щита страны. Соболев занимался расчетом сложных систем получения кондиционного ядерного горючего.

Прежде чем сформулировать математическую задачу, требовалось детально разобраться в физических процессах, которые до этого никогда не изучались. Сложнейшие задачи математической физики надо было «довести до числа», а результаты – претворить в жизнь. Соболев придумывал специальные методы счета и контроля результатов. Все это было делом государственной важности. В декабре 1946 г. атомный реактор заработал. Личный вклад академика Соболева был отмечен двумя Государственными премиями, а в 1952 г. – званием Героя Социалистического Труда.

Однажды на работе при попытке открыть дверь, Сергей Львович повредил ногу. В результате шесть недель ему пришлось провести дома. За это время он свел воедино результаты пятнадцатилетней работы, разбросанные по статьям и конспектам лекций. Так в 1950 г. появилась книга «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», переведенная на многие языки и сыгравшая важную роль в «перестройке» теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В 1950-е годы начался новый этап в творчестве Соболева. Он рассказывал: «Работая в Институте атомной энергии, я приобрел вкус к вычислительной математике, осознал ее исключительные возможности. Поэтому с удовольствием принял предложение ректора МГУ И.Г. Петровского возглавить первую в стране кафедру вычислительной математики Московского университета» [60]. Этой кафедрой Соболев руководил в 1952–1959 гг. Разработанный им новый подход состоял в систематическом использовании понятий и теорем функционального анализа. Тому, что функциональный анализ стал языком современной теории численных методов, математика в значительной мере обязана его трудам. Сам Сергей Львович говорил, что теорию вычислений сейчас также невозможно представить без банаховых пространств, как и без ЭВМ.

Несмотря на чрезвычайную занятость в Институте атомной энергии, Соболев читает лекции в Московском и Ленинградском университетах, руководит научной работой аспирантов. Разносторонность его дарований проявлялась в музыке, литературе, поэзии. Глубокие всесторонние познания,

отточенная логика, оптимизм, легкий юмор делали его прекрасным собеседником.

В 1943–1958 гг. С.Л. Соболев совместно с И.Г. Петровским и А.Н. Тихоновым ведет семинар по уравнениям с частными производными. В 1947 г. он издает учебник «Уравнения математической физики» и продолжает заниматься задачами, связанными с распространением волн различной природы. Особенно трудными были задачи о колебаниях во вращающейся жидкости. Математическая модель этого процесса – уравнения с частными производными, не разрешенные относительно старшей производной по времени (сейчас их называют уравнениями Соболева). Эти исследования положили начало новым большим разделам функционального анализа и математической физики. Значительно позже в 1986 г. Сергею Львовичу совместно с учениками и сотрудниками за многолетний цикл работ «Математические исследования по качественной теории вращающейся жидкости» была присуждена Государственная премия СССР.

Следующий этап жизни Соболева связан с Сибирским отделением Академии наук СССР, одним из инициаторов создания которого он был. Назначенный директором Института математики Сергей Львович в 1958 г. переезжает в Новосибирск. Возглавляя этот институт, Соболев заботился о том, чтобы в нем были представлены все важнейшие направления современной математики. Он хотел, чтобы эти направления развивали яркие, талантливые ученые.

Исследованиями в области геометрии руководил академик А.Д. Александров, в области алгебры и математической логики – академик А.И. Мальцев. На должность руководителя отдела вычислительной математики Сергей Львович пригласил молодого математика Г.И. Марчука. В 1964 г. Г.И. Марчук возглавил Вычислительный центр – самостоятельный институт. Спустя несколько лет он стал академиком, а затем и президентом Академии наук СССР.

Отдел математической экономики возглавил известный математик Леонид Витальевич Канторович, приглашенный из Ленинграда. После образования этого отдела экономико-математическими методами стали активно заниматься не только математики, но и экономисты. Были найдены общие принципы и решены конкретные планово-экономические задачи. Заслуги Канторовича были признаны сначала внутри страны: он стал академиком и лауреатом Ленинской премии, а затем во всем мире: в 1975 г. ему была присуждена Нобелевская премия по экономике.

Научная деятельность С.Л. Соболева в период работы в Новосибирске связана с теорией кубатурных формул. Полученные им результаты вошли в монографию «Введение в теорию кубатурных формул» и другие публикации. Его исследования были продолжены большой группой учеников.

Нашла себя в работе энергичная Ариадна Дмитриевна Соболева, жена Сергея Львовича. Мать семерых детей и молодая бабушка большого числа внуков, она с энтузиазмом стала работать патофизиологом. Обучаться медицине Ариадна Дмитриевна начала уже взрослым человеком, когда имела четверых детей. Она очень быстро написала кандидатскую, а затем и докторскую диссертации [47].

В течение четверти века Соболев возглавлял Институт математики. Сбылись его мечты об обмене идеями между математиками и представителями других наук. Математические методы использовались для решения геологических задач, была построена математическая теория взрыва, специалисты научились с помощью ЭВМ предсказывать паводок в речных руслах, велись интенсивные исследования в области математической лингвистики.

Самого Сергея Львовича занимала задача приближенного интегрирования функций – одна из первостепенных задач вычислительной математики. Для одномерного случая она изучалась Эйлером, Гауссом, Чебышёвым, и полученные ими формулы называют квадратурными. Поискам наилучших кубатурных формул для вычисления многомерных интегралов Соболев посвятил более 15 лет.

Но Соболева интересовали не только математические проблемы. В 1951 г. группа ученых предложила организовать высшее учебное заведение нового типа, в котором органически сочетались бы обучение и научная работа. Естественно, Соболев не мог остаться в стороне. Он помогал решать организационные вопросы, составлял и обсуждал программы, читал лекции первым студентам Московского физико-технического института (МФТИ). Соболев был превосходным педагогом. Кроме студентов МФТИ, Ленинградского и Московского университетов, его лекции слушали студенты Ленинградского электротехнического института и Новосибирского университета.

Важную роль сыграл Соболев в становлении исследований по кибернетике. Многие философы называли кибернетику идеалистической лженаукой. Первым официальным выступлением в поддержку кибернетики была статья «Основные черты кибернетики», опубликованная в 1955 г. в журнале «Вопросы философии». Соавторами Соболева были А.И. Китов и А.А. Ляпунов. В «Очерках по истории кибернетики» утверждается: «В СССР кибернетика стала развиваться бурными темпами лишь после того, как выдающиеся математики А.Н. Колмогоров, С.Л. Соболев, А.Я. Хинчин и другие заинтересовались ее проблемами».

В июле 1954 г., когда до «оттепели» было еще далеко, в «Правде» опубликовали статью Соболева «О научной критике, новаторстве и догматизме». Это было выступление против антинаучных попыток оторвать фундаментальные направления математики от их приложений. Много внимания в статье уделено и биологии. Соболев выступил против использования в науке терминов «вейсманистский», «мальтузианский», «антипавловский».

В 1984 г. из-за ухудшения здоровья Соболев возвратился в Москву, в Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР. Снова, как и 50 лет назад, местом его работы стал отдел дифференциальных уравнений. Почетный доктор многих зарубежных университетов и член иностранных академий, он участвовал в работе международных конференций, выступал с докладами.

С.Л. Соболев скончался 3 января 1989 г. в Москве и похоронен на Новодевичьем кладбище.

И.М. Гельфанд

Гельфанд Израиль Моисеевич родился 2 сентября 1913 г. в местечке Окны Одесской области в семье бухгалтера. В 1923 г. семья переехала в город Ольгополь Винницкой области. В 1930 г. семнадцатилетним юношей Гельфанд приехал в Москву. Не имея среднего образования, он стал работать контролером в Ленинской библиотеке, самостоятельно изучать математику. Обобщая свой опыт математического самообразования, в интервью журналу «Квант» Гельфанд сказал: «Я понял и запомнил на всю жизнь, что новой областью можно овладеть, решая задачи, и никогда не зазорно посмотреть в ответ, поскольку, когда мы решаем какую-либо проблему, всегда имеется гипотеза об ответе. Занятия математикой вообще похожи на решение задач, в которых кое-что известно об ответе» [38].

В 1931 г. Гельфанд посещал вечерние лекции по математике в нескольких учебных заведениях и был принят ассистентом кафедры математики Вечернего химико-технологического института. В 1932 г., не имея диплома о высшем образовании, он поступил в аспирантуру (руководитель Колмогоров) Московского университета, стал преподавателем математики МГУ. В 1935 г. Гельфанд защитил кандидатскую диссертацию на тему «Абстрактные функции и линейные операторы» и был назначен на должность доцента. В 1935 г. Московское математическое общество учредило премии для молодых математиков. Первые премии были присуждены И.М. Гельфанду, М.В. Келдышу, П.К. Рашевскому. Примечательно, что Гельфанд почти никогда не работал в одиночку. Бóльшая часть научных трудов написана им в соавторстве.

В первые годы своей научной деятельности Гельфанд проводил исследования в области классического функционального анализа. Гельфанд разрабатывал теорию нормированных колец в топологических пространствах, а также занимался исследованиями в области дифференциальных уравнений. Им прочитано несколько курсов лекций в Московском университете.

В 1939 г. Гельфанд стал старшим научным сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Научные работы Гельфанда относились к алгебраическим вопросам функционального анализа. Его исследования установили связи между идеями функционального анализа и абстрактной топологии.

В 1940 г. Гельфанд защитил докторскую диссертацию, посвященную созданной им же теории нормированных колец, и получил ученую степень доктора физико-математических наук. Нормированное кольцо – это комплексное банахово пространство, для элементов которого определено ассоциативное умножение, перестановочное с умножением на комплексные числа и непрерывное по каждому аргументу. Теория этих колец является органической частью функционального анализа.

Диссертация Гельфанда послужила отправным пунктом для создания им совместно с М.А. Наймарком теории колец с инволюцией и теории бесконечномерных представлений групп Ли. Часть работ, посвященная представлениям унимодулярных групп, групп Лоренца, выполнена им совместно с Б.М. Левитаном, А.М. Ягломом. В соавторстве с Д.А. Райковым Гельфандом дано новое построение теории характеров коммутативных нормированных групп.

В области функционального анализа к началу Второй мировой войны Гельфандом была создана теория нормированных колец и разработан гармонический анализ на коммутативных группах, получены результаты по аналитическому представлению операторов и функционалов.

Во 1940-х годах начался второй период научного творчества Гельфанда, связанный с исследованиями в теории представлений. Начало общей теории унитарных представлений локально компактных групп положила работа Гельфанда и Д.А. Райкова, выполненная в 1943 г. В ней была установлена связь между положительно определенными функциями на локально компактной группе и унитарными представлениями этой группы.

Затем Гельфанд и М.А. Наймарк приступили к работам по построению унитарных представлений групп Ли. Во время войны Гельфанд также занимался разработкой вопросов теории топологических групп.

В 1943 г. Гельфанд получил ученое звание профессора. Существенное значение для развития московской школы функционального анализа имел семинар по функциональному анализу и математической физике при Московском университете под руководством Гельфанда. В первой половине 1940-х годов тематика научно-исследовательской работы семинара была также связана с вопросами теории дифференциальных уравнений и высшей алгеброй. Во второй половине 1940-х годов повысился интерес к задачам теоретической физики, в первую очередь квантовой механики. Позже были включены вопросы теории обобщенных функций, теории информации, теории случайных процессов и др.

Гельфанд прекрасно разбирался в физических проблемах и в 1940–1950-е годы принимал активное участие в решении оборонных задач. В период 1948–1955 гг. под руководством Гельфанда возникло новое направление в теории обыкновенных дифференциальных уравнений – изучение систем линейных уравнений с периодическими коэффициентами. При разработке теории привлекался аппарат алгебры и функционального анализа. В 1951 и 1953 гг. Гельфанд стал лауреатом Государственной премии, в 1953 г. он избран членом-корреспондентом АН СССР и назначен заведующим отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша.

В 1950-е годы научные интересы Гельфанда расширились. Он стал заниматься теорией случайных процессов, теорией разностных схем, теорией информации, численными и приближенными методами, теорией аналитических функций, квантовой механикой. В 1955 г. он дал определение обобщенного случайного процесса. Значительную часть обзорной статьи И.М. Гельфанда и А.М. Яглома «О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой функции», опубликованной в 1957 г., составляют результаты самих авторов.

Гельфанд заложил основы интегральной геометрии и исследовал преобразование Радона. Австрийский математик Иоганн Радон в 1917 г. ввел интегральное преобразование функции многих переменных, являющееся аналогом преобразования Фурье.

В 1960-е годы Гельфанд занимался также вопросами применения математики в биологии и медицине, которыми он стал интересоваться после смерти от лейкемии своего маленького сына Саши. Благодаря исследованиям Гельфанда преобразование Радона стало использоваться в томографии, что дало возможность исследовать скрытые в организме образования (опухоли, внутренние кровоизлияния и т. п.) путем получения послойного изображения объекта при облучении. Информация об объекте восстанавливается компьютером по вычислению пространственного распределения интенсивности излучения, прошедшего через объект, с помощью преобразования Радона.

Из 230 научных работ Гельфанда свыше 100 посвящены биологии. Им получены важные результаты по физиологии мозжечка и регуляции ритмических движений. В работах по клеточной биологии Израиль Моисеевич определил механизмы, регулирующие форму и направление движения нормальных и опухолевых клеток в организме.

Начиная с 1958 г. Гельфандом в соавторстве с другими математиками написана серия книг «Обобщенные функции», посвященная дальнейшему развитию этой теории и ее приложениям. Первые три книги подготовлены И.М. Гельфандом и Г.Е. Шиловым. Они и их ученики начали исследования задачи Коши для общих линейных систем с постоянными коэффициентами или коэффициентами, зависящими от времени, на основе развитой ими теории различных пространств обобщенных функций. Значительных результатов в исследовании обобщенных функций достиг шведский математик Ларс Хёрмандер, получивший за свои работы медаль Филдса в 1962 г. [76].

В 1960 г. Гельфанд поставил вопрос о вычислении индекса любой нормально разрешимой предельной задачи и связанный с этим вопрос о гомотопической природе множества всех эллиптических предельных задач.

В 1961 г. Гельфанд использовал квазиинвариантные методы для построения представления системы коммутационных соотношений квантовой теории поля. В 1961 г. он стал лауреатом Ленинской премии. В 1960-х годах Гельфанд занимался также задачами нелинейного программирования. В 1962 г. им и М.Л. Цетлиным предложен метод поиска минимума функций с «овражными» особенностями.

Гельфандом решена обратная задача для уравнения Штурма – Лиувилля. Им заложены основы интегральной геометрии и разработаны ее применения, построена общая теория гипергеометрических функций. Он создал метод прогонки для решения уравнений с частными производными.

В 1967 г. Гельфанд стал главным редактором журнала «Функциональный анализ и его приложения». С 1968 по 1970 г. он был президентом Московского математического общества. В 1984 г. Гельфанд избран дей-

ствительным членом АН СССР. Он был иностранным членом нескольких зарубежных академий и математических обществ, награжден многими орденами и медалями.

В 1989 г. Гельфанд уехал в США, где сначала работал приглашенным профессором Гарвардского университета и Массачусетского технологического института, а с 1991 г. – профессором отделений математики и биологии Института дискретной математики и вычислительных наук Ратгерского университета в Нью-Джерси.

Научное творчество Израиля Моисеевича на уровне высших достижений длилось 76 лет.

Скончался Гельфанд 5 октября 2009 г. в Нью-Брансвике.

Чарльз Фефферман

Американский математик Фефферман Чарльз Луис родился 18 апреля 1949 г. в Силвер-Спринг, штате Мэриленд. В колледж он поступил в 12 лет. Первая научная работа Феффермана написана на немецком языке в возрасте 15 лет. Бакалавром физики и математики он стал в Университете штата Мэриленд в 17 лет. Степень доктора философии в Принстонском университете Фефферман получил в 20 лет, а еще через два года стал профессором Чикагского университета, самым молодым профессором в США.

В 1973 г. Фефферман вернулся в Принстонский университет. За работы в области анализа он в 1978 г. получил премию и медаль Филдса на Международном математическом конгрессе в Хельсинки. В 1979 г. Фефферман был избран в Национальную академию наук США.С 1999 по 2002 г. он заведовал кафедрой математики в Принстонском университете.

Чарльз Фефферман решил проблему двойственности для пространств Харди и исследовал сходимость рядов Фурье для функций нескольких переменных. Очень интересным представляется цикл его исследований по классификации биголоморфных функций. В научных работах Феффермана гармонично сочетаются методы вещественного и комплексного анализов. Наиболее ярко такое сочетание методов проявилось в его работах по вещественным гиперповерхностям в комплексных многообразиях [56].

Фефферман серьезно относится к преподавательской деятельности. Но эта работа тяготит его, так как отнимает много созидательной энергии.

Основные работы Феффермана принадлежат к абстрактным разделам математики, но он много внимания уделяет вычислительной математике и приложениям математики в физике и химии.

Фефферман любит играть в шахматы и увлекается вокалом. Он удостоен многих почетных наград и званий. В 2008 г. Американское математическое общество присудило ему премию им. М. Бохера, а в 2009 г. он избран почетным членом Лондонского математического общества.

Ален Конн

Французский математик Конн Ален родился 1 апреля 1947 г. в Даргиньяне. Он выпускник Высшей нормальной школы, в которой обучался с 1966 по 1970 г. С 1976 г. Ален Конн является профессором Парижского университета. В 1978–1979 гг. он работал в Институте перспективных исследований в Принстоне, а позже – в различных университетах и научных центрах Франции.

Научные интересы Конна относятся к теории факторов и коммутативной геометрии. Чтобы лучше понять роль Конна в развитии теории факторов, обратимся к ее истории.

Занимаясь теорией операторов в связи с математическим обоснованием квантовой механики, Джон фон Нейман в 1929 г. приступил к изучению колец операторов, за которыми закрепилось название алгебр фон Неймана. В серии из четырех работ «О кольцах операторов», написанной в соавторстве с Ф.Дж. Мюрреем в 30–40-х годах XX столетия, Нейман рассматривал частный случай алгебр (ныне носящих его имя), центр которых (множество операторов, коммутирующих со всеми операторами алгебры) состоит из операторов, отличающихся от единичного числовым множителем. Такие операторы называют факторами. Нейман и Мюррей построили исчерпывающую классификацию факторов. Было выявлено пять типов факторов, обладающих различными алгебраическими свойствами. Важным был вопрос, различимы ли по своим алгебраическим свойствам факторы одного типа, т. е. полна ли алгебраическая классификация факторов или в нее необходимо вводить более тонкие градации. Лишь в 1960-х годах благодаря усилиям многих математиков классификация факторов типов II и III была значительно доработана.

Заслуга полной классификации факторов типа III принадлежит Конну. Ему удалось решить целый ряд проблем в теории факторов, поставленных в основополагающих работах фон Неймана, а также найти новые неожиданные приложения этой теории [56].

Исследования в теории факторов принесли Конну в 1983 г. медаль Филдса на Международном математическом конгрессе в Варшаве.

После теории факторов Конн занялся некоммутативной геометрией. В 2001 г. он получил премию Крафурда «за значительный вклад в теорию операторной алгебры и основополагающие труды в области некоммутативной геометрии». В 2005 г. Конн в соавторстве с Матильдой Марколи издал расширенный вариант своих лекций по некоммутативной геометрии. Упор он сделал не на изложение общей теории, а на подробный анализ конкретных примеров некоммутативных геометрических пространств. Рассмотренные им примеры относятся к теории динамических систем, квантовой теории поля, теории суперструн, квантовому эффекту Холла, некоммутативным торам и т. п. Приложения работ Конна по некоммутативной алгебраической геометрии возникли в теории суперструн. Их применил Виттен к выводу лагранжианов для суперструн.

В круг научных интересов Конна входит разработка концепции физического пространства-времени, представляемого не как множество точек, а как некоммутативное пространство. Он считает, что на основе методов некоммутативной геометрии может быть доказана или опровергнута гипотеза Римана. Американский математик Сян-Джин Ли объявил, что доказал эту гипотезу, используя результаты Конна. Однако в доказательстве была обнаружена ошибка, и его аннулировали.

В 1982 г. Конн был избран в Парижскую академию наук, в 2003 г. – в Российскую академию наук. В настоящее время он является профессором Института высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт и профессором математического анализа и геометрии в Коллеж де Франс.

С.К. Смирнов

Смирнов Станислав Константинович родился 3 сентября 1970 г. в Ленинграде. Учился в математической школе № 239 (в настоящее время – физико-математический лицей), в котором ранее учился Григорий Перельман. В старших классах Станислав был победителем международных математических олимпиад. В 1987 г. он поступил на математико-механический факультет Ленинградского (Санкт-Петербургского) университета.

Будучи студентом, Смирнов сделал первую серьезную работу, в которой рассматривал вопросы теории приближения функций, геометрии и теории меры. Результаты были опубликованы в двух статьях.

В 1992 г. Смирнов окончил университет и уехал в США в Калифорнийский технологический институт (Калтех) в Пасадене. В 1996 г. он защитил в Калтехе диссертацию и уехал стажироваться в Йельский университет. После работал в Институте перспективных исследований в Принстоне и Институте Макса Планка в Бонне. Затем Смирнов переехал в Швецию и стал профессором Королевского технологического института. В 2001 г. он был принят исследователем в Шведскую академию наук. С 2003 г. Смирнов работает профессором Женевского университета в Швейцарии.

Под влиянием работ Ленглендса и Карлесона основные исследования Смирнов проводил в области комплексного анализа, в частности исследовал конформную инвариантность. Гипотеза о конформной инвариантности была высказана еще в 1990-х годах, однако использовалась во многих исследованиях без доказательства. Смирнову удалось провести строгое доказательство для двух случаев – перколяций на треугольной решетке и плоской модели Изинга. За эти исследования на Международном математическом конгрессе 2010 г. в Хайдарабаде Смирнов получил медаль Филдса.

Смирнов доказал две фундаментальные гипотезы в теории перколяции (протекания), описывающей возникновение состоящих из отдельных элементов бесконечных связных структур. Речь идет о том, как жидкость просачивается через пористую среду. Выяснилось, что для каждого материала

и вещества можно рассчитать такое состояние, в котором оно будет менять свойства. В будущем это позволит более достоверно определять места, где нефти проще пробиться сквозь пористую породу.

Модель Изинга описывает намагничивание материала с позиций статистической физики. Узлам кристаллической решетки (одно-, дву-, трехмерной и более) сопоставляются так называемые спины, равные +1 или –1. Взаимодействующими полагают только соседние спины, они могут взаимодействовать ферромагнитно, антиферромагнитно или не взаимодействовать вообще. Суммирование произведений спинов и коэффициентов, характеризующих взаимодействие, дает энергию, определяющую свойства материала. Доказательства Смирнова дают возможность понять, при какой температуре тот или иной металл становится магнитом. В связи с этим вопросом существовало несколько предположений. Исследования Смирнова положили конец спорам.

Полученные Смирновым результаты могут быть использованы в теории динамических систем, теории вероятностей и математической физике. По мнению коллег Смирнова, полученное им доказательство очень изящное и базируется на глубоких комбинаторных доводах. Его работа подвела четкую теоретическую базу под ряд важных методов современной статистической физики, а также восполнила важнейшее отсутствующее звено в теории эволюции Шрамма – Лёвнера.

Супруга Смирнова Татьяна – профессор математики Женевского университета. В семье Смирновых двое детей.

До получения медали Филдса Смирнов был награжден премиями: Санкт-Петербургского математического общества (1997), Математического института Клэя (2001), Р. Салема (2001), Грана Густафсона (2001), Ролло Давидсона (2002) и Европейского математического общества (2004).

Глава 16

АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА

> Алгебра – это язык, не пользующийся словами, а только математическими символами. Если этот язык символов нам знаком, то на него можно перевести интересующие нас выражения повседневного языка.
>
> *Д. Пойа*

Развитие алгебры в Европе

Математики издавна стремились рассматривать объекты, не имеющие «чувственной» интерпретации. Еще Лейбниц мечтал о том, чтобы математика занималась «всем, что в области воображения поддается точным определениям». Постепенно математика становилась учением об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, положенных в качестве аксиом в основание теории.

Математики английской школы в 1830–1850 гг. изменили традиционные представления о границах алгебры, применив закон композиции ко множеству новых математических объектов. Дж. Буль построил алгебру логики, У.Р. Гамильтон – алгебру векторов, кватернионов и общих гиперкомплексных систем, А. Кэли – алгебру матриц и алгебру с неассоциативным законом композиции. Немецкий математик Г. Грассман развивал линейную алгебру и алгебру гиперкомплексных систем. После 1850 г. основные усилия математиков в алгебре были направлены на проблему изучения алгебраических структур, а не на решение уравнений, как это было раньше.

Исследования велись по трем направлениям: теории алгебраических чисел (П. Дирихле, Э. Куммер, Л. Кронекер, Ю. Дедекинд, Д. Гильберт), теории групп (С. Ли, Ф. Клейн, А. Пуанкаре), природе мнимых чисел.

В начале XX столетия в центре внимания алгебраистов всего мира находилась теория Галуа и теория полей алгебраических чисел. Особенно сильное влияние на этот раздел математики оказала работа Гильберта «Отчет по теории чисел», выполненная в 1894 г. Сформулированные в ней задачи предопределили тематику дальнейших исследований. Одной из таких задач был анализ абелевых расширений полей алгебраических чисел, решение которой привело к развитию теории полей классов.

Если работы Гильберта по теории инвариантов «закрыли» ее, то его исследования по теории алгебраических чисел явились стартовой площадкой для дальнейших исследований. Результаты, предвосхищенные Гильбертом, впоследствии были доказаны Э. Нётер, Т. Такаги, Г. Хассе, Э. Артином, К. Шевалле.

Программа абстрактной аксиоматизации алгебры начала развертываться в глубоких по содержанию работах Дедекинда и Кронекера, но вся широта

этого метода как средства уяснения математических взаимосвязей проявилась в работах американских математиков Диксона и Веддербёрна и немецких математиков Штейница, Нётер, Артина.

Около 1900 г. сформировалось понятие структуры, а основным оно стало через 30 лет. Закрепилось в математике понятие модели. Это дало возможность унифицировать математику. В настоящее время термин «структура» из-за многозначности этого слова в русском языке вытеснен термином «решетка».

Всякая попытка анализа логической структуры современной математики невозможна без изучения истории ее развития.

В 20-е годы XX в. изменилась точка зрения на алгебру, возникла так называемая общая алгебра. Алгебра стала теоретико-множественной, абстрактной наукой. Эти изменения произошли в результате исследований, проводившихся в Германии под руководством Э. Нётер и Э. Артина. Результаты исследований были опубликованы в двухтомнике Ван-дер-Вардена «Современная алгебра». Такие изменения в алгебре привели к значительному расширению тематики исследований.

В современном понимании алгебра – это наука о системах объектов (той или иной природы), в которых установлены операции, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Эти операции называют алгебраическими.

Такой взгляд на алгебру способствовал расширению области применения алгебраических методов и сделал ее разделом математики, формирующим общие понятия и методы для всей математики наравне с топологией, изучающей наиболее общие свойства непрерывных протяженностей. В центре внимания алгебры находятся свойства операций, а не объектов, над которыми производятся эти операции. Фиксируя определенные свойства операций, вводится понятие множества, наделенного алгебраической структурой или множества, наделенного универсальной алгеброй. Вначале были введены в рассмотрение следующие универсальные алгебры: группы, векторные пространства, ассоциативные кольца и алгебры, модули. Затем к ним добавились неассоциативные кольца и алгебры (в том числе алгебры Ли, йордановы алгебры), решетки, полугруппы, квазигруппы и т. д. Исследование универсальных алгебр и их свойств на теоретико-множественной аксиоматической основе называют общей алгеброй. Привычными в обыденной жизни словами – группа, кольцо, поле, тело, решетка и т. п. – называют в общей алгебре абстрактные вещи, для которых каждый математик создает свой индивидуальный мысленный образ, чем-то отличный от соответствующих образов других математиков.

Разделы алгебры, изучающие отдельные типы универсальных алгебр, снабженных дополнительными структурами, имеют свои названия. Так выделяются линейная алгебра, топологическая алгебра, теория групп Ли, теория полей, коммутативная алгебра, алгебраическая геометрия, гомологическая алгебра, теория категорий, теория алгебраических систем и т. п. Поясним смысл некоторых понятий современной алгебры.

Группа является одним из основных понятий современной математики. Теория групп изучает в самой общей форме операции, наиболее часто встречающиеся в математике и ее приложениях. При этом теория групп изучает не совсем произвольные операции, а лишь те, которые обладают рядом основных свойств, включенных в определение конкретной группы. Например, группой симметрий фигуры называется множество различных движений евклидовой плоскости, самосовмещающих данную фигуру, операцией на котором служит композиция движений.

Хотя первые попытки определения понятия группы появились еще в XVIII столетии в работах Лагранжа, Вандермонда и Руффини, а важные результаты теории групп содержатся в работах Абеля и Галуа первой половины XIX в., наиболее заметное влияние теории групп на математику в целом и алгебру, в частности, проявилось на рубеже XIX–XX вв.

В геометрии исследования в теории групп проводили Мёбиус и Кэли в середине XIX в. Наиболее значительные результаты в применении теории групп в геометрии содержатся в «Эрлангенской программе» Клейна (1972), в которой в основу классификации геометрий положено понятие группы преобразований. Каждой геометрии соответствует некоторая группа преобразований пространства, и только те свойства фигур принадлежат к данной геометрии, которые инвариантны относительно преобразований соответствующей группы.

Элементы теории групп использовались и в теории чисел Эйлером и Гауссом. В конце XIX в. произошло осознание принципиального единства теоретико-групповых идей, существовавших к тому времени в разных областях математики. Это привело к появлению современного абстрактного понятия группы в работах Ли и Фробениуса.

Теория групп является одной из самых развитых областей алгебры и применяется не только в математике. Например, с помощью теории групп Е.С. Фёдоров в 1890 г. решил задачу классификации правильных пространственных систем точек, являющуюся одной из основных задач кристаллографии.

Важную роль теория групп играет в физике, например, в квантовой механике, где широко используется симметрия и теория представлений групп линейными преобразованиями. Теория групп распадается на ряд больших разделов, выделяемых чаще всего дополнительными условиями на групповую операцию или внесением в группу дополнительных структур, связанных определенным образом с групповой операцией. Важнейшими разделами теории групп являются теории: конечных групп, абелевых групп, разрешимых и нильпотентных групп, групп преобразований, представлений групп, топологических групп и ее частный случай – теория групп Ли.

Кольцо. Если основным источником понятия группы были преобразования и подстановки, то к другому не менее важному понятию – понятию кольца привели исследования различных числовых систем и поиски новых алгебраических образований, подобных числам. Термин «кольцо» впервые появился в работах Гильберта. Введение нового понятия не противоречило его стремлению к аксиоматизации математики.

Множество элементов называют кольцом, если каждой паре элементов поставлен в соответствие некоторый элемент этого множества, называемый их суммой, и еще один элемент, называемый их произведением. В понятии кольца для математиков появляются новые, неожиданные свойства определенных в них операциях. Если некоммутативность умножения в кольцах матриц понятна тем, кто знает правила умножения матриц, то присутствие в кольцах матриц делителей нуля и нильпотентных элементов многих удивляет. Делителем нуля называется ненулевой элемент, произведение которого на некоторый ненулевой элемент равно нулю. Нильпотентным элементом называется такой элемент a кольца или полугруппы, который удовлетворяет равенству $a^n = 0$ для некоторого натурального n. Например, квадрат ненулевой матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен нулю: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Коммутативные кольца без делителей нуля встречаются в различных теоретико-числовых проблемах, и существует хорошо разработанная теория колец этого класса. Самой знаменитой теоретико-числовой проблемой, немало способствовавшей развитию теории колец, является Великая теорема Ферма, о которой рассказано в гл. 23. При попытках доказательства этой теоремы возникла значительная часть теории колец, в том числе теория идеалов. В коммутативных кольцах некоторые типы идеалов играют такую же роль, как простые числа в кольце целых чисел.

Поле. Коммутативное кольцо, в котором ненулевые элементы образуют абелеву группу по умножению, называют полем. В отличие от групп и колец, благодаря немецкому математику Эрнсту Штейницу имеется довольно полное описание всех возможных полей.

Фердинанд Фробениус

Немецкий математик Фробениус Фердинанд Георг родился 26 октября 1849 г. в Шарлоттенбурге, пригороде Берлина. В Берлинском университете его учителями были Куммер, Кронекер и Вейерштрасс. В 1870 г. Фробениус под руководством Вейерштрасса написал диссертацию «Решение систем дифференциальных уравнений» и получил степень доктора.

В 1875 г. Фробениус стал профессором Федеральной высшей политехнической школы в Цюрихе. Там он сначала исследовал линейные дифференциальные уравнения, эллиптические функции и тета-функции одной и нескольких переменных, теорию матриц и определителей и билинейные формы, а позже полностью перешел к алгебраическим исследованиям. В 1887 г. он опубликовал работу по теории групп.

В 1893 г. Фробениуса пригласили в Берлин на должность профессора Берлинского университета, которую ранее занимал Кронекер. В том же году его избрали в Прусскую академию наук. Хотя в то время Фробениус был крупным специалистом по теории групп и теории определителей, он не занимался определителями группы.

В письмах к Фробениусу от 25 марта и 6 апреля 1896 г. Дедекинд написал о своих исследованиях в области определителя группы. Он предложил Фробениусу заняться этой задачей, чувствуя, что сам не сможет решить ее. 12 апреля 1896 г. Фробениус отправил первое письмо Дедекинду, в котором описал свои идеи о разложении однородного полинома, связанного с конечной группой. Следующие два письма он написал 17 и 26 апреля, и к концу месяца Фробениус создал основы характеров теории конечных групп. Эта теория развивалась еще долго, но переписка Фробениуса и Дедекинда считается началом появления теории представлений конечных групп.

В течение следующих 20 лет Фробениус написал еще 15 работ по теории групп, продолжая развивать теорию характеров группы и теорию представлений группы применительно к теории конечных групп. Им выполнено также много работ по теории матриц и представлений конечных групп матрицами.

Следует отметить, что современная теория представлений группы не опирается на определитель группы. Эмми Нётер в 20-е годы XX в. обобщенно рассмотрела системы матриц и определителей, таким образом подняв исследования в алгебре на новый уровень.

Умер Фробениус 3 августа 1917 г. в Шарлоттенбурге.

Эмми Нётер

Нётер Амали Эмми, пожалуй, самая талантливая женщина-математик XX в. Она родилась 23 марта 1882 г. в Эрлангене в семье профессора математики Макса Нётера, специалиста по теории алгебраических функций, ученика Клебша и друга Гордана. В 1902 г. Эмми окончила Эрлангенский университет.

Диссертацию «О полных системах инвариантов тернарных биквадратных форм», написанную под руководством П. Гордана, она защитила в 1907 г. Если диссертация выполнена в «духе Гордана» и является ярким примером работы с формальными вычислениями, то труды Нётер, выполненные в пору ее профессиональной зрелости, являются образцом аксиоматического мышления в терминах абстрактных понятий. Во время Первой мировой войны, в 1916 г. Нётер переехала в Гёттинген. К этому времени было опубликовано шесть ее научных работ. Иногда Эмми читала курс своего отца, заменяя его во время болезни. Из всех полученных к тому времени результатов в алгебре она более всего ценила идеи Дедекинда.

Нётер не была формально ученицей Гильберта, но по характеру творчества оказалась прямой наследницей его математических идей. Гильберт высоко ценил ее математический талант и считал Нётер самой выдающейся из женщин-математиков. Эмми Нётер входила в ближайшее окружение Гильберта.

Несмотря на ее математический талант, устроиться на работу в монархической Германии ей, еврейке, было невозможно. После провальных попыток Гильберта добиться хабилитации Нётер, он по-своему решил эту проблему.

Лекции были объявлены под именем Гильберта, а читала их Нётер. Только в 1919 г., после падения монархии, Клейну и Гильберту удалось добиться для нее низшей преподавательской должности – приват-доцента, не предусматривавшей никакого жалованья. В 1922 г. Нётер была назначена сверхштатным профессором с весьма скромной оплатой. Попытки коллег-математиков добиться для нее должности, соответствующей ее дарованию, не возымели успеха.

Математические исследования были целью и едва ли не единственной радостью в жизни Эмми Нётер. Она была совершенно лишена женственности. Герман Вейль как-то заметил, что грации не стояли у ее колыбели. Она была плотного телосложения и обладала громким голосом. В повседневной жизни была скромна и непритязательна, умела создавать вокруг себя необычайно уютную атмосферу и обладала тонким чувством юмора [22].

Не обладая педагогическим талантом (количество ее слушателей колебалось от пяти до десяти), Нётер создала новое научное направление – общую теорию колец, полей, идеалов, т. е. абстрактную алгебру. Она стала самостоятельным мыслителем-математиком, систематически работающим над построением абстрактной алгебры, руководителем небольшого кружка своих последователей и учеников. Г. Вейль писал: «В бытность мою в Гёттингене в 1930–1933 гг. Эмми Нётер, несомненно, была сильнейшим центром математической деятельности как по плодотворности программы научных исследований, так и по влиянию на широкий круг учеников… она излагала свои еще не законченные идеи в лекциях и обсуждала их с учениками… Она была очень рассеянна и к тому же не слишком заботилась о ясности и четкости изложения. И все же она была великим педагогом, и те, кто сумели приспособиться к ней, смогли научиться у нее многому… Она обладала необычайной способностью стимулировать других исследователей, и многие из высказанных ею идей обретали окончательную форму только в работах ее учеников и сотрудников. Значительная часть того, что составляет содержание второго тома “Современной алгебры” Ван-дер-Вардена, должно принадлежать Эмми Нётер» [22]. Среди слушателей ее лекций были Бартел Ван-дер-Варден, Эмиль Артин, Павел Сергеевич Александров.

Г. Вейль выделял в научной деятельности Нётер три периода: первый – относительной зависимости (1907–1919); второй – исследования, группирующиеся вокруг общей теории идеалов (1920–1926); третий – исследование некоммутативных алгебр, их представлений линейными преобразованиями и применение их к изучению коммутативных числовых полей и теории чисел (1927–1935).

Нётер строит общую теорию коммутативных колец, теорию идеалов и модулей над кольцами, подвергает систематическому изучению основные аспекты некоммутативной алгебры. Вместе с Э. Артином и Ван-дер-Варденом она разрабатывает современную алгебру. Результаты этой работы приведены в книге Ван-дер-Вардена «Современная алгебра». Нётер решила две проблемы, поставленные Жорданом и Гильбертом по теории дифференциальных инвариантов. Под ее руководством начались структурные изменения в алгебраической геометрии в соответствии со строгими стандартами

абстрактной алгебры. Ею сформулирована фундаментальная теорема теоретической физики, связывающая законы сохранения с симметрией системы, называемая теоремой Нётер.

Талант Нётер заключался в способности оперировать абстрактными понятиями. Она обладала живым воображением, которое позволяло ей представить весьма далекие связи. Эмми Нётер стремилась соединить разрозненные фрагменты в единую теорию.

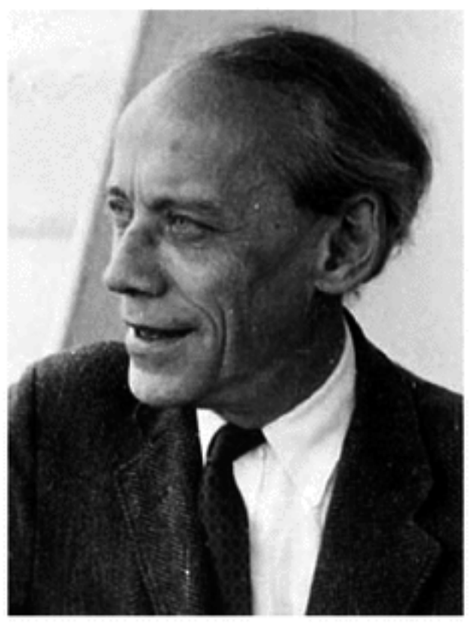
Зимой 1928–1929 гг. Нётер приезжала в Москву. В течение одного семестра она читала лекции в Москве, где подружилась с Понтрягиным. Ее приезд сыграл значительную роль в приобщении московских математиков к идеям современной алгебры.

После прихода нацистов к власти в 1933 г. Эмми Нётер было запрещено преподавать и вообще участвовать в академической деятельности. Она эмигрировала в США и два последних года жизни работала в женском университете маленького городка Брин Мор штата Пенсильвания. Она не имела семьи, ее Эмми заменяли ученики.

Эмми Нётер получила возможность вести научную работу в Институте перспективных исследований в Принстоне. К сожалению, «американский» период в жизни Нётер оказался коротким. 14 апреля 1935 г. после неудачно проведенной медицинской операции Эмми скончалась.

Брат Эмми Фриц эмигрировал из Германии в СССР. Его направили работать в Томский университет, где Фриц на немецком языке издавал «Известия Института математики и механики». В 1936 г., как и Н.Н. Лузин, Фриц Нётер подвергся преследованиям.

Эмиль Артин



Артин Эмиль родился 3 марта 1898 г. в Вене. Его отец, армянин по национальности, торговал предметами искусства, а мать была оперной певицей. В 1916 г. Эмиль поступил в Венский университет. Через полгода его призвали в армию.В 1919 г. Артин продолжил обучение в Лейпцигском университете, прерванное из-за Первой мировой войны. В 1921 г. он защитил диссертацию и получил степень доктора.

Артина привлекала алгебра, а наиболее значительные исследования по алгебре проводила Э. Нётер в Гёттингене. Артин переехал в Гёттинген, стал учеником
Нётер и проводил самостоятельные исследования. Г. Вейль писал: «Артин и Хассе стоят рядом с Эмми Нётер как два независимых ума, работавших в областях, которые близко соприкасались со сферой ее деятельности, хотя оба сильно тяготели к теории чисел» [22].

После года преподавательской деятельности в Гёттингенском университете Артин перешел в Гамбургский университет. В 1927 г. Артин решил 17-ю проблему Гильберта и доказал общий закон взаимности. В 1929 г. он женился на одной из своих учениц.

Когда Гильберт в 1930 г. уходил на пенсию, то среди его возможных преемников рассматривалась и кандидатура Артина, но выбран был Г. Вейль. Э. Артину, Э. Нётер, Б. Ван-дер-Вардену и другим было доверено дать оценку работам Гильберта, посвященным полям алгебраических чисел. Гильберт исследовал проблему определения максимального числа и относительного расположения вещественных овалов алгебраической кривой или поверхности. Он высказал предположение о том, что независимо от числа переменных всякая рациональная функция с действительными (или рациональными) коэффициентами представляет собой сумму квадратов таких же функций при условии, что она принимает положительные значения при действительных значениях своих переменных. Это предположение Гильберта было доказано Артином.

Развивая разработанную Гильбертом теорию нормативного вычета, Артин достиг существенных результатов, взяв в качестве значения символа вычета не корни из единицы, а элементы группы Галуа.

Исследуя поля алгебраических чисел, Артин развил результаты Такаги, одного из основоположников теории полей классов. Для этого он использовал достижения Чеботарёва. Артин в 1927 г. доказал теорему, которую стали называть законом взаимности Артина. Этот результат привел к коренной перестройке теории полей классов. Его суть заключается в установлении непосредственной связи между арифметикой поля и соответствующей группой Галуа.

Артин вместе с Нётер, Ван-дер-Варденом, Такаги и Хассе занимался теорией полей классов в алгебраической теории чисел. Благодаря их работам, изложенным в монографии Ван-дер-Вардена «Современная алгебра», алгебра стала теоретико-множественной аксиоматической наукой, что значительно расширило круг исследуемых вопросов.

В работе 1927 г. Артин представил положительное решение этого вопроса. Доказательство Артина основано на тщательном анализе упорядоченных полей и связи упорядоченности со множеством сумм квадратов. Естественно, что аксиоматическое изучение задачи позволяет установить более общий результат в сравнении с тем, что был сформулирован Гильбертом [63].

В теории бесконечных групп Артин ввел понятие свободных произведений групп и начал разрабатывать их теорию. В дальнейшем этим вопросом успешно занимался А.Г. Курош. В теории колец Артин занимался теорией идеалов в конечномерных алгебрах и альтернативными кольцами, т. е. кольцами, в которых всякое подкольцо, порожденное двумя элементами, ассоциативно.

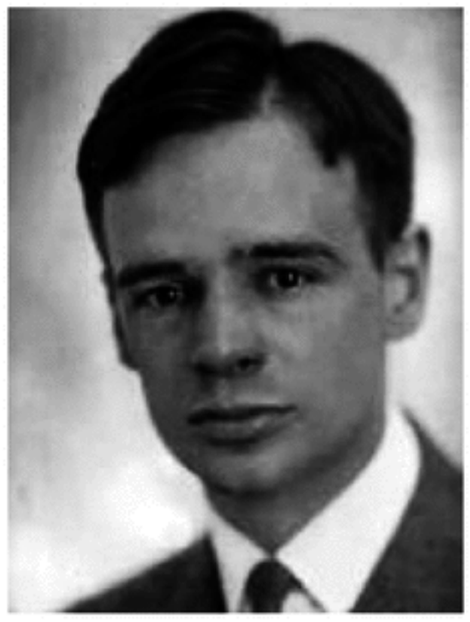
Известна теорема Веддербёрна – Артина о строении полупростых колец. Первоначальный вариант теоремы доказан Веддербёрном в 1908 г. для конечномерных алгебр. В 1950 г. Артин распространил ее на кольца с условием минимальности.

В годы фашизма Артин эмигрировал в Америку, а в 1956 г. вернулся в Германию и стал профессором Гамбургского университета.

Скончался Эмиль Артин 20 декабря 1962 г. в Гамбурге.

На русском языке опубликованы следующие книги Артина: «Введение в теорию гамма-функций» (1934), «Геометрическая алгебра» (1969), «Теория Галуа» (2004).

Бартел Ван-дер-Варден



Ван-дер-Варден Бартел Лендерт родился 2 февраля 1903 г. в Амстердаме. Он был одаренным молодым человеком. Отец, учитель средней школы, однажды забрал его математические учебники, считая, что ребенок вместе с другими ребятами должен играть на улице. Однако отцу пришлось вернуть сыну книги, когда обнаружилось, что тот изобрел свою тригонометрию, заменив традиционные названия и понятия собственными.

В 23 года Ван-дер-Варден окончил Амстердамский университет и по рекомендации Брауэра приехал в Гёттинген. Его наставником стала Эмми Нётер. Ван-дер-Варден вспоминал, что мысли Нётер и ее объяснения мог понять только очень заинтересованный человек, но именно она оказывала наибольшее влияние на развитие новых идей в современной алгебре. С 1925 по 1931 г. Ван-дер-Варден был профессором Гёттингенского университета.

Ван-дер-Варден приехал к Нётер из Голландии уже сложившимся математиком, но позаимствовал у нее аппарат абстрактных понятий, позволивший ему сформулировать свои идеи и решить проблемы [23]. Итогом сотрудничества Ван-дер-Вардена с Нётер и Артином стала его двухтомная монография «Современная алгебра» (1930–1931). В этой книге он развивает идеи Э. Нётер, Д. Гильберта, Ю. Дедекинда, Э. Артина. Книга принесла ему мировую известность и до сих пор считается классическим учебником по алгебре, содержит результаты самого Ван-дер-Вардена по алгебраической теории полей, абстрактной алгебре, теории групп теории Галуа и результаты его учителей. Значительная часть второго тома «Современной алгебры» является изложением результатов Нётер.

В 1931 г. Ван-дер-Варден стал профессором Лейпцигского университета и преподавал в нем до окончания Второй мировой войны. То что он, голландец, провел всю войну в стране, оккупировавшей его родину, хотя ему предоставлялась возможность покинуть Германию, создало массу сложностей при трудоустройстве в послевоенные годы.

В Лейпцигском университете он исследовал математические аспекты квантовой механики. Основным математическим аппаратом, которым пользовался Ван-дер-Варден, стала теория групп, в частности теория представлений конечных и непрерывных групп.

В небольшой по размеру второй книге Ван-дер-Вардена «Метод теории групп в квантовой физике», содержится значительный материал, представляющий большой интерес для увлекающихся математикой физиков-теоретиков и для математиков, желающих ознакомится с математической структурой квантовой механики. Отличительной чертой этой книги было изложение наиболее простым способом сложных математических понятий и их физическое истолкование. Ван-дер-Варден старался использовать простейшие вспомогательные средства и в математических выкладках исходить из физической целесообразности. В частности, он учел новые работы Дирака и других ученых,

что позволило избежать довольно сложной теории представлений и вычисления характеров симметричной группы перестановок. Основной частью книги является теория представления групп вращения и теория спина.

Кроме общей алгебры, Ван-дер-Варден занимался топологическими исследованиями. Г. Вейль подчеркивал, что в руках Лефшеца и Ван-дер-Вардена топология одержала решающую победу, установив применимые во всех случаях определения кратности и законы, также не имеющие исключений. Ван-дер-Варден сумел обосновать исчислительную геометрию с помощью вспомогательных средств теории идеалов. Исчислительную геометрию Ван-дер-Варден сначала представил с позиций абстрактной алгебры, а затем интерпретировал как вытекающую из чисто топологических теорем о точках пересечения [22].

Ван-дер-Варден обладал литературным талантом и умел четко и ясно излагать не только свои, но и результаты других ученых. Среди специалистов, изучающих теорию вероятностей и математическую статистику, большим успехом пользовалась его монография «Математическая статистика».

В годы Второй мировой войны Ван-дер-Варден публиковал мало научных результатов. Постепенно его интересы смещались в сторону истории науки. В 1948–1951 гг. Ван-дер-Варден был профессором Амстердамского университета, а с 1951 г. – Цюрихского. В вышедшей в 1950 г. книге «Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции» он исследует становление научной деятельности на заре человеческой цивилизации. В 1965 г. выходит продолжение: «Пробуждающаяся наука II. Рождение астрономии». В работе над этими книгами он опирается на малодоступные свидетельства папирусных и клинописных текстов, включающих в себя наблюдения восходов Сириуса, восходов и заходов Венеры, математическую теорию Луны и планет. Значительное место уделяется астрологии и влиянию астральных религий Древней Месопотамии на взаимоотношения математической астрономии вавилонян и астрологии. Ван-дер-Варден исследовал общее влияние вавилонской науки на астрономию Древней Греции, раннюю индийскую астрономию и астрономию эпохи эллинизма. Он анализировал причину повышенного интереса к астрономии. По его мнению, одна из самых развитых среди древних естественных наук широко использовалась астрологами для предсказаний, так необходимых власть имущим.

Ван-дер-Варден нередко писал статьи о творчестве выдающихся современников, например о Гильберте. После смерти Нётер в 1935 г. Ван-дер-Варденом в журнале «Анналы» опубликована статья о ее деятельности. После этого вполне закономерным было ожидание репрессий со стороны нацистов, но все обошлось.

Бартел Ван-дер-Варден был выдающимся математиком, предопределившим основные тенденции развития алгебры XX в. Он занимался приложением современной алгебры к строгому обоснованию алгебраической геометрии, с успехом использовал методы теории групп для решения задач топологии, теоретической физики, квантовой механики. Кроме того, его ценили как вдумчивого источниковеда и интерпретатора древнейших научных текстов.

Бартел Ландерт Ван-дер-Варден умер 12 января 1996 г. в Цюрихе.

На русском языке изданы следующие книги Ван-дер-Вардена: «Метод теории групп в квантовой механике» (1938), «Современная алгебра» (1947), «Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции» (1959), «Математическая статистика» (1960), «Алгебра» (1979).

Джон Томпсон

Американский математик Томпсон Джон Григгс родился 13 октября 1932 г. в Оттаве, штат Канзас. Он окончил Йельский университет в 1955 г. и аспирантуру Чикагского университета в 1959 г. Руководителем его диссертационной работы был Сондерс Маклейн, один из основателей теории категорий.

До назначения в 1962 г. на должность профессора математического факультета Чикагского университета Томпсон был доцентом Гарвардского университета. В 1970 г. он переехал в Великобританию и стал профессором математики в Кембриджском университете. После 23 лет работы в Кембридже Томпсон вернулся в США на занимаемую и по сей день должность во Флоридский университет в Гейнсвилле, при этом он остается почетным профессором математики Кембриджского университета.

Томпсон является крупнейшим специалистом в теории конечных групп. Им доказаны теоремы, которые легли в основу классификации простых конечных групп. Это стало одним из важнейших достижений математики XX в. Томпсон совместно с Уолтером Фейтом доказал, что каждая неэлементарная группа имеет конечное число элементов.

В 1962 г. Томпсон и Фейт доказали, что всякая некоммутативная простая конечная группа должна содержать четное число элементов. Доказательство теоремы Томпсона – Фейта заняло все 255 страниц одного из номеров журнала «Pacific Journal of Mathematics». В 1965 г. Фейт и Томпсон получили за эту работу премию Коула. Позже Томпсон расширил этот результат, классифицировав N-группы, важный вид конечных простых групп. Им было доказано, что все конечные простые группы принадлежат к нескольким сериям, за исключением некоторых групп, свойства которых были изучены Томпсоном и его учениками. Это событие открыло путь к исследованиям конечных групп, классификация которых была завершена другими математиками.

За исследования в теории групп Томпсон получил самые престижные международные награды по математике: медаль Филдса в 1970 г., премию Вольфа в 1992 г. и премию Абеля в 2008 г., а также премию Сильвестра, медаль Пуанкаре и Национальную медаль науки США. Томпсон является почетным доктором многих университетов и членом нескольких национальных академий.

Вместе с Томпсоном премию Абеля в 2008 г. получил французский математик Жак Титс. Денежное вознаграждение премии составляет 6 млн норвежских крон или 1,2 млн долл. Исследования обоих лауреатов дополняют

друг друга: Томпсон сконцентрировался на конечных группах, а Титс работал в основном в области теории линейных групп. Конечные группы возникают в исследовании перестановок, а линейные группы состоят из симметрий, сохраняющих заложенную в их основе геометрию.

Почти невероятным представляется вывод Томпсона о том, что все конечные простые группы принадлежат к нескольким сериям, кроме 26 спорадических групп с особыми свойствами. Исследования Томпсона и его студентов сыграли важную роль в разъяснении свойств этих спорадических групп, включая группу с самым большим порядком, так называемый монстр.

Развитие алгебры в СССР

В XIX – начале XX вв. алгебраические исследования в нашей стране не приобрели сколько-нибудь значительного размаха и их результаты несравнимы с вкладами русских математиков того времени в математический анализ, теорию чисел, теорию вероятностей и геометрию.

В годы, предшествующие Первой мировой войне и революции 1917 г., Д.А. Граве создал в Киеве первую в нашей стране алгебраическую школу. Интересы математиков этой школы были сосредоточены на теории полей алгебраических чисел и теории Галуа, с одной стороны, и теории конечных групп – с другой. Школа явилась колыбелью алгебры в СССР, к ней принадлежали советские алгебраисты старшего поколения такие, как Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарёв и О.Ю. Шмидт. Научные направления, разрабатывавшиеся в школе Граве, оставались основными для алгебры в СССР в первый период ее развития.

20-е годы XX в. были периодом формирования советской алгебраической школы и первых выходов ее на международную арену. В нашей стране из всех разделов алгебры наиболее благоприятные условия для развития сложились для теории групп. Термин «теория групп» принято понимать в смысле теории абстрактных групп, в отличие от теории групп подстановок и групп преобразования, имеющих свои специфические задачи, понятия и методы. Стартовой площадкой для развития теории групп в СССР послужили работы О.Ю. Шмидта, особенно его монография «Абстрактная теория групп», вышедшая в Киеве в 1916 г. В то время теория групп была представлена лишь небольшим числом монографий зарубежных авторов.

К 1920-м годам относятся исследования Чеботарёва, работавшего в Казани. Они явились существенным вкладом во многие разделы теории полей Галуа и теории полей алгебраических чисел, в частности в теорию полей классов. Особенно известна его теорема о плотностях (1923), обобщающая теорему Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии. Методы, развитые Чеботарёвым для доказательства этой теоремы, позднее использовал Э. Артин при исследовании общего закона взаимности для абелевых расширений полей.

Интересы Б.Н. Делоне, работавшего в Ленинграде, были сосредоточены на вопросах, находящихся на стыке теории числовых полей и теории диофантовых уравнений. Его исследования развивались в духе петербургской школы

теории чисел и продолжали традиции Г.Ф. Вороного, а по методам относились к геометрии чисел.

В 1930-е годы советская алгебраическая школа была реструктурирована в связи с возникновением общей, или, как тогда говорили, абстрактной алгебры, которая привела к значительным изменениям тематики исследований. Расширение исследований было определено теми новыми точками зрения на алгебру как на теоретико-множественную, аксиоматическую науку, которые развивались в Германии под руководством Э. Нётер и Э. Артина. Московская математика благодаря развитию своих старых теоретико-множественных традиций оказалась наиболее подготовленной к восприятию идей абстрактной алгебры (в настоящее время ее предпочитают называть общей алгеброй). Особенно много для пропаганды этих идей в Москве сделал П.С. Александров. Интенсивно в нашей стране развивались исследования по теории групп, теории колец, теории полугрупп и топологической алгебре.

Весной 1930 г. в Московском университете начал работать организованный О.Ю. Шмидтом семинар по теории групп. Его первыми участниками были ученики Шмидта, а также А.Г. Курош – ученик П.С. Александрова. Позднее Курош объединил почти всех московских алгебраистов, работавших в области общей алгебры. Он занимался теорией бесконечных групп, развивая работы О.Ю. Шмидта о прямых произведениях, затем исследовал теорию структур и теорию колец.

Математики школы О.Ю. Шмидта исследовали проблему Бернсайда и другие вопросы теории конечных групп. Алгебраисты ленинградской школы А.А. Маркова-мл. и В.А. Тартаковского занимались вопросами задания групп соотношениями и связями с гомологией. Школа А.Г. Куроша занималась бесконечными абелевыми разрешимыми и локально свободными группами, теорией прямых и свободных произведений и т. д.

Всякая алгебраическая система представляет собой множество элементов произвольной природы, которые связаны одной или несколькими операциями. Для изучения таких алгебраических образований разрабатываются специальные методы, свойственные дискретным системам. Долгое время теория различных абстрактных алгебраических систем развивалась изолированно от теории непрерывных групп. Применение теории групп Ли в алгебре во многом себя не оправдывало. Нужна была новая концепция, которая позволила бы распространить категорию непрерывности на алгебраические образования без серьезных ограничений класса этих образований и вместе с тем была бы достаточно естественной. Пригодилась общая теория топологических пространств, сформировавшаяся на базе абстрактной теории множеств.

Топологическая алгебра была создана как абстрактная алгебраическая система, элементы которой составляют топологическое пространство при условии, что ее основные операции непрерывны в рассматриваемой топологии. В нашей стране исследования по топологической алгебре были начаты по инициативе А.Н. Колмогорова. Ему принадлежат две работы, в которых важные классические разделы геометрии рассматриваются с точки зрения

топологии. Так, в работе 1930 г. дается обоснование геометрии постоянной кривизны с применением топологии и теории групп, а в работе 1932 г. разработана новая аксиоматика проективной геометрии, четко выделяющая ее топологическую структуру.

Построение проективной геометрии на такой аксиоматической основе стало возможным благодаря теореме, доказанной Понтрягиным в 1932 г. и являющейся первым глубоким результатом топологической алгебры. Согласно этой теореме, единственные связанные локально компактные тела со второй аксиомой счетности – это поле действительных чисел, поле комплексных чисел, тело кватернионов. Выдающиеся работы Понтрягина по топологическим телам и топологическим группам, выросшие из его исследований по комбинаторной топологии, в значительной мере определили дальнейшее развитие топологической алгебры.

В 1934 г. на II Всесоюзном математическом съезде Л.С. Понтрягин выступил с обзорным докладом «Структура непрерывных групп», где изложил важнейшие результаты по топологической алгебре. Заметную роль в развитии топологической алгебры сыграла монография Понтрягина «Непрерывные группы» (1938). Исключительно ясный язык, логическая стройность, удачное сочетание абстрактного материала с обилием конкретных примеров, идейное богатство, новизна и перспективность теории сделали ее одной из самых популярных математических книг.

В 1930–1940-е годы наблюдается увеличение интереса к изучению различных классов дискретных бесконечных групп. Из теории колец в теорию групп проникают понятия обрыва цепочек подгрупп и систем операторов. На базе сравнительно хорошо разработанной теории бесконечных абелевых групп начинает развиваться новое направление в общей теории групп. Оно основано на изучении некоммутативных групп, в том или ином отношении близких к абелевым и конечным группам.

А.И. Мальцев работал в это время в Иванове и занимался исследованиями во многих областях общей алгебры. Особое значение имела его работа «Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп», выполненная в 1941 г. В ней методы математической логики применены, впервые в мировой литературе, для доказательства алгебраических теорем. В 1942 г. им опубликованы работы о расщеплении алгебр и нильпотентных группах без кручения. В 1944–1945 гг. Мальцев исследовал полупростые подгруппы групп Ли и разрешимые алгебры Ли. Его труды по математической логике, теории групп, теории упорядоченных образований, общей теории алгебраических систем получили известность и признание во всем мире.

Заметное влияние на алгебраистов оказали статьи Мальцева «Об одном классе однородных пространств» (1949), «К общей теории алгебраических систем» (1954). Им создана теория свободных топологических алгебр, продолжающая исследования, начатые А.А. Марковым-мл.

В 1950-е годы Мальцев выполнил важные работы в теории универсальных алгебр – новой области для советских математиков. Исследования

Мальцева по универсальным алгебрам переросли в исследования по теории моделей – ветви математики, находящейся на стыке алгебры и логики. После организации Сибирского отделения Академии наук и переезда в Новосибирск Мальцевым организованы коллективные исследования по теории моделей, конструктивной алгебре и алгебре логики.

Геометрией теории Галуа в 40-е годы XX в. занимались Б.Н. Делоне и Д.К. Фаддеев. Полностью теория изложена ими в работе 1944 г. «Исследования по геометрии теории Галуа». В это же время Д.К. Фаддеевым была создана теория гомологий в группах. Развивалась теория колец как ассоциативных, так и неассоциативных.

После войны в СССР вновь началось бурное развитие алгебры, связанное с расширением тематики и появлением новых алгебраических центров. В 1940-е годы дальнейшее развитие получили исследования по теории бесконечных групп. Этому способствовал выход в 1944 г. монографии Куроша «Теория групп», получившей позднее, особенно после выхода в свет второго издания (1953), широкую международную известность.

В 1950-е годы в нашей стране стали проводиться исследования во всех разделах алгебры. В теории групп новыми направлениями явились созданная Д.К. Фаддеевым теория гомологий в группах, теория унитарных представлений групп (И.М. Гельфанд), теория алгоритмов (А.А. Марков-мл.), теория ассоциативных систем (Е.С. Ляпин).

В московской школе общей алгебры под руководством Куроша особенно интенсивно развивалась теория колец. Но в Москве в 1950-е годы сложились и другие коллективы алгебраистов. Весьма важную работу о неразрешимости теоретико-групповой проблемы тождества опубликовал в 1955 г. П.С. Новиков. Шафаревичу принадлежит цикл работ, посвященных задаче погружения и обратной задаче теории Галуа. В 1954 г. он решил обратную задачу теории Галуа для разрешимых групп. Во второй половине 1950-х годов его научные интересы в значительной мере сместились в сторону алгебраической геометрии и связанных с ней областей математики. Возрождение интереса к алгебраической геометрии за рубежом произошло в 1940-е годы, причем переплетение алгебраической геометрии, алгебраической топологии, гомологической алгебры и теории аналитических функций многих переменных привело к возникновению новой области математики.

В.М. Глушков, занимавшийся исследованиями в области теории групп, в середине 1950-х годов переключился на топологическую алгебру и построил содержательную теорию локально нильпотентных, локально бикомпактных топологических групп.

В 1952 г. была решена пятая проблема Гильберта, штурм которой был начат Понтрягиным и Нейманом. Ее в общем виде решили американские математики Э. Глисон, Д. Монтгомери и Л. Циппин. В ходе ее решения, а также в результате дальнейших усовершенствований развитых ими методов получены важные результаты о строении локально бикомпактных групп. Топологическое и алгебраическое строение произвольных локально бикомпактных групп в целом составляло предмет многих исследований конца 50-х – начала 60-х годов XX в.

Д.А. Граве

Граве Дмитрий Александрович родился 25 августа 1863 г. в городе Кириллове Новгородской губернии в семье уездного предводителя дворянства. После смерти отца в 1871 г. семья переехала в Петербург. В 1881 г. Граве окончил с золотой медалью частную гимназию и поступил на физико-математический факультет Петербургского университета.

После окончания университета в 1885 г. Граве был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Магистерскую диссертацию на тему «Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка» он защитил в 1889 г. и начал работать приват-доцентом в университете и преподавателем Института инженеров путей сообщения.

В 1893 г. Граве издал «Курс аналитической геометрии», а в 1892–1894 гг. в «Энциклопедическом словаре» Брокгауза и Ефрона были напечатаны статьи Граве по математике. Его докторская диссертация «Об основных задачах математической теории построения географических карт», защищенная в 1896 г., внесла существенный вклад в развитие дифференциальной геометрии. В ней Граве доказал теорему, сформулированную Чебышёвым в 1853 г., о том, что наиболее выгодной проекцией для изображения земной поверхности является проекция, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину.

В 1899 г. Граве был утвержден профессором Харьковского университета, а в начале 1902 г. переехал в Киев, где проработал почти 40 лет. С 1907 г. научные интересы Граве сосредотачиваются на новых направлениях алгебры и теории чисел. Первой монографией на русском языке, посвященной теории групп, была работа Граве «Элементы алгебраического анализа», вышедшая в 1908 г. Тесно связаны с его алгебраическими работами исследования по теории чисел. В 1909 г. вышел «Элементарный курс теории чисел», затем другие работы по алгебре и теории чисел. Следует отметить «Арифметическую теорию алгебраических величин» (1910) и «Теорию идеалов» (1913), составивших двухтомник. Работы Граве по спецкурсам включают введение в анализ, теорию эллиптических функций, различные вопросы страхования. Особенно увлекательна его «Энциклопедия математики», в которой популярно, живо и связно изложены основные положения, цели и методы математических исследований.

С начала 1910 г. до 1925 г. Граве читал в Киевском коммерческом институте для студентов страхового подотдела общий курс математики, теорию вероятностей, страховую математику и теорию пенсионных касс.

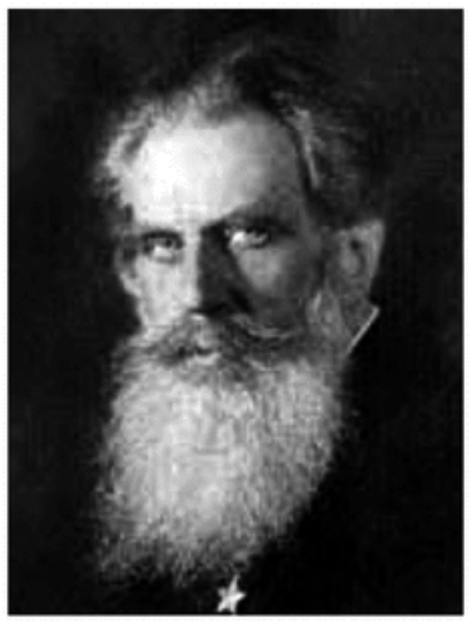
На организованном Граве семинаре рассматривались арифметическая теория квадратичных форм, теория идеалов, теория групп, теория Галуа, числа Бернулли, теория эллиптических функций, общая теория полей и теория чисел. Наибольшее внимание уделялось теории групп. В 1916 г. О.Ю. Шмидт опубликовал «Абстрактную теорию групп». Представители киевской математичес-

кой школы О.Ю. Шмидт, Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарёв стали основателями новых алгебраических школ в Москве, Ленинграде и Казани соответственно.

В 1920-е годы Граве заинтересовался вопросами механики и математической физики, в частности идеями А.М. Ляпунова. Позже Граве решил проблему о нахождении всех интегралов системы дифференциальных уравнений задачи трех тел, не зависящих от закона действия сил. В 1926 г. Киевский университет был преобразован в Киевский институт народного образования. Граве руководил научно-исследовательской кафедрой математики и вел семинар по прикладной математике. В 1929 г. его и Д.Ф. Егорова избрали почетными академиками АН СССР. В 1930-е годы Граве возглавлял Комиссию прикладной математики, руководившую исследованиями в области математики. В 1933 г. был основан Институт математики АН УССР, первым директором которого был Дмитрий Александрович Граве.

Скончался Д.А. Граве в Киеве 19 декабря 1939 г.

О.Ю. Шмидт



Шмидт Отто Юльевич родился 30 сентября 1891 г. в Могилеве в семье приказчика писчебумажного магазина. По отцовской линии его предками были немцы, по материнской – латыши. В 1900 г. Отто поступил в могилевскую школу. Вскоре семья переехала в Одессу, а затем в Киев. В 1909 г. после окончания гимназии в Киеве с золотой медалью Шмидт поступил в Киевский университет на физико-математический факультет. Профессор Д.А. Граве привлек его к научным исследованиям и на втором курсе Шмидт за решение одной алгебраической задачи был награжден золотой медалью факультета.

В студенческие годы Шмидт опубликовал три научные статьи. В работе «О разложении конечных групп в прямые неразложимые множители» он дал новое доказательство одной из основных теорем теории конечных абстрактных групп, незадолго до этого доказанной немецким математиком Р. Ремаком. Новыми упрощенными доказательствами этой теоремы Шмидт положил начало дальнейшим исследованиям существования однозначности прямых разложений. К студенческим работам относится также обширный мемуар Шмидта «Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа». Рассматриваемая тема непосредственно примыкала к теории Галуа, хотя основная часть работы относилась к теории групп подстановок.

После окончания университета в 1913 г. Шмидт был оставлен для подготовки к профессорскому званию. В 1916 г. он получил степень магистра, был утвержден в должности приват-доцента и опубликовал книгу «Абстрактная теория групп». Работы по теории групп в то время были представлены лишь небольшим числом монографий зарубежных авторов. Шмидт во многом упростил и сделал более прозрачными доказательства основных теорем. В книгу, отличавшуюся строгостью и доступностью изложения

материала, были включены последние результаты о прямых разложениях. «Абстрактная теория групп» многие годы была настольной книгой советских алгебраистов.

В 1918 г. профессор Шмидт вступил в партию большевиков и сразу был привлечен к активной политической, общественной и организационной деятельности последовательно в Народных комиссариатах продовольствия, финансов и просвещения. Он ввел в обиход слово «аспирант». В 1921–1922 гг. он работал в Наркомфине и руководил Институтом экономических исследований, включившись в работу по теоретическому обоснованию нэпа. В 1921–1924 гг. Шмидт руководил Госиздатом. Он был инициатором издания и главным редактором Большой советской энциклопедии.

В 1924 г. Шмидт был отправлен в Австрию для лечения туберкулеза. Там он увлекся альпинизмом. В 1928 г. Шмидт возглавил экспедицию по изучению ледников Памира, а позже возглавил всю работу по изучению и покорению льдов Арктики. Общественную работу он совмещал с чтением лекций в Московском университете, Педагогическом институте, Коммунистической академии и Московском лесотехническом институте. В 1929 г. он стал профессором Московского университета.

На открытии I Всесоюзного математического съезда в Харькове в 1930 г. Отто Юльевич выступил с докладом «Роль математики в строительстве социализма». Шмидт был главным редактором единственного в 1930-е годы центрального математического журнала «Математический сборник». Весной 1930 г. в Московском университете начал работать организованный Шмидтом семинар по теории групп. Позднее семинар стал центром, объединившим почти всех московских алгебраистов, работавших в области общей алгебры.

В 1929–1930 гг. Шмидт на ледоколе «Георгий Седов» осваивал Северный морской путь и организовывал научно-исследовательские станции на побережье Северного Ледовитого океана. В 1930 г. Шмидт стал директором Арктического института. В 1932 г. на ледокольном пароходе «Сибиряков» он прошел за два месяца и четыре дня от Архангельска до Владивостока. В 1934 г. вторая попытка покорения северных морей на ледоколе «Челюскин» закончилась гибелью судна. Челюскинцев спасли полярные летчики. В 1935 г. Шмидт стал действительным членом АН СССР. В 1936 г. он провел по Северному морскому пути (на ледоколе «Литке») за одну навигацию военные корабли, не приспособленные для плавания во льдах. В 1937 г. Шмидт руководил операцией по высадке папанинцев на Северный полюс. В 1938 г. он стал Героем Советского Союза и директором Института теоретической геофизики АН СССР.

В 1944 г. Шмидт выдвинул новую космогоническую теорию о происхождении Солнечной системы, в соответствии с которой Земля и планеты никогда не были раскаленными газовыми телами, а образовались из холодных, твердых частиц вещества.

В 1939–1942 гг. Шмидт был вице-президентом АН СССР. Его научные интересы были чрезвычайно разносторонними: математика, астрономия, геофизика, география. Организационная работа Шмидта не прерывала его

занятий математикой. Он написал несколько работ по абстрактной теории групп. Исследования по современной математике в Московском университете начались в 1920-е годы именно с приходом Шмидта. В 1928 г. вышла его работа о прямых разложениях групп, обладавших главным рядом. Это была первая работа советских математиков по теории бесконечных групп. В ней доказана знаменитая теорема Шмидта, называемая также теоремой Ремака – Шмидта или Крулля – Шмидта.

Шмидт был награжден многими орденами. Его именем названы: остров в Карском море, мыс на побережье Чукотского моря, Институт физики Земли РАН и т. д. В Российской академии наук учреждена премия имени О.Ю. Шмидта.

Умер Отто Юльевич 7 сентября 1954 г. в Москве от туберкулеза легких, которым страдал со студенческих лет.

Н.Г. Чеботарёв

Чеботарёв Николай Григорьевич родился 3 июня 1894 г. в городе Каменец-Подольск в Украине. Во время учебы в Киевском университете Чеботарёв принимал активное участие в семинаре Д.А. Граве, который привил своему ученику любовь к алгебре. Университет Чеботарёв окончил в 1916 г.

С 1921 г. Чеботарёв начал преподавательскую деятельность в Одесском институте народного образования (Одесском университете) и Политехническом институте. Основные научные работы этого периода посвящены исследованию вопросов современной алгебры и алгебраической теории чисел.

В 1922–1928 гг. Чеботарёв исследовал перенесение на целые трансцендентные функции критерия Борхарта вещественности корней полинома. Первое такое перенесение было сделано в 1914 г. Я.П. Громмером. Чеботарёв нашел новый, более простой, подход к решению этих вопросов и получил более полные результаты.

Одной из фундаментальных теорем теории распределения простых чисел является сформулированная в 1837 г. теорема Дирихле о прогрессиях, устанавливающая, что арифметическая прогрессия имеет бесконечно много простых чисел. Чеботарёву принадлежит обобщение этой теоремы, связанное с полями алгебраических чисел. В 1923 г. он доказал теорему о плотностях, обобщающую теорему Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии. Результаты Чеботарёва опубликованы в получившей всемирное признание статье «Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок». Эта работа сделала Чеботарёва одним из ведущих алгебраистов мира. Метод расширения с помощью полей деления круга, предложенный Чеботарёвым, нашел весьма важные применения в теории полей классов.

Методы, развитые Чеботарёвым в ходе работы над этой теоремой, позднее использовали Э. Артин при доказательстве общего закона взаимности

для абелевых расширений полей и К. Шевалле в исследованиях по теории полей классов.

В 1927 г. Чеботарёв защитил докторскую диссертацию. В том же году ему было присвоено звание профессора. В 1928 г. он перешел в Казанский университет. Члены казанской алгебраической школы под руководством Чеботарёва разрабатывали теорию полей, теорию Галуа, теорию групп Ли, теорию алгебр Ли, теорию продолжаемых полиномов и проблемы резольвент.

В 1929 г. Чеботарёв был избран членом-корреспондентом АН СССР. Он принимал самое активное участие в организации в 1934 г. при Казанском университете Научно-исследовательского института математики и механики и был его первым руководителем. После смерти Чеботарёва институт стал носить его имя.

На I Всесоюзном съезде математиков в 1930 г. Чеботарёв прочитал доклад «Современное состояние теории алгебраических чисел», а на II Всесоюзном математическом съезде – доклад «Некоторые проблемы современной теории Галуа». Доклад о развитии идей Галуа Чеботарёв прочитал и в 1932 г. на Международном математическом конгрессе в Цюрихе.

С начала 1930-х годов Чеботарёв вновь и вновь возвращался к одному важному циклу проблем теории Галуа – проблемам Гильберта – Клейна и проблеме резольвент. Эти проблемы возникают естественным образом как обобщение проблемы разрешимости алгебраических уравнений с одним неизвестным в радикалах. Руффини и Абель показали, что общее уравнение степени выше четвертой в радикалах неразрешимо. Для произвольных уравнений Галуа показал, что уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда группа Галуа этого уравнения разрешима. Чеботарёв предложил два новых подхода к данной проблеме. Один сводится к теории непрерывных групп, другой – к алгебраической геометрии. К этому циклу относится несколько важных его работ, отмеченных в 1948 г. Государственной премией.

В 1930-е годы опубликована двухтомная монография Чеботарёва «Основы теории Галуа». «Теория алгебраических функций» Чеботарёва, которая вышла после его смерти, посвящена теории полей.

Во время войны Чеботарёв в Казани исследовал проблему Рауса – Гурвица, связанную с вопросами устойчивости движения и поэтому имевшую важное практическое, в частности оборонное, значение. Им проведено исследование задачи Гурвица для различных классов целых функций. В работах Чеботарёва и его учеников в 1941–1946 гг. разработаны эффективные методы решения проблемы Гурвица для квазиполиномов.

Чеботарёв существенно уточнил результаты Минковского о разложении простых рациональных чисел в произведение идеалов в полях алгебраических чисел, нормальных над полем рациональных чисел.

Ряд исследований Чеботарёва посвящен дифференциальной геометрии. Он был одним из первых советских ученых, интенсивно исследовавших теорию групп Ли. Софус Ли рассматривал поверхности переноса, т. е. поверхности, образованные параллельным перенесением кривой, когда одна из ее точек описывает другую кривую. Он доказал, что у таких поверхностей касательные к кривым переноса всех четырех семейств пересекают бесконечно

удаленную плоскость по алгебраической кривой четвертого порядка, а координаты поверхности выражаются посредством абелевых интегралов. Чеботарёв обобщил теорему Ли на n-мерное пространство, а также понятия поверхности переноса, в том числе на неевклидовы пространства.

До последних дней жизни Чеботарёв руководил Казанским математическим обществом. Известный математик Б.Л. Лаптев вспоминал: «Н.Г. Чеботарёв… был исключительно прост и общителен… Со своими слушателями и учениками он быстро устанавливал добрые и простые отношения, основанные на принципе равенства, вовлекал их в вопросы, которые сам разрабатывал. В живых, непринужденных беседах при обсуждении самых разнообразных математических проблем его собеседники получали импульсы к творческой работе. Его влияние испытали на себе почти все казанские математики» [40].

Скончался Чеботарёв 2 июля 1947 г. в Москве.

А.И. Мальцев

Мальцев Анатолий Иванович родился 27 ноября 1909 г. в поселке Мишеронский Московской области в семье стекловара Мишеронского стекольного завода. В 1910 г. ввиду состояния здоровья отца семья переехала в город Боржоми. После окончания заводской четырехлетней школы Анатолий в 1922–1925 гг. учился в Минераловодском педагогическом техникуме. Он увлекался математикой и игрой на скрипке. Три года Анатолий был солистом-скрипачом в симфоническом оркестре клуба железнодорожников в Минеральных Водах.

В 1925 г. Анатолий Иванович поступил на физико-математический факультет Московского университета. После окончания университета по распределению работал ассистентом кафедры математики Ивановского энергетического института. В 1932 г. Мальцеву не запланировали нагрузку на очередной учебный год, и он временно работал на рабфаке в пединституте. С 1933 до 1960 г. Анатолий Иванович работал с полной нагрузкой в Ивановском педагогическом институте. В 1934–1937 гг. Мальцев учился в аспирантуре, его научным руководителем был А.Н. Колмогоров. Во время летних отпусков он с С.М. Никольским, А.Н. Колмогоровым и П.С. Александровым совершал весельные путешествия по Волге.

В 1937 г. Мальцев защитил кандидатскую диссертацию на тему «Абелевы группы конечного ранга без кручения». Предложение считать диссертацию докторской Колмогоров отклонил, чтобы Мальцев не потерял стимула к дальнейшим исследованиям. В 1939 г. Мальцев поступил в докторантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1941 г. ему присвоена ученая степень доктора физико-математических наук после защиты диссертации на тему «Структура изоморфно представимых алгебраических полей». С Математическим институтом Мальцев во время войны находился в эвакуации в Казани. В 1942 г. он получил звание профессора по кафедре «Алгебра и геометрия» Ивановского государственного педагогического

института и должность старшего научного сотрудника Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

В 1946 г. Мальцев был награжден Государственной премией, в 1953 г. его избрали членом-корреспондентом АН СССР. В 1958 г. М.А. Лаврентьев пригласил Мальцева перейти работать в Сибирское отделение АН СССР. Мальцев принял приглашение, был избран действительным членом Академии наук и переехал в Новосибирск. Там он развил бурную научную и организационную деятельность, возглавил отдел алгебры Института математики Сибирского отделения АН СССР, а также кафедру алгебры и математической логики Новосибирского государственного университета. Им создана новосибирская школа математической логики и теории моделей. Проблематика теории моделей была сформулирована А.И. Мальцевым и польско-американским ученым А. Тарским. Происходило своеобразное соревнование школы Мальцева с коллективом, возглавляемым Тарским. Часто одни и те же результаты получали одновременно в Новосибирске и США. Работы, обсуждавшиеся на семинаре А.И. Мальцева, публиковались в организованном им в 1963 г. журнале «Алгебра и логика». Он также основал «Сибирский математический журнал» и являлся его главным редактором.

В 1961 г. Мальцев избран членом Президиума Сибирского отделения Академии наук СССР. В 1964 г. он стал лауреатом Ленинской премии за цикл работ по приложению математической логики к алгебре и теории моделей.

7 июля 1967 г. после напряженной работы на международной конференции А.И. Мальцев скоропостижно скончался.

И.Р. Шафаревич

Шафаревич Игорь Ростиславович родился 3 июня 1923 г. в Житомире. Его отец – выпускник Московского университета, преподаватель теоретической механики, мать – филолог по образованию, бóльшую часть времени не работала.

Математикой Шафаревич заинтересовался не сразу. В школе он увлекался историей, а по математике имел довольно плохие оценки. Ему было неловко перед учителями и товарищами, поэтому он решил заниматься математикой самостоятельно и незаметно для себя увлекся ею. Особенно по душе школьнику пришлась математическая логика.

Шафаревич обладал исключительной памятью. Он завершил изучение школьного курса математики в восьмом классе и в 14 лет поступил на заочное отделение Индустриального института, где за полгода сдал на «отлично» все экзамены по курсу высшей математики. Его исключительной одаренностью заинтересовались профессора МГУ. Член-корреспондент АН СССР профессор Б.Н. Делоне стал научным руководителем Игоря Шафаревича.

Девятиклассником, Игорь вел научные изыскания в области теории чисел и современной алгебры. Он экстерном сдал экзамены по математике за

весь курс университета. После окончания школы Шафаревич был принят сразу на последний курс Московского университета, который окончил в 1940 г. В 19 лет он стал кандидатом физико-математических наук, еще через четыре года – доктором физико-математических наук. С 1943 г. Шафаревич преподавал математику в Московском университете, с 1946 г. – работал в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР, где с 1960 г. заведовал отделом алгебры.

В 1943 г. Шафаревич исследовал вопрос о нормированиях топологических полей, ко второй половине 1940-х годов относятся его работы по теории полей и теории Галуа. Занявшись алгебраической теорией чисел, он решил две важные проблемы. Одну из них два века назад сформулировал Эйлер. В 1772 г. Эйлер установил «квадратичный закон взаимности» и в 1783 г. опубликовал его без доказательства. В 1785 г. независимо от Эйлера этот закон был опубликован Лежандром, который дал неполное доказательство. Полное доказательство «квадратичного закона взаимности» предложил Гаусс. Два доказательства были им опубликованы в 1801 г. Всего Гауссом найдено семь таких доказательств.

Заслуга построения основ теории взаимности принадлежит Гильберту, однако построение общей теории им не было завершено. В формулировке 9-й проблемы на II Международном конгрессе математиков он выразил надежду, что ее решение будет получено именно по пути развития его теории. В 1948 г. 9-я проблема Гильберта была полностью решена 25-летним Шафаревичем, ее решение было опубликовано в работах 1948–1950 гг. под названием «Общий закон взаимности».

Другая проблема была связана с обратной задачей Галуа для разрешимых групп. Эту задачу Шафаревич решил в 1952 г. Во второй половине 1950-х годов его научные интересы в значительной мере сдвинулись в сторону алгебраической геометрии и связанных с ней областей математики. Возрождение интереса к алгебраической геометрии произошло за рубежом в 1940-е годы, причем переплетение алгебраической геометрии, алгебраической топологии, гомологической алгебры и теории аналитических функций многих переменных привело к созданию новой области математики. Шафаревич был первым среди советских алгебраистов, кто начал исследования в этой области, привлекая к ним и своих учеников. За эти исследования в 1959 г. Шафаревич был удостоен Ленинской премии.

В начале 60-х годов XX в. он занимался изучением эллиптических кривых над функциональными полями для неопределенных уравнений. На Международном математическом конгрессе в Стокгольме в 1962 г. выступал с часовым докладом «Поля алгебраических чисел».

В 1963 г. был принят новый устав АН СССР, в котором особо отмечается роль Академии в решении теоретических проблем науки. В связи с этим многие технические научно-исследовательские институты были переданы различным ведомствам и министерствам. В соответствии с этим уставом в Академии наук увеличивалось количество отделений, для руководства которыми создавались различные секции. В частности, было образовано Отделение математики. 5 июля 1963 г. Президиум АН СССР утвердил бюро

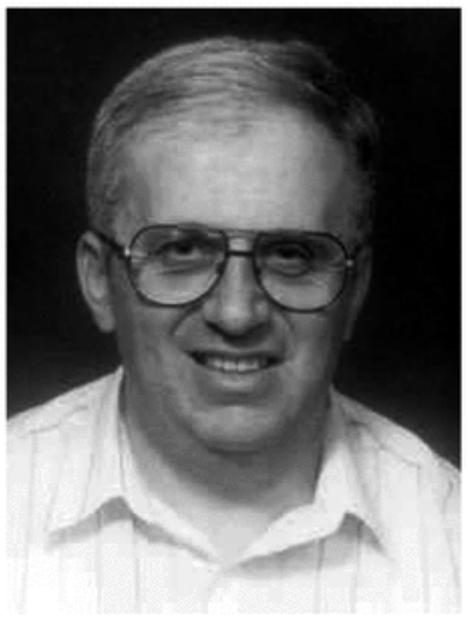
Отделения математики в следующем составе: академик-секретарь отделения Н.Н. Боголюбов, заместитель секретаря С.Н. Мергелян, члены бюро И.Н. Векуа, И.М. Виноградов, А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев, А.И. Мальцев, И.Г. Петровский, А.Д. Александров, Ю.В. Линник, А.А. Марков-мл., А.Н. Тихонов, И.Р. Шафаревич.

С 1960 г. Шафаревич заведовал отделом алгебры Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В соавторстве с З.И. Боревичем он в 1964 г. опубликовал книгу «Теория чисел».

В книге И.Р. Шафаревича «Алгебра», изданной в 1986 г., дан обзор современной алгебры и содержится обсуждение общих принципов, на которых алгебра основана. Книга близка взглядам Г. Вейля.

Кроме математических трудов, Шафаревичем опубликовано много работ, критикующих тоталитарный режим и затрагивающих многие другие проблемы современности, например, истории России и национального вопроса. Эти работы вызвали острую полемику в печати. В 1975 г. Шафаревич был уволен из университета и с тех пор не занимался преподавательской деятельностью. В 1991 г. И.Р. Шафаревича избрали действительным членом Академии наук СССР.

Г.А. Маргулис



Маргулис Григорий Александрович родился 24 февраля 1946 г. в Москве. В 1967 г. он окончил Московский университет, с 1969 г. работал в Институте проблем передачи информации АН СССР. Сначала научные интересы Маргулиса относились к эргодической теории, затем сместились в область теории групп Ли. Он исследовал теорию решеток в полупростых группах Ли.

Наиболее важным результатом, полученным Маргулисом, считается доказательство гипотезы Сельберга об арифметичности всех дискретных подгрупп в группах Ли большого ранга. Для решения этой алгебраической проблемы необходимо было воспользоваться методами теории вероятностей. Сам результат формулируется достаточно просто, но его доказательство потребовало виртуозного владения техникой теории алгебраических групп, использования мультипликативной эргодической теоремы, теории конформных отображений, комбинаторики, теории меры и многого другого.

За результаты, полученные в области теории чисел, в 1978 г. на Международном математическом конгрессе в Хельсинки Маргулису была вручена премия и медаль Филдса. Но в состав делегации конгресса его не включили.

Различные обобщения результатов работ Григория Александровича Маргулиса и ряд «красивых» следствий в теории дискретных групп и примыкающих к ней разделов математики, полученных в последние годы многими известными учеными, свидетельствуют о глубине и содержательности его теорем.

В последние годы Маргулис исследует свойства дискретных групп. Ему удалось опровергнуть гипотезу Милнора о строении групп движений,

действующих разрывно на аффинных пространствах. Милнор предполагал, что такие группы всегда разрешимы (полицикличны). Маргулис построил контрпример к этой гипотезе. Комбинируя идеи из теории дискретных групп и эргодической теории, он решил проблему Оппенгейма о представлении чисел индефинитными квадратичными формами – одну из давних проблем геометрической теории чисел.

В 2005 г. Маргулис, профессор Йельского университета (США), получил премию Вольфа.

Е.И. Зельманов

Зельманов Ефим Исаакович родился 7 сентября 1955 г. в Хабаровске. В 1977 г. он окончил Новосибирский университет. Кандидатскую диссертацию, посвященную исследованию неассоциативных алгебр, Зельманов защитил в Новосибирском университете в 1980 г. Он развивал теорию йордановых алгебр. Эти алгебры впервые исследовал в 1933 г. П. Йордан в работе, посвященной аксиоматизации основ квантовой механики. Позже такие алгебры нашли применение в математическом анализе, геометрии и алгебре.

Исследования Зельманова по йордановым алгебрам позволили распространить классическую теорию для конечномерных алгебр на бесконечномерные. В 1980 г. Зельманов стал младшим научным сотрудником Института математики АН СССР в Новосибирске. В 1983 г. он выступил с докладом на Международном конгрессе математиков в Варшаве. После защиты докторской диссертации в Ленинградском университете (1985) Зельманов стал старшим научным сотрудником, а в 1986 г. – ведущим научным сотрудником Института математики АН СССР в Новосибирске.

Зельманов в 1987 г. доказал, что условие нильпотентности алгебры Ли для случая конечной размерности справедливо и для бесконечномерного случая. В том же году он эмигрировал за границу. В 1990 г. Зельманов стал профессором Висконсинского университета в США.

В 1991 г. Ефим Исаакович решил ограниченную проблему Бернсайда. В 1902 г. английский математик Бернсайд, исследовавший теорию групп, поставил вопрос: «Будет ли локально конечной всякая периодическая группа?» Правильный ответ на этот вопрос стали называть неограниченной проблемой Бернсайда. Важный случай этой проблемы, когда порядки всех элементов группы ограничены в совокупности, стали называть ограниченной проблемой Бернсайда. Многие математики в 1950–1960-х годах получали отдельные результаты, но окончательно проблема была решена Зельмановым. В 1994 г. за эту работу он был награжден медалью Филдса на Международном математическом конгрессе в Цюрихе.

В 1994 г. Зельманов стал профессором Чикагского университета, в 1995 г. перешел в Йельский университет, а затем перевелся в Калифорнийский университет в Сан-Диего.

Глава 17

ГЕОМЕТРИЯ В РОССИИ В XX – НАЧАЛЕ XXI в.

В огромном саду геометрии каждый найдет букет себе по вкусу.

Д. Гильберт

Очерк развития современной геометрии

Современная геометрия является частью математики. Глубокие изменения, произошедшие в геометрии в XX столетии, предопределены ее интенсивным развитием в XIX в. К 1822 г. – ко времени выхода в свет известной книги Жана-Виктора Понселе – относится создание проективной геометрии как самостоятельной дисциплины. Таким образом была завершена работа, начатая еще в XVII в. Ж. Дезаргом, нуждавшаяся в развитии учения о перспективе и продолженная виднейшими геометрами – Б. Паскалем, Г. Монжем и другими. Как и геометрия Евклида, проективная геометрия строится на определенной системе аксиом.

Рассмотрение геометрических образов с точки зрения алгебры внесло в геометрию сначала мнимости, а позднее – идеи теории групп. Так же как и бесконечно удаленные элементы проективной геометрии, мнимости были введены в геометрию для того, чтобы придать максимально возможную общность ее теоремам и избежать рассмотрения исключений. Первым мнимости ввел в геометрию Ж.-В. Понселе в 1822 г. В дальнейшем его идеи были развиты М. Шалем и Ж.Г. Дарбу.

В 1826 г. Н.И. Лобачевский построил геометрию, в основу которой была положена система аксиом, отличающаяся от евклидовой только аксиомой о параллельных прямых. В результате появилась логически непротиворечивая геометрия, совершенно иная, чем геометрия Евклида. Другим важным событием в развитии геометрии стала идея Б. Римана. Он в 1854 г. сформулировал обобщенное понятие пространства как непрерывной совокупности любых однородных объектов или явлений и ввел пространства, измерение расстояний (метрика) в которых производится по некоторому заданному закону «бесконечно малыми шагами».

Идеи многомерной геометрии были отмечены еще в трудах Декарта, а развитие получили в работах Гамильтона (1843) и Грассмана (1844). Но лишь в конце XIX в. эти идеи были в полной мере оценены и разработаны. Благодаря работе Гельмгольца «О фактах, лежащих в основах геометрии» (1868) они приобрели важное значение для естествознания.

Аналогию между пространствами разных измерений нельзя проводить вслепую. Так, если среди двумерных поверхностей существуют ориентируемые

(двусторонние поверхности, например, сфера) и неориентируемые (односторонние, например, лист Мебиуса), то неориентируемых трехмерных поверхностей не существует. Лишь поверхности, имеющие четное число измерений, делятся на ориентируемые и неориентируемые. То, что невозможно в трехмерном пространстве, возможно в четырехмерном, к примеру вывернуть как перчатку замкнутую сферу, не проделав в ней дыры, завязать узел на нити, не имеющей с обеих сторон концов (или закрепленной на обоих концах), переплести два раздельных замкнутых кольца, не раскрывая ни одного из них.

В 1872 г. Ф. Клейном в Эрлангенской программе была поставлена задача систематизации геометрий. Основная идея этой программы заключается в том, что теория инвариантов группы пространственных преобразований определяет вид геометрии. Эта точка зрения благодаря работам самого Клейна, Софуса Ли и многих последователей завоевала всеобщее признание.

Евграф Степанович Фёдоров был известным геометром, выдающимся кристаллографом, минералогом и геологом. В своем капитальном труде «Этюды по аналитической кристаллографии» (1887) он связывает учение о кристаллах с определителями и проективной геометрией. Под общим названием «Начала анализа симметрии» объединена серия его работ, завершающаяся классическим трудом «Симметрия правильных систем фигур» (1890), в котором изложены выводы 230 пространственных групп симметрии (федоровских групп).

Фёдоровым открыт математический закон структуры. Наиболее важным его трудом по геометрии является монография «Новая геометрия как основа черчения» (1907), составленная по материалам лекций, прочитанных в Петербургском горном институте.

Ценнейший вклад в изучение структуры геометрических аксиом, их совместимости, необходимости, достаточности и независимости внес Д. Гильберт, который в «Основах геометрии» (1899) положил начало новому этапу – аксиоматическому методу в геометрии.

Гильберт довел аксиоматику до совершенства. Точки, прямые и плоскости он ввел как простые названия, отказавшись от какого-либо чувственного представления о них. Аксиомы геометрии Гильберт разбил на следующие группы:

– аксиомы сочетания, содержащие в своей формулировке слово «определять» (в значении «лежать на», «проходить через»);

– аксиомы расположения, содержащие в своей формулировке слово «между» (что означает предшествовать, следовать);

– аксиомы равенства, содержащие в своей формулировке слово «равно» (т. е. равенство отрезков, углов);

– аксиома параллельности (пятый постулат Евклида);

– аксиомы непрерывности – аксиома Архимеда и аксиома полноты, согласно которой точки, прямые и плоскости геометрии образуют систему понятий, которая не может быть расширена путем присовокупления новых вещей при сохранении всех указанных аксиом.

Современное понимание пространства как непрерывной совокупности однородных объектов обусловлено глубокой взаимосвязью геометрии с другими

областями математики. Если первоначально в геометрии изучались пространственные отношения и формы тел, причем рассматривалось только трехмерное пространство, то теперь понятие пространства расширилось. В настоящее время пространство понимается как множество, снабженное некоторой структурой, т. е. некоторыми отношениями между его элементами или подмножествами.

Изучение простейшей общей структуры, позволяющей говорить о непрерывности, привело к выделению из геометрии *топологии* – самостоятельного раздела математики. Исследования других геометрических структур привело к появлению новых разделов геометрии. Так, *алгебраическая геометрия* изучает алгебраические многообразия и связанные с ними алгебраические и арифметические проблемы, *функциональный анализ* – бесконечномерные пространства.

Внутри самой геометрии различают геометрию «в малом» и геометрию «в целом». Эти понятия возникли в немецкой математической литературе в начале XX в.

К геометрии «в малом» относится классическая дифференциальная геометрия. В ее основе лежит применение метода бесконечно малых к пространственным образам, т. е. рассмотрение бесконечно малых областей пространства. В бесконечно малом выявляются многие существенные свойства фигуры в целом.

В России школу дифференциальной геометрии создали в XIX в. профессор Дерптского университета Фердинанд Миндинг и его ученик Карл Михайлович Петерсон. Их исследования посвящены в значительной степени вопросам изгибания поверхностей, т. е. таким непрерывным деформациям поверхностей, при которых внутренняя геометрия все время остается неизменной. Работы Петерсона положили начало московской школе дифференциальной геометрии, представителями которой являются Б.К. Млодзиевский, Д.Ф. Егоров, С.П. Фиников, С.С. Бюшгенс, Г.Ф. Лаптев и другие.

Однако не все свойства геометрических образов, рассматриваемых как известное целое, могут быть выявлены в геометрии «в малом». Геометрия на поверхности кругового цилиндра ничем не отличается от геометрии на плоскости Евклида, если ограничиться одной ее частью, не обходя цилиндр вокруг. Но геометрия этой цилиндрической поверхности, взятой в целом, вовсе не похожа на евклидову геометрию хотя бы потому, что между двумя точками здесь будет существовать не одна, а бесконечное множество «прямых», которыми являются все винтовые линии.

Структурные свойства геометрических образов, взятых как единое целое, рассматривает геометрия «в целом», отличаясь своими методами от геометрии «в малом».

Геометрия «в целом» интенсивно развивалась в Ленинграде (школа А.Д. Александрова), Москве (школа Н.В. Ефимова), Харькове (школа А.В. Погорелова).

Ученик Б.Н. Делоне А.Д. Александров в своих исследованиях применил результаты смежных разделов математики и построил теорию общих выпуклых поверхностей, введя много новых понятий и разработав новые методы.

Например, изучая многообразия с выпуклой метрикой, он широко пользовался методом, который назвал методом склеивания.

А.Д. Александров показал, что метод склеивания может быть с успехом применен при решении различных экстремальных задач. Развитые им методы исследования выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве применимы в полном объеме к выпуклым поверхностям в пространствах постоянной кривизны – эллиптическом пространстве и пространстве Лобачевского.

Результаты, полученные А.Д. Александровым, развивались в работах его ученика А.В. Погорелова. Если А.Д. Александоров установил принципиальную возможность реализуемости абстрактно заданной метрики выпуклой поверхностью, то А.В. Погорелов полностью решил проблему однозначной определенности (поиск ответа на вопрос о числе реализаций) для выпуклых поверхностей, доказав соответствующие теоремы. Результаты перенесены им и на случай других пространств постоянной кривизны.

Важной для практических применений является проблема жесткости замкнутых выпуклых поверхностей. Математически она сводится к проблеме бесконечно малых изгибаний. Эта проблема решалась К. Либманом, В. Бляшке, А.Д. Александровым, А.В. Погореловым, И.Н. Векуа и другими.

Теория поверхностей отрицательной кривизны разрабатывалась Н.В. Ефимовым и его учениками.

Между математиками, занимающимися геометрией «в целом» и геометрией «в малом» в нашей стране, долгое время наблюдался раскол. Возможно, на это повлияла взаимная неприязнь А.Д. Александрова и С.П. Финикова, ученых разных школ и разных поколений. Этот конфликт отрицательно сказывался и на оценке работ, и на личных взаимоотношениях представителей двух «враждующих» школ.

С.П. Фиников

Фиников Сергей Павлович родился 15 ноября 1883 г. в Новгороде. В 1900 г. он окончил гимназию и поступил на математическое отделение Московского университета. Своим учителем Фиников считал Д.Ф. Егорова. После окончания университета в 1906 г. Фиников был оставлен Егоровым для подготовки к профессорскому званию и начал работать преподавателем математики. В 1911 г. в знак протеста против увольнения из-за студенческих беспорядков ректора и двух проректоров Фиников в числе многих преподавателей ушел из Московского университета. С 1912 г. он работал в Императорском техническом (ныне МГТУ им. Н.Э. Баумана) и Инженерном училищах, в 1917 г. вернулся в университет, а еще через год был избран профессором.

Исследования Финикова относят к классической дифференциальной геометрии. Его работы посвящены теории изгибания, теории конгруэнций, проективно-дифференциальной геометрии и другим вопросам.

Первый цикл работ Финикова относится к теории изгибаний на главном основании. Это понятие введено К.М. Петерсоном. При изометрическом соответствии двух поверхностей существует общая сопряженная ось (основание изгибания). Если три изометрические поверхности имеют общую сопряженную ось, то существует однопараметрическое множество таких поверхностей. Их общая сопряженная сеть называется главным основанием изгибания.

В магистерской диссертации Фиников впервые получил систему дифференциальных уравнений, определяющих все главные основания данной поверхности (если такие существуют), и применил их к отысканию всех главных оснований на поверхностях второго порядка, а также к отысканию поверхностей, несущих наибольшее – двупараметрическое – множество главных оснований. Такой поверхностью оказался геликоид.

Фиников посвятил цикл работ теории конгруэнций прямых. Он построил проективную геометрию расслаиваемых пар конгруэнций. Работы Финикова по проблеме расслаиваемости относятся к проективной дифференциальной геометрии, которая изучает дифференциально-геометрические свойства фигур, сохраняющиеся при проективных преобразованиях.

На I Всесоюзном съезде математиков в Харькове в июне 1930 г. Фиников выступил с докладом на тему «Теория прямоугольных конгруэнций в проективной дифференциальной геометрии».

В 1930 г. в Московском университете начались преследования Д.Ф. Егорова. Это коснулось и его ученика: С.П. Финикова исключили из Совета института математики и механики.

В 1935 г. Финикову было присвоено звание доктора физико-математических наук. Он разработал свой метод канонизации репера и независимых параметров, представляющий собой своеобразное развитие метода подвижного тетраэдра Дарбу – Картана. Метод Финикова изложен в его монографии «Проективно-дифференциальная геометрия» (1937), которая содержит проективно-дифференциальную теорию поверхностей и конгруэнций трехмерного пространства.

Фиников исследовал изгибание поверхности с сохранением кинематически сопряженной сети – изгибание на кинематически сопряженном основании – и описал их в монографии «Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи» (1937). До работ Лузина в дифференциальной геометрии это была наиболее значимая работа по данной тематике.

В дальнейшем Фиников широко применял в исследованиях по дифференциальной геометрии метод внешних форм и метод подвижного репера Э. Картана. В 1948 г. была опубликована монография Финикова «Метод внешних форм Э. Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных». Теоретические положения метода проиллюстрированы с помощью задач из самых разных разделов дифференциальной геометрии. Эта книга способствовала развитию применения метода внешних форм в дифференциально-геометрических исследованиях в Советском Союзе и за рубежом.

В 1950 г. Фиников опубликовал монографию «Теория конгруэнций», в 1956 г. – монографию «Теория пар конгруэнций». Обе эти книги являются базовыми для теории конгруэнций.

С 1953 г. Фиников руководил кафедрой геометрии Московского университета и семинаром по дифференциальной геометрии. Наряду с дифференциальной геометрией метрического пространства основным предметом исследований Финикова и его учеников являлись проективно-дифференциальная, афинная, конформная геометрия, иначе говоря, геометрия однородных пространств, т. е. пространств, обладающих фундаментальной группой. Для их работ характерно широкое применение метода внешних форм в сочетании с методом подвижного репера, а также его дальнейшее развитие до теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф. Лаптева.

Работы С.П. Финикова по теории поверхностей и теории прямолинейных конгруэнций отличают глубина проработанности вопроса, оригинальность и методологическая четкость. Большинство из этих работ опубликовано в ведущих академических изданиях Франции, Италии и изданиях АН СССР.

Семинар под руководством С.П. Финикова (а с 1964 г. – Г.Ф. Лаптева) по классической дифференциальной геометрии при МГУ стал в 1960–1970-е годы одним из ведущих центров по подготовке кандидатов и докторов наук, многие из которых стали впоследствии руководителями региональных геометрических школ. Фиников был влюблен в классическую дифференциальную геометрию, восхищался каждым новым результатом в этой области, поощрял в то же время перспективные исследования в области многомерной дифференциальной геометрии обобщенных пространств, которыми руководил его ближайший соратник Герман Федорович Лаптев.

Умер Сергей Павлович Фиников 27 февраля 1964 г. в Москве.

Б.Н. Делоне

Делоне Борис Николаевич родился 15 марта 1890 г. в Петербурге. Его прадед, племянник последнего коменданта Бастилии маркиза де Лоне, был врачом армии Наполеона, попавшим в плен. Женился прадед на помещице Смоленской губернии. Отец Бориса Николаевича, выпускник физико-математического факультета Московского университета, ученик Н.Е. Жуковского, был профессором механики. С 1900 г. он работал в Варшавском университете, в 1906–1928 гг. – в Киевском политехническом институте. В 1908 г. он организовал в Киеве первый в России воздухоплавательный кружок. Мать Бориса Николаевича – выпускница Смольного института. Среди его родственников следует отметить двоюродную сестру – героиню французского Сопротивления, католическую святую мать Марию.

В 12 лет Борис знал основы анализа и самостоятельно приступил к исследованиям по алгебре и теории чисел. В 14–15 лет он изготовил телескоп, для которого сам отшлифовал зеркало. С 13 до 23 лет Борис часто терял

сознание из-за головных болей, причиной которых врачи считали неправильный обмен веществ.

В 1908 г. Борис Делоне окончил в Киеве гимназию и поступил на физико-математический факультет Киевского университета. Он занимался в воздухоплавательном кружке отца, где лично сконструировал и собрал пять планеров. В 1910 г. им написано руководство по планеризму «Как построить дешевый и легкий планер и научиться летать на нем», изданное тиражом 50 000 экземпляров.

Уже на старших курсах университета научные интересы Делоне были сосредоточены на теории алгебраических чисел. За работу «О соотношении между теорией идеалов и теорией Галуа», выполненную в 1912 г., он был удостоен Большой золотой медали.

В 1913 г. Делоне окончил Киевский университет и был оставлен для подготовки к профессорскому званию. В 1913–1916 гг. он преподавал математику в университете, а в 1916–1922 гг. – в Киевском политехническом институте. В первой опубликованной работе по математике «К определению алгебраической области при помощи сравнений (с приложением к абелевым уравнениям)» ему удалось дать новое доказательство теоремы Кронекера – Вебера о рациональном выражении через некоторый корень из единицы всякого корня абелевого уравнения, степень которого – простое число. Дальнейших успехов он добился в области решения неопределенных кубических уравнений вида $ax^3 + y^3 = 1$ и более сложных.

В годы Гражданской войны отец Делоне поддерживал красных, а мать – белых. Из-за этого при смене власти в Киеве возникали различные неординарные ситуации, связанные с их родственниками.

В 1922 г. по приглашению академиков А.А. Маркова и Я.В. Успенского Делоне переехал из Киева в Ленинград. В Ленинградском университете он продолжил исследования в области теории чисел и заинтересовался геометрией. Его устремления сосредоточились на вопросах, находившихся на стыке теории числовых полей и теории диофантовых уравнений. Он развивал идеи петербургской школы теории чисел методами, используемыми в геометрии чисел. Работы Делоне относились к геометрии многогранников, геометрии чисел и кристаллографии. В теории многогранников он продолжил исследования Фёдорова и Вороного по теории правильного деления пространства и предложил метод пустого шара и метод слоевого построения. Он решил трудную задачу о нахождении всех правильных разбиений трехмерного и четырехмерного пространств. В работе 1926 г. по геометрической кристаллографии им решена важная для рентгеноскопического анализа кристаллов задача об определении плоской кристаллической решетки по расстояниям между ее точками. Им открыт алгоритм решения задачи о правильной установке кристалла.

В 1926 г. Делоне стал профессором, а в 1929 г. – членом-корреспондентом Академии наук. В 1932 г., не прекращая преподавательской деятельности в Ленинградском университете, где он заведовал кафедрой алгебры и теории чисел, Делоне стал сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

После переезда Академии наук из Ленинграда в Москву в 1935 г. Делоне обосновался в столице и был назначен заведующим кафедрой высшей

геометрии Московского университета. Делоне считался блестящим преподавателем. В каждом из продуманных и тщательно подготовленных курсов лекций он шел своим, оригинальным, путем. Лекции по аналитической геометрии легли в основу написанного им в соавторстве с Д.А. Райковым учебника «Аналитическая геометрия».

В годы войны Делоне вместе с Математическим институтом был эвакуирован в Казань. В 1942 г. он назначен заведующим отделом алгебры Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В послевоенные годы он занимался геометрией чисел и разрабатывал метод разделенных параллелограммов.

Борис Николаевич Делоне является одним из основателей альпинизма в нашей стране. Им покорены многие вершины Альп, Кавказа, Алтая, Тянь-Шаня. Он был одним из первых спортсменов, получивших установленное в 1934 г. звание мастера советского альпинизма. Позже Делоне стал заслуженным мастером спорта по альпинизму. В 1938 г. он написал книгу «Вершины Западного Кавказа». Его именем названа третья по высоте вершина Алтая.

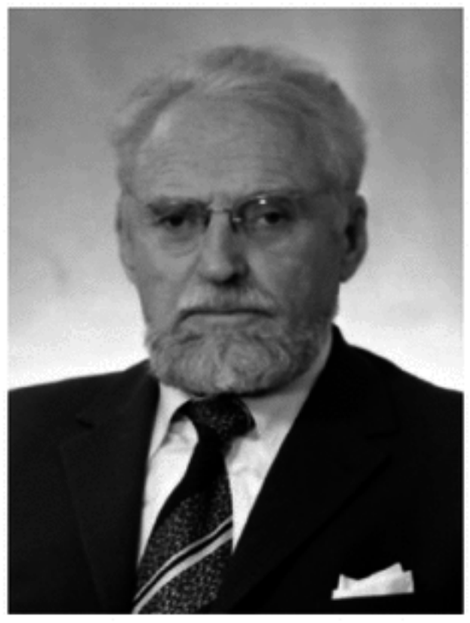
Интересы Делоне были очень разнообразны. Много лет Борис Николаевич занимался аэрофотосъемкой и был членом Ученого совета Института аэрофотосъемки. Много времени он уделял организации и проведению математических олимпиад разного уровня.

В 1960-е годы Делоне вернулся к теории разбиений и получил много интересных результатов. В 1961 г. он доказал фундаментальную теорему теории стереоэдров, рассмотрел задачи, связывающие геометрическую кристаллографию с топологией.

Делоне со своими учениками обобщил для любого n полученные им ранее для $n = 3$, $n = 4$ алгоритмы построения наименее плотных решетчатых покрытий n-мерного евклидова пространства равными шарами. Среди учеников Бориса Николаевича следует отметить А.Д. Александрова, Н.Г. Чеботарёва и И.Р. Шафаревича.

Умер Б.Н. Делоне 17 июля 1980 г. в Москве.

А.Д. Александров



Александров Александр Данилович родился 22 июля 1912 г. в селе Волынь Рязанской губернии в семье школьных учителей. В 1929 г. он поступил на физический факультет Ленинградского университета, где познакомился с Б.Н. Делоне, который увлек его математикой и альпинизмом. Одновременно с учебой в университете Александров с декабря 1930 г. по октябрь 1932 г. работал в Государственном оптическом институте научно-техническим сотрудником, а затем – научным сотрудником в Физическом институте ЛГУ. В 1933 г. он окончил университет и начал работать ассистентом на математико-механическом факультете ЛГУ. В 1935 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1937 г. – стал доктором физико-математических наук и профессором Ленинградского университета.

Основным направлением научной деятельности А.Д. Александрова была геометрия. Его первые научные работы посвящены некоторым вопросам теоретической физики и геометрии. В работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел», опубликованной в 1937 г., он заложил новое направление по внедрению геометрических методов в теорию дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее важные научные достижения Александрова относятся к геометрии поверхностей: он открыл методы изучения метрических свойств фигур, благодаря которым появился новый объект исследования – нерегулярные метрические многообразия, более общие, нежели римановы пространства. Эти методы существенно расширили область геометрических исследований, способствовали решению ряда классических проблем теории поверхностей и нашли важное применение в теории дифференциальных уравнений и теории упругих оболочек.

В 1942 г. Александрову была присуждена Государственная премия, а в 1946 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР. Он создал большую научную школу по геометрии «в целом». Усилиями Минковского, Гильберта, Г. Вейля и других ученых в начале XX в. были получены отдельные результаты в этой области, содержащие формулировки многих важных задач. А.Д. Александров получил основополагающие результаты, развив теорию смешанных объемов, созданную Г. Минковским. В его исследованиях развита теория меры в абстрактных топологических пространствах и геометрическая теория слабой сходимости. Это открыло путь к введению интегральных характеристик в геометрии и использованию слабой сходимости в теории обычных и знакопеременных мер. Александров стал основоположником применения функционально-аналитических методов в геометрии. Им создан специальный метод, позволяющий проверять, что некоторое отображение одного многообразия в другое той же размерности оказывается отображением на все многообразие. Этот метод позволил ему доказать целую серию общих теорем об условиях, определяющих существование и единственность выпуклого многогранника с теми или иными данными.

Основным средством исследования А.Д. Александрова являлось приближение общей выпуклой поверхности выпуклыми многогранниками и приближение выпуклой метрики (внутренней метрики многообразия с неотрицательной кривизной) многогранными метриками.

Выдающиеся результаты получены Александровым в области внутренней геометрии, где им предложена новая концепция пространства. Используя приближения многогранниками, он решил без требований гладкости проблему Г. Вейля о реализуемости в виде замкнутой выпуклой поверхности каждой заданной на сфере метрики неотрицательной кривизны. Александров развил теорию обобщенных решений для геометрии, на несколько десятилетий опередив специалистов в области анализа и дифференциальных уравнений. Для многомерных метрических пространств, в которых точки соединимы кратчайшими линиями, Александров ввел общее понятие угла между кривыми. Им доказаны теоремы о сравнении углов малых треугольников и введены понятия пространств определенной кривизны. Теперь их называют пространствами Александрова. Именно с теоремы Александрова

о сравнении углов началось бурное развитие современной римановой геометрии «в целом» [20].

Научные результаты Александрова охватили многие вопросы, включая геометрию выпуклых тел, теорию меры и математические основания теории относительности. Он доказал ряд фундаментальных теорем о выпуклых многогранниках, стоящих в одном ряду с теоремами Эйлера и Коши. В частности, в связи с решением проблемы Г. Вейля А.Д. Александров разработал новый метод доказательства теорем существования. Результаты этого цикла работ поставили имя Александрова в один ряд с именами Евклида и Коши.

Одно из основных достижений Александрова в геометрии – создание теории двумерных многообразий ограниченной кривизны. В этой теории и теории пространств с односторонними ограничениями на кривизну дано развитие геометрической концепции пространства в продолжение традиции, заложенной Лобачевским и продолженной Гауссом, Риманом, Пуанкаре и Картаном. Александровым разработан метод разрезания и склеивания, который оказался весьма эффективным, в частности в теории изгибания выпуклых поверхностей. Используя этот метод, он получил решение целого ряда экстремальных задач для многообразий ограниченной кривизны.

Исследования Александрова по теории выпуклых тел привели к рассмотрению общей теории аддитивных функций множеств. Он осуществил глубокое исследование слабой сходимости функций множеств. Его результаты в этой области включают в руководства по функциональному анализу и находят неожиданные применения в геометрии и теории вероятностей.

Александров является одним из авторов теории нерегулярных кривых, в которой нашли продолжение и развитие идеи классиков геометрии – Жордана, Пеано и других.

Исследования Александрова по теоремам существования и единственности в теории выпуклых тел стали основой для работ по дифференциальным уравнениям. В этих трудах возникает понятие обобщенного решения уравнения в частных производных, в том числе для случая трудных нелинейных задач. А.Д. Александров заложил основы геометрической теории уравнений типа Монжа – Ампера. Он развил геометрический подход к принципу максимума в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Его исследования по этим вопросам на много лет опередили аналогичные исследования других специалистов. Ему принадлежат работы также в области топологии, теории меры, функционального анализа, теории функций действительной переменной, математической кристаллографии и т. д.

А.Д. Александров решил вопрос о линейности отображений, сохраняющих конусы в пространстве специальной теории относительности. Результаты, полученные им, переоткрывались физиками разных стран спустя десятилетия. Эти результаты дали начало исследованиям по хроногеометрии.

В 1951 г. А.Д. Александров получил премию им. Н.И. Лобачевского. С 1952 по 1964 г. он был ректором Ленинградского (ныне Санкт-Петербургского) государственного университета. Начинал Александров в трудное послевоенное время, но сумел мобилизовать оставшиеся в университете силы.

Он привлек специалистов из других организаций и вузов, всячески способствовал росту молодых кадров.

Будучи ректором, А.Д. Александров поддержал университетских биологов в борьбе за генетику. Преподавание генетики в Ленинградском университете началось уже в 1950-е годы, тогда как в других университетах генетика была восстановлена в правах лишь в 1965 г. Студенты-биологи, отчисленные из других университетов за попытки «нелегального» изучения этой науки, получали возможность продолжить образование в ЛГУ. В октябре 1990 г. за особый вклад в сохранение и развитие генетики и селекции А.Д. Александров, единственный математик среди группы биологов, был удостоен ордена Трудового Красного Знамени. Его действенную поддержку в период гонений получили также социология и математическая экономика.

В 1964 г. Александров был избран действительным членом СО АН СССР, и по приглашению Лаврентьева переехал с семьей в Новосибирск. 23 года Александр Данилович работал заведующим отделом обобщенной римановой геометрии в Институте математики Сибирского отделения АН СССР и преподавал в Новосибирском университете. В Сибири он перенес клещевой энцефалит. Александровым была создана большая и разветвленная научная школа. Среди его учеников десятки докторов и кандидатов наук.

Математическими работами А.Д. Александрова при всей их глубине и оригинальности не ограничивается его талант. Ученого всегда интересовали философские вопросы математики и теоретической физики. Ему принадлежат статьи по философским проблемам теории относительности и квантовой механики. Философские труды и устные выступления Александра Даниловича затрагивают широчайший круг вопросов. Не случайно преподаватели гуманитарных дисциплин на факультетах точных наук часто рекомендуют студентам читать его общенаучные сочинения. Его размышления о сущности математики были изложены в 1970 г. в статье «Математика и диалектика».

А.Д. Александров – автор около 300 статей, многих монографий и учебников. Всемирную известность получили его монографии «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» (1948), «Выпуклые многогранники» (1950), «Двумерные многообразия ограниченной кривизны» (1962), выполненная в соавторстве с В.А. Залгаллером, «Основания геометрии» (1987) и др.

Александр Данилович участвовал в реформе школьного образования – создании новых учебников по геометрии. Он привлек к этой работе А.Л. Вернера и опытного педагога В.И. Рыжика. Вместе они написали два пробных учебника по стереометрии, а затем в 1983 г. – учебник по геометрии для 9–10 классов, рассчитанный на углубленное изучение математики. С 1981 г. Александр Данилович начал разрабатывать новую структуру учебного курса планиметрии. В 1984–1986 гг. вышли написанные по этому курсу совместно с А.Л. Вернером и В.И. Рыжиком пробные учебники для 6–8 классов. Была разработана серия учебников как для обычных школ, так и для школ с углубленным изучением математики.

А.Д. Александров активно боролся против насаждения бурбакистского стиля преподавания геометрии в школе. Его выступления на Всесоюзной

методической конференции по преподаванию математики в Таллине (1987), на Всесоюзной геометрической конференции в Кишиневе (1988) и других мероприятиях содержали резкую критику реформы школьного математического образования, осуществлявшейся в стране в 1965–1980 гг.

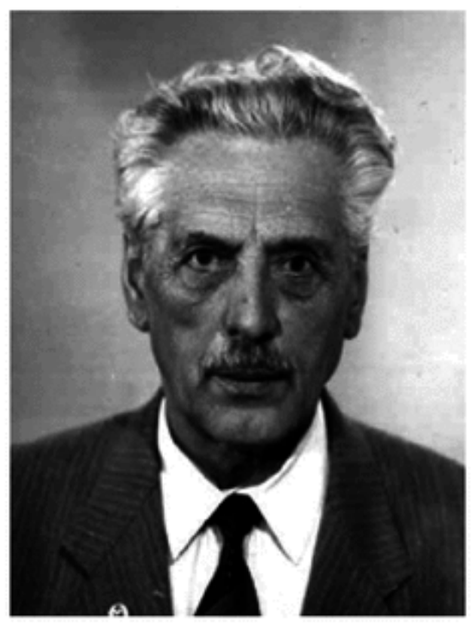
В 1986 г. Александров вернулся в Ленинград и начал работать в Ленинградском отделении Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Он стремился к высоким достижениям в любом деле, за которое брался, как в науке, так и в спорте. Александров умел проводить глубокий анализ философских и общественных проблем.

Научную и общественную деятельность А.Д. Александров успешно сочетал с занятиями спортом. Во время войны, когда был объявлен набор в горные войска на Кавказ, он подал заявление в военкомат, поскольку хорошо знал Кавказские горы, но получил отказ. Александрову указали на то, что он как доктор наук и известный математик, находится в резерве и будет полезнее в тылу. В 1949 г. ему присуждено звание мастера спорта по альпинизму. В день своего 60-летия Александров в одиночку совершил восхождение на безымянный пик в Фанских горах, а еще через десять лет, не считаясь с последствиями перенесенного энцефалита и слаломных травм, он поднялся в двойке с К. Толстовым на пик Панфилова на Тянь-Шане.

А.Д. Александров был удостоен множества наград, из которых особенно ценил первую Золотую медаль им. Л. Эйлера, присужденную ему Президиумом Российской академии наук в 1992 г.

Умер А.Д. Александров 27 июля 1999 г. в Санкт-Петербурге.

А.В. Погорелов



Погорелов Алексей Васильевич родился 3 марта 1919 г. в городе Короче Белгородской области в крестьянской семье. В 1930-е годы семья переехала в Харьков. В детстве Алексей увлекался рисованием и математикой. Он был победителем одной из первых математических олимпиад, проводимых Харьковским университетом для школьников.

В 1937 г. Погорелов поступил на математическое отделение физико-математического факультета Харьковского университета. Из-за войны обучение в университете было прервано. Погорелова призвали в армию и направили на учебу в Военно-воздушную академию им. Н.Е. Жуковского.

В 1945 г. после окончания академии Погорелов был направлен на работу в ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. По рекомендации И.Г. Петровского он знакомится с А.Д. Александровым, сотрудничество и дружба с которым продолжались всю жизнь.

Александров поставил перед Погореловым задачу оценки длины кривой, кратчайшей на замкнутой выпуклой поверхности, гауссова кривизна которой ограничена сверху. Погорелов решил эту задачу за год и поступил в заочную аспирантуру МГУ, где его научным руководителем стал профессор Н.В. Ефимов.

В 1947 г. Погорелов защитил кандидатскую диссертацию, демобилизовался из армии и переехал в Харьков, там он стал работать в должности старшего научного сотрудника Института математики и механики Харьковского университета. Его работы посвящены главным образом геометрии «в целом». Для Погорелова характерно уникальное сочетание «геометрической» интуиции и блестящего владения техникой анализа. Ему принадлежат исследования по проблемам теории поверхностей, в частности по теории поверхностей в римановом пространстве. Они частично примыкают к исследованиям его учителя А.Д. Александрова.

Теоремы А.Д. Александрова о реализуемости абстрактно заданной метрики выпуклой поверхностью допускают лишь принципиальную возможность реализации, но не дают ответа на вопрос о том, сколько таких реализаций. Изучение этого вопроса составляет проблему однозначной определенности и проблему изгибания, если реализация возможна. Проблема однозначной определенности для выпуклых поверхностей была решена в работах А.В. Погорелова. Доказанные им теоремы отличаются от всех полученных ранее результатов предельной общностью рассматриваемой выпуклой поверхности. Основные теоремы об однозначной определенности Погорелов перенес на случай выпуклой поверхности в пространствах постоянной кривизны.

В 1948 г. Погорелов защитил докторскую диссертацию, в которой решил проблему однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей. Это сделало его одним из ведущих геометров мира. В 1950 г. он получил Государственную премию и звание профессора. В 1951 г. его избрали членом-корреспондентом Академии наук Украины.

А.Д. Александров, ректор Ленинградского университета, приглашал Погорелова переехать в Ленинград. В 1955/56 учебном году Погорелов работал в Ленинградском университете, но потом возвратился в Харьков. Он очень любил Харьков, поэтому отказывался от предложений работать в других городах.

В 1959 г. Погорелов получил международную премию им. Н.И. Лобачевского, в 1960 г. был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1961 г. – действительным членом АН УССР. Он руководил отделом геометрии Физико-технического института низких температур АН УССР, созданного в 1960 г., и семинаром по геометрии при Харьковском университете. В 1962 г. Алексей Васильевич стал лауреатом Ленинской премии.

А.В. Погорелов использовал работы С.Н. Бернштейна по теории дифференциальных уравнений эллиптического типа, обогатив их геометрическими методами. Это позволило ему решить проблему регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой, которая несколько десятилетий не поддавалась ученым. С помощью геометрических методов он доказал существование решений эллиптического уравнения Монжа – Ампера, единственность и регулярность строго выпуклых решений. Эти результаты были получены Погореловым в 1969–1972 гг. Но они были опубликованы только в виде кратких заметок в докладах АН СССР. В 1976 г. американский математик Шинтан Яу передоказал их и был удостоен премии и медали Филдса.

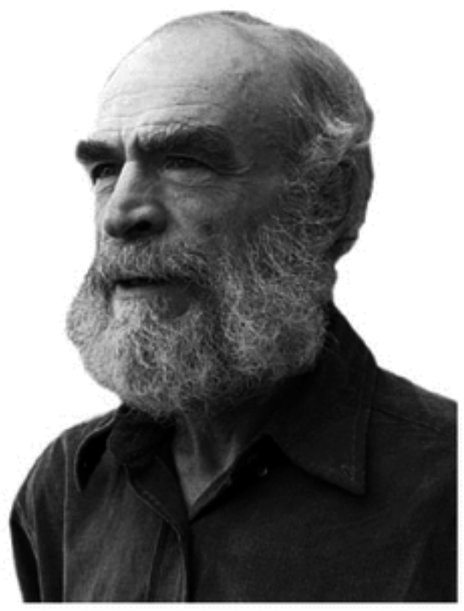
Погорелов решил фундаментальные проблемы по теории общих выпуклых поверхностей, проблему Минковского о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности с заданным произведением главных радиусов кривизны. Он изучал также поверхности ограниченной внешней кривизны, исследовал проблему бесконечно малых изгибаний общих выпуклых поверхностей. Свои результаты по выпуклым поверхностям А.В. Погорелов использовал в созданной им нелинейной теории оболочек [4].

В 1976 г. А.В. Погорелова избрали действительным членом АН СССР.

В преклонном возрасте по состоянию здоровья Алексей Васильевич вынужден был переехать в Москву к сыну.

Ушел из жизни Погорелов 17 декабря 2002 г.

М.Л. Громов



Громов Михаил Леонидович родился 23 декабря 1943 г. в городе Бокситогорске Ленинградской области. Он окончил Ленинградский университет в 1965 г. и был оставлен там для продолжения научной работы. В 1969 г. Михаил Леонидович защитил кандидатскую диссертацию под руководством Рохлина Владимира Абрамовича. Через четыре года, в 1973 г., он стал доктором физико-математических наук.

С 1967 по 1974 г. Громов работал доцентом в Ленинградском университете. В 1974 г. он уехал из СССР в США и стал работать профессором Университета штата Нью-Йорк в Стоуни Брук. В 1981 г. Громов переехал во Францию и с 1982 г. до настоящего времени работает одним из штатных профессоров Института высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт (IHES), назначаемых на эту должность пожизненно. Кроме того, Громов является профессором Института математических наук им. Р. Куранта при Нью-Йоркском университете. В 1992 г. он получил французское гражданство.

Научные интересы Громова разнообразны. Его считают ведущим геометром современности. Геометрия, один из старейших разделов математики, столетиями привлекает внимание величайших ученых мира. В течение последних 50 лет в ней произошли радикальные изменения. М.Л. Громов сформулировал оригинальные общие идеи, которые заставили ученых по-новому взглянуть на геометрию и математику в целом.

Риманова геометрия возникла в результате изучения искривленных поверхностей и их аналогов более высоких размерностей и нашла свое применение, например, в общей теории относительности. Работы Громова сыграли решающую роль в создании современной глобальной римановой геометрии. Предложенные им решения фундаментальных проблем геометрии основываются на новых общих концепциях таких, как сходимость римановых многообразий и принцип компактности, которые сейчас носят его имя.

Громов является одним из основателей симплектической геометрии. Голоморфные кривые были известны и ранее как важный инструмент

в геометрии комплексных многообразий. Однако рамки интегрируемых комплексных структур оказались слишком узкими. В знаменитой работе 1985 г. Громов дополнил понятие голоморфной кривой. Это привело к созданию теории инвариантов Громова – Виттена, в которой в настоящее время активно ведутся исследования, связанные с современной квантовой теорией поля. Его идеи стали отправной точкой для создания симплектической топологии и оказали влияние на другие области математики.

Работа М.Л. Громова о группах полиномиального роста способствовала формированию идей, изменивших взгляды на дискретные бесконечные группы. Громов открыл геометрию дискретных групп, тем самым решив несколько проблем. Предложенный им подход упростил применение сложных комбинаторных конструкций.

Норвежская академия науки и литературы в 2009 г. присудила Громову премию Абеля. Он является первым математиком-геометром и первым воспитанником российской математической школы, получившим премию Абеля. При рассмотрении его трудов комиссия по отбору кандидатов на получение премии отметила его «революционный вклад в геометрию».

Сам Громов выделяет в своих исследованиях следующие направления:

– *h*-принцип – геометрические методы решения уравнений и неравенств с частными производными и гомотопическая структура пространств их решений;

– метрическая геометрия римановых пространств;

– метрические инварианты и количественная топология;

– эллиптические операторы на открытых многообразиях и бесконечные накрывающие пространства;

– бесконечные группы – кривизна, комбинаторика, вероятность, асимптотическая геометрия;

– локально симметрические пространства, дискретные группы и отрицательная кривизна;

– положительная скалярная кривизна;

– симплектические многообразия и голоморфные кривые;

– группы преобразований – геометрия и рекурсия;

– метрика, мера, концентрация и изопериметрические неравенства;

– штейновы многообразия и бесконечные покрытия кехлеровых многообразий;

– бесконечные декартовы произведения и символическая геометрия;

– формализация генетических и биомолекулярных структур.

Громов и в пожилом возрасте остается творчески активным человеком. Он всегда находится в поиске новых задач, его мысли постоянно заняты новыми идеями по исследованию давно существующих, но еще не решенных проблем. Впечатляют его исследования по внедрению математических методов в биологию. Вероятно, труды Громова будут и в дальнейшем оставаться источником вдохновения для многих математических открытий.

М.Л. Громов удостоен многих международных наград, в том числе премии Вольфа (1993) и медали Лобачевского (1997).

Часть IV

КОРЕННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ ПОСЛЕ ВТОРОЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ

> Если до Второй мировой войны основным направлением в математике был анализ и его различные ответвления… то после войны вкусы многих математиков стали смещаться в сторону топологии, многомерного комплексного анализа, алгебраической геометрии, теории групп Ли и теории представлений и т. п.
>
> *В.М. Тихомиров*

Одной из особенностей математических работ второй половины XX в. является чрезмерная формализация изложения, затрудняющая их понимание. Процесс формализации особенно интенсивно шел в алгебре и алгебраической геометрии, затем он распространился и на топологию. Развитие формального языка разводит даже очень близкие разделы математики.

На создание системы, в которой все или почти все области математики рассматривались бы с единых позиций, были направлены творческие силы группы математиков, писавших под псевдонимом Николя Бурбаки.

В исследованиях по теоретической физике находит широкое применение интеграл по траекториям или континуальный интеграл. Основы математической теории континуальных интегралов связаны с работами Н. Винера 1920-х годов.

В 1933 г. П. Дирак предложил использовать интеграл по траекториям в квантовой механике. В 1947 г. американский физик Р. Фейнман разработал формулы для использования континуального интеграла (фейнмановского интеграла по траекториям). Появился новый метод построения квантовых теорий, ставший самым популярным среди теоретиков. Фейнман создал диаграммы, которые стали основным вычислительным аппаратом квантовой электродинамики и получили название «диаграммы Фейнмана». Из-за сложных вычислений около 20 лет фейнмановский интеграл практически не использовался. В конце 1960-х годов интерес к интегралу появился вновь. С его помощью было проведено квантование и построена перенормировочная процедура для весьма популярных в настоящее время полей Янга — Миллса. Удобство применения континуального интеграла в данном случае связано с тем, что он позволяет в компактном виде описать сложные комбинаторные выкладки.

Континуальный интеграл широко используется в квантовой теории поля, теории струн и статистической физике, а также при изучении многих классов стохастических процессов в математике. Однако до сих пор строгая и достаточно полная математи-

ческая теория интеграла Фейнмана встречается с существенными трудностями, связанными с вопросом корректного введения меры на пространстве функций, с проблемой доказательства независимости предела от типа разбиения в достаточно общем случае.

В последней четверти XX в. масса новых идей из физики перетекла в математику. В основном это относится к квантовой теории поля и теории струн. Физики смогли предсказать некоторые математические факты, основываясь на собственном понимании физической теории. Это не были строгие доказательства, они опирались на интуицию, частные случаи и аналогию. Предсказанные физиками результаты были проверены и частично доказаны математиками. Многие из них пока не доказаны полностью.

Во второй половине 1940-х — начале 1950-х годов Ж. Лере, Ж.-П. Серр, А. Картан, Р. Том, А. Борель создали и успешно применили алгебраические методы для вычисления гомологий расслоенных пространств. Это привело к созданию гомологической алгебры. Богатство идей, внесенных исследователями в топологию, сделало ее в середине XX в. центром внимания математиков всего мира. Развитие алгебраических методов топологии ускорилось после работ Гротендика. Введенный им *K*-функтор был перенесен Атьей и Хирцебрухом в топологию.

Творцов математики условно можно разделить на две группы. Первая группа тяготеет в своих работах к развитию геометрических идей, вторая — идей алгебраических. Геометрия статична и является наукой о пространстве. Пространственная интуиция и пространственное восприятие являются мощным орудием познания. Алгебра динамична, ее можно назвать наукой о времени. В любом разделе алгебры выполняется последовательность операций, существование определенного алгоритма.

«Геометрическое мышление», господствовавшее с античных времен, Декарт попытался свести к алгебраическим манипуляциям. К разным группам принадлежали создатели интегрального и дифференциального исчислений Ньютон и Лейбниц. Ньютон, старавшийся математически описать законы природы, был геометром, а Лейбниц, стремившийся формализовать всю математику, был алгебраистом. В современной математике наиболее известными последователями Ньютона являются Пуанкаре и Арнольд, а последователями Лейбница — Гильберт и группа Бурбаки.

Глава 18

НИКОЛЯ БУРБАКИ – КОЛЛЕКТИВНЫЙ ПСЕВДОНИМ ГРУППЫ МАТЕМАТИКОВ

> Бурбакисты могут и хотят помещать в трактат только рационально организованные теории, в которых имеются методы, естественно вытекающие из первоначальных данных, в которых почти нет места искусственному изобретательству... бурбакисты решили изложить в основном математические теории, практически полностью исчерпанные, по крайней мере в их основе.
>
> *Ж. Дьёдонне*

Возникновение объединения французских математиков

Среди учебных заведений Франции особое место занимает Высшая нормальная школа в Париже, выпускники которой смотрят свысока на тех, кто там не учился. В 1935 г. группа молодых талантливых французских математиков, выпускников этой школы, решила пересмотреть всю математику. Лидерами этой группы были Андре Вейль, Жан Дельсарт, Жан Дьёдонне, Анри Картан и Клод Шевалле. В группу также входили Жан Кулон, Шарль Эресманн, Рене де Поссель, Шолем Мандельбройт и другие. Кроме них, приняли участие лишь в первой встрече Жан Лере и Поль Дюбрейль. Они организовали тайное сообщество и договорились под общим псевдонимом в едином стиле выпустить серию книг «Элементы математики», где вся математика была бы изложена «с нуля», без ссылок на достижения предыдущих ее творцов. За образец взяли опубликованную в 1931 г. книгу Ван-дер-Вардена «Современная алгебра», которая отличалась исключительной точностью языка и сжатостью изложения идей [72].

Николя Бурбаки – имя бездарного генерала XIX в., статуя которого стояла на площади города Нанси. Молодые математики пригласили артиста, который был загримирован как иностранная знаменитость под именем Николя Бурбаки темпераментно выступил перед студентами-первокурсниками с лекцией, имитирующей новые достижения и состоящей из набора искусно скомпонованных математических терминов. После разоблачения все решили, что это просто шутка. Но со временем в серьезных математических журналах стали появляться блестящие статьи с новыми математическими результатами, подписанные этим именем. А в 1939 г. перед Второй мировой войной в издательстве «Эрман» опубликовали целые тома «Элементов математики», автором которых значился Николя Бурбаки.

Эта группа математиков задумала создать две серии книг. В первой – предполагалось рассмотреть основания математики и состоять она должна

была из шести книг, в которых были бы изложены теория множеств, алгебра, общая топология, элементарный анализ, топологические векторные пространства, теория интеграла Лебега. Вторая серия должна была содержать информацию по группам Ли и коммутативной алгебре. Основные принципы изложения материала таковы: единство и полная формализация математики на основе теории множеств; систематичность, догматизм и самодостаточность изложения, идущего всегда от общего к частному; ключевая роль понятия «структура».

Бурбаки (так мы будем называть этот коллектив) решили, что прежнее деление математики на алгебру, арифметику, геометрию и анализ устарело. Например, евклидову геометрию они считают частным случаем теории эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве.

По мнению Н. Бурбаки, большинство разделов математики может быть красиво изложено и плодотворно развиваться на основе тщательно подобранных общих для всех разделов аксиом. Аксиомы должны характеризовать так называемые математические структуры.

Общей чертой понятий, объединенных названием «математическая структура», является их применимость к множествам элементов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы. Затем принимают за постулат, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям, которые считают аксиомами рассматриваемой структуры. Построить аксиоматическую теорию данной структуры – значит вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо других предположений относительно рассматриваемых элементов, в частности, от всяких гипотез относительно их природы [53]. Отношения, являющиеся исходной точкой в определении структуры, могут быть по своей природе весьма разнообразны.

Структуру называют *алгебраической*, если определяющие ее отношения являются законами композиции, т. е. такими отношениями между тремя элементами, которые определяют однозначно третий элемент как функцию двух первых.

Другой важный тип представляют собой структуры, *определенные отношением порядка*, т. е. отношением, которое связывает два элемента x и y. Примером может быть отношение $x \leq y$, причем не исключается случай, когда два элемента невозможно сравнить.

Еще один тип – *топологические* структуры, или *топологии*. В этих структурах находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия окрестности, предела и непрерывности.

Выявилась роль таких математических структур, как эквивалентность, порядок, близость и т. д. При этом стало ясно, что такие структуры одинаково проявляют себя в различных предметных областях.

Структуры являются «рабочими инструментами» математика. Когда исследователь замечает, что между изучаемыми элементами имеются отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, направление его мысли неожиданно меняется – он открывает соответствую-

щую структуру в изучаемых им явлениях. Например, теория алгебраических кривых и теория алгебраических чисел следуют из одних и тех же структур.

Исследователю не нужно мучительно трудиться, отыскивая оригинальные подходы к решению данной изолированной проблемы. Он может воспользоваться арсеналом общих теорем, относящихся к таким структурам.

Можно привести множество примеров. Так были введены пространство Гильберта и более общие функциональные пространства, вводящие топологические структуры в множества, элементами которых являются уже не точки, а функции. Другими примерами являются *p*-адические числа Гензеля, посредством которых топология нашла применение во множестве целых чисел и мера Хаара, расширившая область применения понятия интеграла и способствующая глубокому анализу свойств непрерывных групп [53].

Систематическое применение аксиоматического метода и теории структур позволило выявить связи между областями математики, казавшимися очень далекими друг от друга, найти пути преодоления тенденции к расщеплению математики на почти независимые области и укрепить тем самым единство математической науки, выявило ряд важных результатов благодаря возможности применять методы, выработанные в одних разделах математики, к иным разделам, связанным с ними единством структуры.

Классификация математики, проводимая по типам структур, значительно отличается от традиционной. Школа Бурбаки отвергла результаты Фреге, Рассела, Брауэра и Гильберта в этой области. Представители этой школы использовали аксиому выбора и закон исключенного третьего, хотя выводили его с помощью приема, предложенного Гильбертом. Их не заботит проблема непротиворечивости. Для них логика подчинена аксиомам собственно математики. Логика не определяет ни того, что такое математика, ни того, чем занимаются математики.

Бурбаки решили исключить из рассмотрения те разделы математики, которые, по их мнению, получены в результате изобретательных догадок. Догадки эти включали многие искусственные приемы и не вытекали из строгого набора аксиом. К таким разделам были отнесены теория кардинальных чисел, универсальная алгебра, полуупорядоченные пространства, неассоциативная алгебра, большая часть теории групп (конечные группы), большая часть теории чисел (в том числе аналитическая теория чисел). Такая же участь постигла процессы суммирования, все, что можно назвать чистым анализом (тригонометрические ряды, интерполирование, ряды полиномов и многое другое), и всю прикладную математику. Теория конечных групп, являющаяся, по мнению Дьёдонне, одной из наиболее глубоких и богатых необычными результатами, исключена из рассмотрения потому, что у Бурбаки создалось впечатление, что многие теоремы этой теории доказаны кустарно, с нагромождением искусственных построений.

Организация работы группы менялась, в середине 1950-х годов она была следующей. Собирались в одном из небольших курортных местечек Франции три раза в год: неделю – осенью, неделю – зимой и две недели – летом, трудились по 10–12 часов в день. Составление очередного тома

начиналось с тщательно разработанного проекта. После этого кто-либо давал согласие и писал предварительный вариант. Через полгода – год рукопись копировали и раздавали остальным членам группы. На следующем общем собрании написанное беспощадно критиковали, а иногда и полностью отвергали. После обсуждения первого варианта началась работа над вторым, который, как правило, писал другой автор, и так до шести-семи раз. Только после всех уточнений и доработок появлялся труд, который по праву мог считаться коллективным. Правила обеспечивали преемственность: время от времени в группу приглашали молодых математиков, а представители старшего поколения уходили в отставку по достижении «пенсионного возраста» – 50 лет.

Работа группы не прекращалась и во время Второй мировой войны. Послевоенные годы отмечены небывалым ростом популярности группы. Их работы переводились почти на все языки мира, «секретное» сообщество стало всемирно известным.

К книгам серии был прикован всеобщий интерес, тем более что именно в них некоторые разделы математики впервые были изложены в связной и последовательной форме. Так, например, до появления «Элементов математики» вся общая топология содержалась лишь в нескольких заметках и в книге Фреше, состоящей из большого числа не упорядоченных результатов. Практически ничего не было по некоторым вопросам алгебры; совсем на другом уровне, чем у Бурбаки, был изложен вопрос интегрирования. Книги Бурбаки стали популярными учебниками и справочниками. Каждая книга была снабжена инструкцией с указанием необходимой подготовки, расположением материала и точно определенным логическим порядком, в соответствии с которым должен изучаться материал, а также упражнениями, использующими переделанные работы авторитетных авторов. Причем математики гордились, если их результаты использовались в работах Бурбаки, пусть даже без упоминания их авторства.

Наиболее подробно в работах Бурбаки были рассмотрены следующие разделы математики: общая топология, векторные топологические пространства, линейная алгебра, гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, некоммутативная алгебра, группы Ли, интегрирование, дифференцируемые многообразия, риманова геометрия, дифференциальная топология, гармонический анализ, аналитическая геометрия. Бурбаки не рассматривали дифференциальные уравнения с частными производными, теорию вероятностей, алгебраическую топологию, математическую логику, большие разделы анализа, математическую физику и многие другие разделы математики. Представитель третьей волны бурбакистов Пьер Картье, состоявший в обществе с 1955 по 1983 г., в интервью математическому журналу в 1998 г. сказал, что нелюбовь бурбакистов к наглядным иллюстрациям объясняется тем, что бóльшая часть группы была протестантского или иудейского вероисповеданий, а в храмах этих конфессий не допускаются графические изображения.

На 1950–1960-е годы пришелся расцвет группы Бурбаки. Члены этого сообщества завоевывают ключевые посты во французских университетах, получают признание во многих странах. Даже самые ярые противники работ

Бурбаки испытали на себе их влияние. Стиль практически всех научных работ по математике изменился, стал более формализованным.

Содержательность книг контрастировала с несерьезностью имиджа группы Бурбаки, создаваемого умышленно. Имена членов группы долгое время оставались неизвестны. Во время войны часть группы оказалась в Чикагском университете. Бурбакисты второго и третьего поколений – Джон Тейт, Самуэль Эйленберг и Серж Ленг – были американцами. Андре Вейль, один из основателей группы, с 1947 по 1958 г. жил в Чикаго, Жан Дельсарт и Жан Дьёдонне жили в Нанси. Этот коллектив стали называть профессором Университета Нанкаго (Нанси и Чикаго). На Международном математическом конгрессе 1966 г., проходившем в Москве, бурбакист Адриен Дуади вышел на трибуну с важным докладом босым и в рваных джинсах. Существует множество легенд об экстравагантности бурбакистов на собраниях.

Имена участников группы постепенно становились известны. Лидеры первого поколения, упомянутые выше, изобрели метод изложения материала. Они не признавали достижения Анри Пуанкаре, противника теории множеств. Во второе, послевоенное, поколение вошли Лоран Шварц, Жан-Пьер Серр, Пьер Самюэль, Жан-Луи Косул, Жан Диксмье, Роджер Годмент, Самуэль Эйленберг. Если первое поколение училось по учебникам других школ и «перетасовало» математику, то бурбакисты второго поколения обучались у первого, поэтому были более раскованными. Представители второго поколения работали над внедрением в математику идей Гильберта. Этим занимались и бурбакисты третьего поколения – Арман Борель, Александр Гротендик, Франсуа Брюха, Пьер Картье, Серж Ленг, Джон Тейт – активно работавшие в 1950–1960-е годы XX в. Когда французская математика полностью приняла бурбакизм, они стали законодателями математической моды. Четвертое поколение составили бывшие студенты Гротендика, которые затем изгнали учителя из своих рядов. Последний том Н. Бурбаки вышел в 1983 г. Последней опубликованной работой является гл. 10 «Коммутативной алгебры», увидевшая свет в 1998 г.

По мнению автора данной книги, интересными являются воспоминания А.А. Гротендика о микроклимате в группе Бурбаки. В книге «Урожаи и посевы» Гротендик пишет: «…наши совместные занятия в группе олицетворяли для меня идеал коллективного труда: как с точки зрения скрупулезности, внимания к самым (на первый взгляд) незначительным деталям в ходе работы, так и в отношении свободы каждого из участников. <…> Группа работала без руководителя, и, насколько я могу судить, никто, пусть бы и в глубине души, не желал для себя этой роли. Разумеется, как во всяком коллективе, одни люди оказывали больше влияния на товарищей по группе, другие – меньше. В этом смысле, как я уже говорил, Вейлю принадлежала особая роль. Всегда, когда он присутствовал на наших собраниях, он как бы вел игру… Для старых Бурбаков Вейль был как бы душою группы – отнюдь не начальником… Но правила игры выбирал не он, они были одни для всех… То или иное решение в группе принималось лишь в том случае, если все были “за”. Иногда (и даже нередко) “против” оказывался только один человек, и этого хватало. Я знаю, это звучит нелепо: кажется, по такому принципу

группа работать не может. Хотите – верьте, хотите – нет, но Бурбаки работали превосходно!.. Постепенно и Серр приобретал в группе все большее влияние, так что под конец мог в этом поспорить с Вейлем. В ту пору, когда я еще входил в состав Бурбаки, это не подавало им повода для соперничества. Позднее они действительно стали недолюбливать друг друга… <…> в 1960-е годы общий настрой в группе Бурбаки стал меняться: появился дух элитарности, избранности, и на месте прежней открытости мало-помалу выросла стена, отделявшая нас от мира. <…> Мы стали важными, грозными, могущественными особами; к нашим словам прислушиваются, нашего внимания ищут <…> в 1970 году… я обнаружил, до какой степени самое имя Бурбаки стало непопулярным в широких слоях математического мира… Для многих людей оно ассоциировалось со снобизмом, узкой догматичностью, культом “канонической” формы (в ущерб живому восприятию математической реальности), заумностью, выхолощенной искусственностью изложения и массой других неприятных вещей! <…> основной просчет самого замысла группы: по статьям, по книгам, вышедшим из-под пера Бурбаки, не было видно, что писали их живые люди» [32].

Члены группы Бурбаки чувствовали, как изменилось отношение к их деятельности. Ими было опубликовано следующее шутливое сообщение: «Семейства Канторов, Гильбертов, Нётеров; семейства Картанов, Шевалле, Дьёдонне, Вейлей; семейства Брюа, Диксмье, Самюэлей, Шварцев; семейства Картье, Гротендиков, Мальгранжей, Серров; семейства Демазюров, Дуади, Жиро, Вердье; семейства, фильтрующиеся вправо, семейства точных эпиморфизмов, мадемуазель Адель и мадемуазель Идель с прискорбием сообщают Вам о смерти мсье Николя Бурбаки, их отца, брата, сына, внука, правнука и кузена соответственно, скончавшегося 11 ноября 1968 г. в годовщину Победы в Первой мировой войне в своем доме в Нанкаго. Кремация состоится в субботу, 23 ноября 1968 г. в 15 часов на “кладбище случайных величин”, станции метро “Марков” и “Гёдель”. Сбор состоится перед баром “У прямых произведений” перекресток проективных резольвент, бывшая площадь Косуля. Согласно воле покойного, месса состоится в соборе “Богоматери универсальных конструкций”, месса будет проведена кардиналом Алефом I в присутствии представителей всех классов эквивалентностей и алгебраически замкнутых тел. За минутой молчания будут наблюдать ученики Высшей Нормальной школы и классов Чженя. *Поскольку Бог есть компактификация Александрова для Вселенной* – Евангелие от Гротендика, IV, 22».

Отношение к творчеству Н. Бурбаки неоднозначное. Существуют математические школы (например, бразильская), всецело находящиеся под влиянием работ Бурбаки, в других математических школах (например, в гёттингенской) с «бурбакизмом» ведется борьба.

В нашей стране одним из несогласных со взглядами Бурбаки на математику был академик В.И. Арнольд. В этой связи интересна его статья «Математическая дуэль вокруг Бурбаки»: «На дуэль меня вызвал Ж.-П. Серр, мотивировавший свой вызов так: “Я хочу рассказать о влиянии Бурбаки на математику… я стал искать, кто бы мог высказать наиболее противоположное

моему мнение. И, перелистав справочник математиков мира, понял, что это ты". <…> Дуэль состоялась 13 марта 2001 г. в Институте А. Пуанкаре. Каждый из нас говорил по часу. В заключительном слове Серр подытожил: "Теперь мы еще раз убедились, какая это замечательная наука – математика. Люди со столь противоположными мнениями, как мы двое, могут в ней сотрудничать, уважать друг друга, знать и использовать результаты друг друга, сохраняя при этом свои противоположные мнения... И, смотрите – мы оба остались живы". <…> И математика, и физика – экспериментальные науки, разница лишь в том, что в физике эксперименты стоят миллиарды долларов, а в математике – единицы рублей. Что же касается результата дуэли, то из нескольких сот слушателей со мной были согласны, по моей оценке, примерно 3/4. Но зато присутствовавшие математики все, как один, были на стороне Серра (или, во всяком случае, на это претендовали, ведь говорить иное было бы для них опасно). Известно, что французский министр просвещения (геофизик), желая понять, как учат математике детей, спросил одного отличника-младшеклассника: "Сколько будет два плюс три?" Бурбакисты-учителя не научили мальчика считать, и он не знал, что это 5, но он ответил так, как они с него требовали в школе: "Это будет 3 плюс 2, так как сложение коммутативно". Министр объявил, что такое обучение никуда не годится, что подобных учителей "математиков" надо гнать из школ, а считать детей пусть учит кто угодно другой – химик, инженер и т. п. Но результат подтвердил социальную устойчивость бурбакизма: министра сняли с поста (и даже его министерство не сохранили, а разделили на два независимых)» [9].

Некоторые неточности, допущенные при переводе на русский язык сочинений Бурбаки, печатавшихся издательствами «Мир» и «Наука» в течение длительного времени, привели к тому, что книги этого трактата (их 26) выходили под тремя разными названиями: «Элементы математики» (чаще всего), «Основы математики» и «Начала математики». Выпущенные отдельным изданием исторические вставки в разные части этого труда (в оригинале – «Elements d'histoire des mathematiques») получили название «Очерки по истории математики».

Н. Бурбаки не удалось выполнить все намеченное, хотя сделано было многое. Неудачным оказался проект по нескольким комплексным переменным, как и попытки в отношении теории гомотопий, спектральной теории операторов, симплектической геометрии и многим другим разделам математики.

Являются ли исследования Н. Бурбаки в математике вершиной ее упорядочения? По этому вопросу интересно мнение немецкого математика и педагога Ганса Фройденталя. В книге «Математика как педагогическая задача» он пишет: «В качестве систематизаторов математики наиболее известны Бурбаки. Сколь убедительно упорядочена у них математика! Столь неоспоримо, что Пиаже смог "переоткрыть" бурбакистский порядок с помощью психологического подхода. Бедный Пиаже! Пиаже не математик, и он не мог знать, как мало можно полагаться на математика-систематизатора. Еще до того, как Бурбаки закончили упорядочение математики, было открыто значение категорий. Едва ли можно сомневаться, что категории –

инструмент нового порядка и что от бурбакистского построения не останется камня на камне, если перестроить его в стиле теории категорий, которая тоже когда-нибудь будет заменена новым подходом к систематизации математики» [53].

В историческом плане основной заслугой этого творческого коллектива является выработка единого языка математики. Высокий авторитет Бурбаки среди математиков подтверждается также тем фактом, что некоторые из них имеют за свои индивидуальные работы множество математических наград, в том числе медали Филдса. Хотя официально имена членов коллектива не оглашались, среди лауреатов медали Филдса бурбакистами считают Лорана Шварца, Жан-Пьера Серра, Александра Гротендика, Алена Конна, Жака Титса.

Бурбаки и реформа математического образования

Книги Бурбаки являются своеобразной энциклопедией для профессионалов, но их нельзя было считать учебниками для всех. Однако работы Бурбаки стали использоваться во французских университетах в качестве учебников, хотя сами участники коллектива выступали против перенесения их стиля изложения в учебный процесс. После того как стиль подачи материала Бурбаки победил в учебниках высшей школы, он постепенно стал доминировать во всей системе французского математического образования. Проникновение бурбакистских методов в школьное образование имело серьезные негативные последствия. Под влиянием работ Н. Бурбаки усилились нападки апологетов абстрактной математики на прикладную математику, изменилось преподавание математики во многих странах мира, в том числе в СССР.

Реформа школьного математического образования в СССР началась в 1965 г., когда под председательством А.И. Маркушевича была образована комиссия «по определению содержания среднего образования». Уже в 1968 г. комиссия подготовила и издала программы средней школы. В 1970-е годы в стране сложился новый стиль преподавания математики, заимствованный в основном из Франции. Для этого стиля характерны разрыв с интуицией и крайняя формализация изложения материала. В математике красота идеи часто убедительнее формального рассуждения, а при новой системе преподавания это в расчет не брали. По меткому выражению И.Р. Шафаревича, такое изучение математики равносильно постижению азов живописи в художественных училищах не с копирования классических произведений, а с подражания Пикассо.

Главным идеологом реформы был А.Н. Колмогоров, который в последние 20 лет жизни принимал активное участие в разработке вопросов преподавания математики в школе и написании многих школьных учебников. Его выступления перед школьниками на олимпиадах и в математических кружках способствовали появлению новых талантов.

Обосновывая проводимую реформу, Колмогоров писал, что машины не понимают нечеткую человеческую речь. Мы привыкли, что наши собеседники благодаря интуиции способны воспринимать и недостаточно четкую речь, но машина к этому не приспособлена и требует в диалоге абсолютно безупречной

логической структуры речи. Колмогоров считает, что та логическая неотчетливость, которая до сих пор имелась в учебниках и в преподавании, уже недопустима и что школе следует считаться и отражать тенденцию развития знаковых систем как формы выражения мысли в своих программах.

А.Н. Колмогоров знал о недостатках реформы, проводимой под его руководством. Например, он считал, что радикальное изменение содержания математического образования в последние годы произведено во Франции. Когда Колмогоров был в этой стране в последний раз, то неоднократно в автобусах слышал беседы родителей об этой школьной реформе и их возмущение тем, что они сами уже ничего не в состоянии понять из того, что обязаны учить их дети.

Отношение граждан нашей страны к проводимой реформе отразилось в модной в 1970-е годы шутливой «Песенке первоклассника», талантливо исполненной Аллой Пугачёвой. Представители старшего поколения хорошо помнят слова этой песни: «Нагружать все больше нас стали почему-то, // Нынче в школе первый класс вроде института. // Нам учитель задает с иксами задачи, // Кандидат наук – и тот над задачей плачет». А в припеве предостережение: «То ли еще будет, // Ой-ой-ой!»

В целом проводимая Министерством просвещения СССР в 1965–1980 гг. насильственная перестройка школьного математического образования привела к потере интереса школьников к математике и нанесла большой ущерб их математической подготовке. За этот эксперимент А.Н. Колмогоров подвергся резкой критике со стороны академиков Л.С. Понтрягина и А.Д. Александрова. Сейчас даже во Франции начался отказ от внедрения бурбакизма в школьное математическое образование.

Борьбу с внедрением формализма в школьную математику вели многие ученые, в том числе Понтрягин. С большим трудом ему удалось опубликовать свои статьи в журнале «Коммунист». Последние шесть лет жизни Лев Семенович руководил Комиссией по школьному математическому образованию Отделения математики АН СССР.

По воспоминаниям известного российского математика В.С. Малаховского, на совещании заведующих математическими кафедрами университетов СССР, состоявшемся в МГУ в 1985 г., А.Д. Александров заявил о том, что за произошедшее с преподаванием математики в нашей школе всем, сидящим в зале, надо посыпать пеплом голову, а непосредственным виновникам этого надо уйти в монастырь и до конца дней своих замаливать грехи перед миллионами школьников и сотнями тысяч учителей.

Реформа школьного образования началась тогда, когда искусство программирования было на низком уровне. Реформа проводилась так, как будто каждый школьник должен был стать программистом. Параллельно проводилась работа по созданию искусственного интеллекта. Одной из задач было создание программ, понимающих речь и текст. Со временем рядовому пользователю (не программисту) при работе с компьютерами стала не нужна та строгость в мышлении, о которой так заботились сторонники реорганизации математического образования, а формализм, отвращающий школьников от математики, остался в школьных учебниках. Учащиеся стали хуже понимать

геометрию, что привело к дополнительным сложностям в преподавании черчения в технических вузах.

В данной книге уже упоминалось о негативном отношении В.И. Арнольда к внедрению идей Бурбаки в математическое образование. В журнале «Наука и жизнь» № 12 за 2000 г. было помещено его интервью. Приведем некоторые из высказываний Арнольда.

«С математическим образованием в мире обстоит очень плохо. В России, кстати, получше, но все равно плохо…<…> Во Франции катастрофа наступила чуть раньше, в других странах она еще впереди. Школьное образование начало гибнуть в результате тех реформ, которые интенсивно проводятся во второй половине XX в. И особенно печально то, что некоторые выдающиеся математики, к примеру, уважаемый мной академик Колмогоров, имеют к ней отношение… <…> Несколько лет назад в Америке шли так называемые Калифорнийские войны. Штат Калифорния вдруг заявил, что выпускники школ недостаточно подготовлены, чтобы учиться в университете. Молодые люди, приезжающие в Америку, к примеру, из Китая, оказываются подготовлены гораздо лучше американских школьников… <…> 80 % современных учителей математики в Америке понятия не имеют о дробях, не могут сложить половину с третью. А среди учеников таких – 95 %... <…> Один из сенаторов в своем выступлении сказал, что набрал 41,3 % голосов избирателей, что свидетельствует о доверии к нему народа, а потому он всегда будет бороться в образовании только за то, что он сам понимает. Если чего-то он не понимает, то и учить такому не следует…».

В докладе, с которым В.И. Арнольд выступил на сессии Папской академии наук в Ватикане «Изменяющаяся концепция природы на закате тысячелетия», он говорил, что расцвет математики в XX столетии сменяется тенденцией к подавлению науки и научного образования общественностью и правительствами большинства стран мира, которые начали исключать математические науки из программ средней школы, а потому нынешний расцвет науки может смениться необратимым спадом, подобным тому, который произошел с живописью после итальянского Возрождения.

Особенно опасна тенденция изгнания из школьного обучения всех доказательств. Тот, кто не научился искусству доказательства в школе, неспособен отличить правильное рассуждение от неправильного. Такими людьми могут легко манипулировать безответственные политики. Результатом может стать массовый гипноз и социальные потрясения. Лев Толстой писал, что сила правительства основана на невежестве народа, что правительство знает об этом, и потому будет всегда бороться против просвещения народа.

Во Франции, система образования которой копируется многими странами, также имеет место кризис образования. В ноябре 2005 г. лауреат медали Филдса Лоран Лаффорг был вынужден уйти в отставку из Верховного комитета по образованию, в который он был введен по распоряжению президента Франции Жака Ширака всего лишь за две недели до скандала. Причиной послужила резкая критика Лаффоргом уровня математического и общего образования. По его мнению, большая часть школьников не может разделить 60 на 4 без калькулятора.

Анри Картан

Картан Анри родился 8 июля 1904 г. в городе Нанси (Франция). Когда Анри было 5 лет, его отец, известный французский математик Эли Картан, был назначен преподавателем в Сорбонне, и семья переехала из Нанси в Париж. Учился Анри в лицее Гошу в Версале, а затем в Высшей нормальной школе в Париже.

В 1928 г. Картан защитил диссертацию по комплексному анализу и начал преподавать математику в лицее Малебр в Кане. С 1929 по 1931 г. он читал лекции на факультете естественных наук в Лилле, в 1931 г. был назначен лектором на естественно-научный факультет в Страсбурге.

Первое организационное собрание будущих членов группы Бурбаки состоялось 14 января 1935 г. Их первоначальной целью было написание доступно изложенной работы по анализу. В том же году Картан женился на Николь Вейс, дочери физика Пьера Вейса. У них родились два сына и три дочери.

В начале Второй мировой войны Картан работал в Страсбургском университете. В сентябре 1939 г. университет был эвакуирован в Клермон-Ферран. Там Картан проработал год и в ноябре 1940 г. был назначен профессором Сорбонны. Один из младших братьев Анри участвовал в Сопротивлении и был казнен немцами в 1943 г. После окончания войны в 1945 г. Картан вернулся в Страсбург и проработал два года на факультете естественных наук в университете Луи Пастера.

В январе 1948 г. Картан был приглашен Андре Вейлем в Чикаго. Там он познакомился с Эйленбергом, американским членом группы Бурбаки. В США его пригласили на один семестр в Гарвардский университет. В Высшей нормальной школе в Париже Картан организовал семинар, которым руководил до 1964 г. С февраля 1949 г. он – профессор в Парижском университете, а с 1950 г. – президент французского Математического общества.

Научные интересы Анри Картана составляли три направления: комплексный анализ, алгебраическая топология и гомологическая алгебра.

С исследований в теории функций комплексного переменного (комплексного анализа) Картан начал научную деятельность. Первой работой в этом направлении была его диссертация, защищенная под руководством Поля Монтеля, ученика Бореля и Лебега. Комплексным анализом Картан активно занимался до 1950-х годов.

С 1940-х годов под руководством Картана в группе Бурбаки интенсивно развивалась алгебраическая топология – раздел топологии, изучающий топологические пространства, сопоставляя их с алгебраическими объектами и поведением этих объектов под действием различных топологических операций. Применение алгебраических методов в топологии объясняется тем, что алгебраические структуры устроены проще, чем топологические.

В 1950-х годах Картан заложил основы теории пучков. Пучком в математике называют однопараметрическое семейство линий на плоскости или

поверхностей в пространстве, зависящее от параметра. Пучки используются для установления отношений между локальными и глобальными данными. Они играют значительную роль в топологии, дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии и применяются также в теории чисел, анализе и теории категорий.

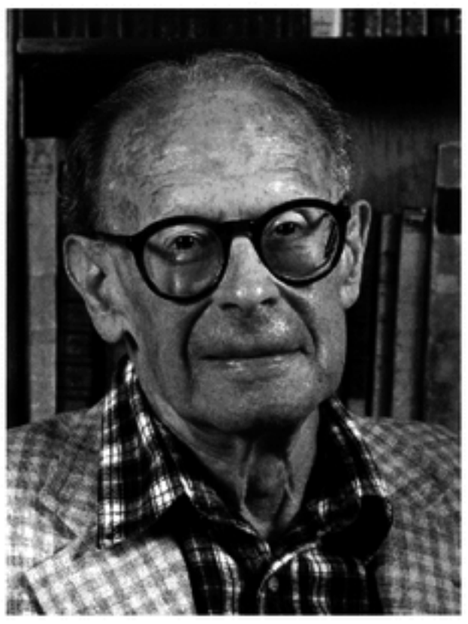
В соавторстве с Эйленбергом Картан в 1953 г. написал книгу «Гомологическая алгебра», в которой систематически изложены основные концепции новых алгебраических методов, нашедших применение в топологии, теории функций комплексного переменного и алгебраической геометрии. Гомологическая алгебра изучает алгебраические объекты, рассматриваемые в алгебраической топологии. Понятие гомологии интуитивно связано с представлением об ограничении множеств. Гомологическая алгебра играет важную роль в алгебраической топологии, применяется во многих разделах алгебры, таких как теория групп, теория алгебр, алгебраическая геометрия, теория Галуа. Первыми гомологические методы в алгебре применили при изучении расширений групп в 1940-х годах Эйленберг и Маклейн.

Другие математические работы Картана относятся к теории потенциалов, гармоническому анализу и другим разделам математики. В 1960-х годах им опубликованы три учебника: «Дифференциальное исчисление», «Дифференциальные формы», «Элементарная теория аналитических функций».

В 1965 г. Анри Картан оставил работу в Высшей нормальной школе, а в 1969 г. был назначен профессором на факультет естественных наук в Парижский университет в Орсэ. С 1967 по 1970 г. он был президентом Международного математического союза. В 1974 г. Картана избрали членом Академии наук. Он был избран во многие академии Европы, Соединенных Штатов Америки и Японии, имел несколько наград, в том числе премию Вольфа (1980).

Картан вышел на пенсию в 1975 г. и скончался в Париже 13 августа 2008 г. в возрасте 104 лет.

Андре Вейль



Вейль Андре родился в Париже 6 мая 1906 г. в семье врача. Его мать была австрийской еврейкой из семьи, принадлежащей к общине, которая некогда жила в Ростове-на-Дону. Вейль не является родственником своего современника немецкого математика Германа Вейля (см. гл. 7).

В детстве Андре увлекался поэзией, читал «Илиаду» на греческом языке, «Махабхарату» на санскрите, знал английский, немецкий и латынь. Школу Вейль окончил в 1922 г. и поступил в самое престижное учебное заведение Франции – Высшую нормальную школу в Париже. После Первой мировой войны во Франции, где молодых математиков призывали в армию, фактически остались только математики старшего поколения. Ровесникам Вейля пришлось возрождать французскую математику. Во время обучения Вейль занимался в семинаре Жака Адамара.

После окончания Нормальной школы в 1925 г. Вейль занимался решением диофантовых уравнений. Полгода он проводил исследования в Риме под руководством В. Вольтерры, затем в Гёттингене – под руководством Р. Куранта и Э. Нётер, в Стокгольме – под руководством Г. Миттаг-Лёффлера. В 1927 г. он вернулся в Парижский университет к Адамару.

В 1928 г. А. Вейль получил степень доктора и в 1928–1929 гг. в звании лейтенанта проходил обязательную службу в армии. Затем он уехал в Индию и до 1932 г. работал профессором в Исламском университете города Алигарх.

Во Францию Вейль вернулся в 1932 г. и преподавал в Марсельском университете, с 1933 г. до начала Второй мировой войны – в Страсбургском университете. Вместе с Картаном он организовал семинар, вначале называвшийся семинаром Жюлиа, а позже – семинаром Бурбаки. Он объединял математиков, преподававших в разных университетах и заинтересованных в модернизации читаемых курсов. Их целью было создание французской школы современной математики.

Когда началась Вторая мировая война, А. Вейль уехал в Финляндию, чтобы избежать призыва в армию. В это время Финляндия воевала с СССР и Вейля арестовали, считая его русским шпионом. У него были найдены письма на русском языке от Л.С. Понтрягина. От казни его спасло заступничество финского математика Неванлинны. Вейля выслали из Финляндии во Францию. Там его посадили в тюрьму за уклонение от службы в армии, но после согласия служить выпустили. При первой представившейся возможности он убежал в США, где с 1941 до 1945 г. преподавал в Хаверфордском и Сварфморском колледжах. С 1945 до 1947 г. он преподавал в Бразилии, в университете Сан-Паулу.

С 1947 по 1958 г. Вейль работал профессором Чикагского университета, а с 1958 по 1976 г. – Принстонского университета. В группе Бурбаки он пользовался, по словам Гротендика, невероятным авторитетом. Несмотря на царивший там демократизм и формальное отсутствие лидера, Вейля побаивались не только студенты, но и некоторые коллеги. Членом группы Бурбаки он оставался до 1956 г., до достижения установленного «пенсионного возраста» – 50 лет.

Вейль известен благодаря фундаментальным работам в теории чисел, к которой применил аппарат гомологической алгебры (так называемые когомологии Галуа) и функционального анализа. В 1949 г. он выдвинул несколько предположений, названных гипотезами Вейля, о конгруэнц-дзета-функции алгебраических многообразий над конечными полями. Гипотезы указывали на связь дискретного мира алгебраических многообразий с непрерывным миром топологии и явились стартовой площадкой для топологии алгебраических многообразий. Позже они были доказаны младшими коллегами Вейля Гротендиком и Делинем. Работы А. Вейля по выявлению связей теории чисел и алгебраической геометрии и исследования гипотезы Таниямы – Шимуры дали толчок развитию теории модулярных форм и автоморфных функций, что привело к доказательству Уайлсом теоремы Ферма.

Заметный вклад Вейль внес в развитие алгебраической геометрии, которую сумел строго и грамотно обосновать. В функциональном анализе Вейль получил важные результаты в области теории меры и интегрирования в топологических группах, а также в алгебре, дифференциальной геометрии, группах Ли, анализе и истории математики.

В 1979 г. А. Вейль был награжден премией Вольфа. Из его учеников наиболее известны П. Картье и П. Свиннертон-Дайер. Вейля считали необычайно одаренным и обаятельным человеком с потрясающим чувством юмора. Он был членом нескольких иностранных академий, но сам выступал против присуждения наград за академические достижения.

Андре Вейль скончался 6 августа 1998 г. в Принстоне.

Клод Шевалле

Шевалле Клод родился 11 февраля 1909 г. в Йоханнесбурге (ныне Южно-Африканская республика) в семье французского дипломата. В 1929 г. он окончил Высшую нормальную школу в Париже, затем учился у немецких математиков Э. Артина и Г. Хассе. Степень доктора Шевалле получил в Парижском университете в 1933 г.

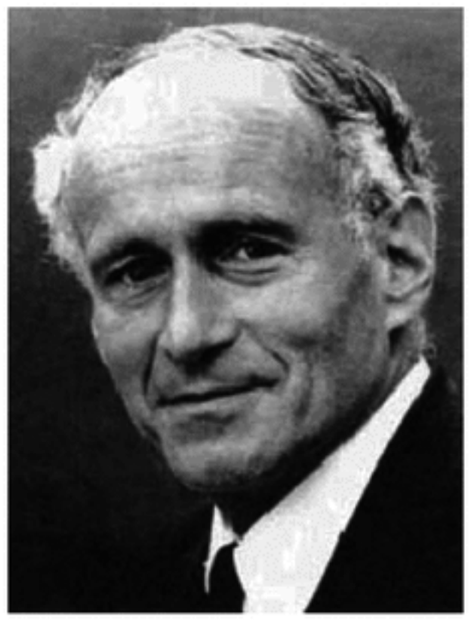
В годы Первой мировой войны погибло большинство молодых французских математиков. Послевоенная молодежь была озабочена утратой традиций и времени, когда французских математиков считали «универсальными» математиками. Удручало увеличивающееся отставание от немецких коллег, которые практически не участвовали в войне. Для ликвидации этого отставания и была создана группа Н. Бурбаки. Одним из ее основателей был Клод Шевалле.

В начале Второй мировой войны в 1939 г. Шевалле уехал в США. Там он работал сначала в Принстонском, а с 1948 г. – в Колумбийском университете. С 1949 по 1957 г. Шевалле был профессором Колумбийского университета. Он получил американское гражданство, в 1954 г. вернулся во Францию, но должность профессора Парижского университета VII получил только в 1957 г.

Математические методы Шевалле отличались крайней абстрактностью. В алгебраической теории чисел его интересовала теория полей классов. В алгебраической геометрии он исследовал линейные алгебраические группы. Им развивалась теория конечных групп и теория групп Ли. Работы Шевалле оказали большое влияние на математиков, занимавшихся классификацией простых конечных групп, самыми трудоемкими исследованиями в алгебре XX в.

Умер Клод Шевалле 28 июня 1984 г. в Париже.

Лоран Шварц



Шварц Лоран родился 5 марта 1915 г. в Париже в семье хирурга. Лоран приходился двоюродным внуком известному французскому математику Жаку Адамару. Во время учебы в лицее, помимо геометрии, Шварц увлекался латынью и был победителем престижного соревнования по латыни среди лицеистов Франции. В 1934 г. он поступил в Высшую нормальную школу. Одновременно с ним в эту школу поступила Мари-Элен Леви, дочь математика Поля Леви, на которой Шварц женился в 1938 г. После окончания Высшей нормальной школы Шварц решил поступить на военную службу на два года и служил в армии до оккупации Франции Германией. Евреи, супруги Шварц вынуждены были по чужим документам под фамилией Селимартин покинуть оккупированную территорию и поселиться на юге Франции.

Лоран Шварц занимался исследованиями в области функционального анализа. Диссертация Шварца по теории распределений была защищена в 1943 г. в оккупированном немцами Страсбурге и опубликована в трудах Гренобльского университета в 1945 г. После года работы в Гренобле Шварц переехал в Нанси, где был принят в группу Бурбаки.

Теорией распределений Шварц называл то, что в работах Л.С. Соболева 1935–1936 гг. называлось теорией обобщенных функций. Теория распределений позволяет применять аппарат функционального анализа для исследования дифференциальных уравнений в частных производных. К началу 1930-х годов достоинства функционального анализа ярко проявились при исследовании интегральных уравнений. Настала очередь его использования в теории дифференциальных уравнений. Шварц развил результаты Соболева, за что 30 августа 1950 г. был удостоен премии и медали Филдса на Международном конгрессе математиков в Гарварде. Развернутые изложения новой теории были опубликованы в СССР и Франции практически одновременно. Первый том «Теории распределений» Шварца и книга Соболева «Некоторые применения функционального анализа в математической физике» вышли в 1950 г. Интуитивные догадки Хевисайда и Дирака получили теоретическое обоснование после работ Соболева и Шварца. Эти работы привели к расширению исследований линейных топологических пространств и обеспечили многие разделы математики мощными вычислительными методами. Позже Шварц усилил свои результаты, доказав (вместе с Ж. Дьёдонне) теоремы о двойственности в пространствах Фреше. Важное значение имеют его исследования в области топологии и математической физики.

В 1952 г. Шварц вернулся в Париж, где стал работать сначала в Сорбонне, а с 1959 по 1980 г. – в Политехнической школе. Затем три года он преподавал в Парижском университете, а после вышел на пенсию.

Следует отметить активную и разноплановую общественную деятельность Шварца. Он всю жизнь боролся против нарушения прав человека, угнетения и несправедливости, протестовал против сталинских репрессий,

войны во Вьетнаме, против ввода советских войск в Афганистан, против преследования математиков во Франции по политическим мотивам. Его даже увольняли с работы на два года, которые он прожил в Нью-Йорке, но затем восстановили в прежней должности. Среди учеников Шварца наиболее известен А. Гротендик.

Шварц был страстным коллекционером бабочек. Его коллекция насчитывала более 20 000 экземпляров. На русский язык переведены следующие книги Л. Шварца: «Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными» (1964), «Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике» (1964), «Математические методы для физических наук» (1965), «Анализ» (1972).

Скончался Лоран Шварц 4 июля 2002 г. в Париже.

Жан-Пьер Серр

Серр Жан-Пьер родился 15 сентября 1926 г. в Баже, на юге Франции. После лицея в 1945 г. он поступил в Высшую нормальную школу в Париже, которую окончил в 1948 г. В том же году Серр поступил на работу в Национальный Центр Научных исследований в Париже. Степень доктора Сорбонны он получил в 1951 г. Под руководством Анри Картана он занимался алгебраической топологией и теорией функций комплексного переменного. Применяя созданный Жаном Лере метод спектральных последовательностей, он добился принципиально новых результатов в вычислении гомотопических групп сфер, важной проблемы топологии того времени. Вместе с Картаном на основе использования пространств Эйленберга – Маклейна. Серр создал новую методику в классической задаче топологии – задаче вычисления гомотопических групп сфер.

В работе «Analysis Situs» (1895) Пуанкаре ввел понятие фундаментальной группы. В 1935 г. Витольд Гуревич, используя результат Хопфа 1931 г., ввел определение n-мерной гомотопической группы, явившееся естественным n-мерным обобщением фундаментальной группы. Огромный шаг в вычислении гомотопических групп был сделан Л.С. Понтрягиным, создавшим в 1950 г. теорию оснащенных многообразий. Через четыре года методы теории оснащенных многообразий стали основой теории кобордизмов.

До выхода в свет работ Серра имелись первоклассные, но несистематизированные результаты в этой области. В своей диссертации в 1951 г. Серр доказал несколько общих теорем. Он не только повторил результаты Понтрягина, Уайтхеда и Рохлина, но и получил новые результаты. Им решены также трудные задачи, связанные с вычислением гомотопических групп, классических групп Ли. За эти работы он первым из топологов получил медаль Филдса в 1954 г. на Международном конгрессе математиков в Амстердаме. Серр является самым молодым ученым, награжденным премией Филдса.

Хотя основные достижения Серра в начале 1950-х годов связаны с топологией, в круг его интересов вошла и теория комплексных пространств. В 1945 г. Жан Лере, находившийся во время Второй мировой войны в концлагере, ввел ряд определений, связанных с тонкими свойствами аналитичности. Он изучил когомологии комплексных пространств с коэффициентами в пучках голоморфных функций. Далее им были развиты алгебраическая топология и геометрия. Серр с А. Картаном получили важные результаты в теории аналитических пучков. В 1955 г. в работе «Когерентные аналитические пучки» Серр сформулировал гипотезу о строении проективных модулей над кольцом непрерывных функций. В этой работе впервые идеи гомологической алгебры были широко применены для исследования алгебраических многообразий. Суть гипотезы Серра состоит в том, что с помощью определенного подбора полиномиального кольца – аналога поля коэффициентов – проективный модуль можно сделать свободным, т. е. ввести в него глобальный базис.

В работах Серра были изучены когомологии комплексных пространств с коэффициентами в пучках голоморфных функций. Теоремы о структуре некоторых классов когомологий аналитических пространств вошли в литературу как теоремы двойственности Кодаиры – Серра. В дальнейшем именно в область алгебраической геометрии и арифметики сместились интересы Серра. Им получены первоклассные результаты в теории p-адических групп, модулярных функций и т. д. [56].

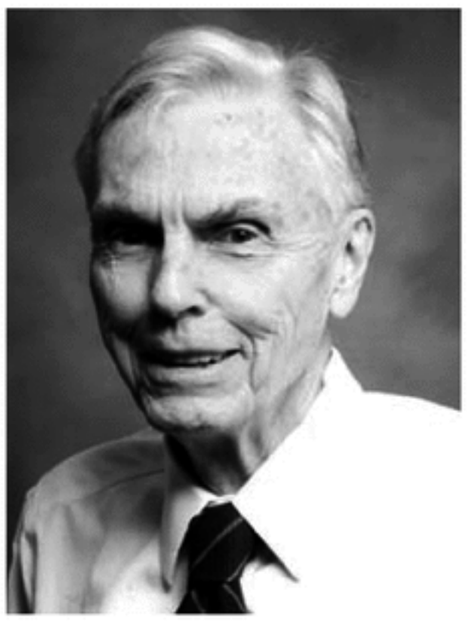
Активно работая в составе коллектива Бурбаки, в котором он был одним из лидеров в течение двух десятилетий, Серр тесно сотрудничал с Александром Гротендиком и Пьером Делинем по вопросам теории пучков при исследовании гипотез, сформулированных А. Вейлем. Эти гипотезы указывали на связь дискретного мира алгебраических многообразий с непрерывным миром топологии. Работая в этом направлении, Серр также получил значительные результаты.

В 1956 г. Серр стал профессором Коллеж де Франс и Парижского университета. Основные его труды относятся к алгебре, алгебраической геометрии и топологии многообразий. С 1959 г. он заинтересовался теорией чисел, в частности теорией полей классов. В 1960 г. Серр избран членом Американской академии искусств и наук в Бостоне, в 1976 г. – членом Парижской академии наук.

В 1986 г. издательство «Шпрингер» выпустило собрание трудов Серра в трех томах. Серр награжден многими математическими премиями, в том числе премией Вольфа в 2000 г., а в 2003 г. он стал первым обладателем премии Абеля. Только Жан-Пьер Серр, Джон Томпсон и Джон Милнор являются одновременно обладателями медали Филдса, премии Вольфа и премии Абеля.

На русский язык переведены следующие работы Серра: «Алгебраические группы и поля классов» (1968), «Когомологии Галуа» (1968), «Алгебры Ли и группы Ли» (1969), «Линейные представления конечных групп» (1970), «Курс арифметики» (1972), «Абелевы p-адические представления и эллиптические кривые» (1973).

Джон Тейт



Тейт Джон Торренс родился 13 марта 1925 г. в Миннеаполисе (Миннесота) в семье профессора физики университета штата Миннесота и учительницы английского языка.

В 1946 г. Джон получил диплом физика в Гарвардском университете и поступил в аспирантуру Принстонского университета. Первый год аспирантуры он занимался физикой, но затем понял, что его истинным призванием является математика. Его научным руководителем стал Эмиль Артин.

В 1950 г. он защитил диссертацию, в которой применил гармонический анализ к теории чисел и был назначен научным сотрудником и преподавателем Принстонского университета.

В 1950–1960 гг. Тейт был активным участником группы Бурбаки, одним из немногих ее членов – не французов. Кроме работ, публиковавшихся под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки, за 1950–1953 гг. Тейт опубликовал несколько важных работ по теории полей классов и теории когомологий Галуа. Некоторые работы были написаны в соавторстве с Э. Артином, С. Ленгом и другими математиками. За одну из работ Тейт получил премию Коула по теории чисел от Американского математического общества в 1956 г. Он провел 1953/54 учебный год в качестве приглашенного профессора в Колумбийском университете. В 1954 г. он был назначен профессором Гарвардского университета и работал в этой должности 36 лет. В 1990 г. перешел в Университет Техаса в Остине.

Основные работы Тейта посвящены алгебраической геометрии и алгебраической теории чисел, к которой он применил методы функционального анализа. Его работы по теории полей классов и теории когомологий Галуа лежат в основе большей части современной теории чисел, алгебраической геометрии и теории представлений.

Многие основополагающие математические идеи были выдвинуты Тейтом и названы впоследствии его именем: модуль Тейта, кривая Тейта, цикл Тейта, разложение Ходжа – Тейта, когомология Тейта, теорема двойственности Тейта, параметр Серра – Тейта, группы Любина – Тейта, группы Шафаревича – Тейта, алгоритм Тейта для эллиптических кривых и т. д.

Тейт получил несколько международных математических премий и является членом многих академий. В 1969 г. он был избран в Национальную академию наук США, в 1992 г. – Парижскую академию наук, в 1999 г. – Лондонское математическое общество. Он был пленарном докладчиком на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 г.

Результаты Тейта использовал Эндрю Уайлс при доказательстве гипотезы Таниямы – Шимуры и связанной с ней Великой теоремы Ферма.

В 2000 г. Тейт принимал активное участие в работе Института Клэя по формулировке «Millenium Prize Problems». В 2003 г. он получил премию Вольфа «за создание фундаментальных понятий в теории алгебраических чисел».

На протяжении более четверти века идеи Тейта были определяющими в развитии алгебраической геометрии.

Активные занятия математикой Тейт прекратил в 2009 г. Премией Абеля Тейт награжден в 2010 г. за новаторские исследования, повлиявшие на современную математику. Церемония вручения премии, сумма которой составляет 6 млн норвежских крон (около 750 тыс. евро) состоялась в Осло 25 мая 2010 г.

Александр Гротендик

Гротендик Александр родился 28 марта 1928 г. в Берлине в семье анархистов. Его отец, беженец из России, Александр Шапиро – активный участник революции 1905 г., был приговорен к смертной казни, замененной ввиду несовершеннолетия лишением свободы. Во время побега из тюрьмы был ранен в руку, которую пришлось ампутировать. В Германию Шапиро прибыл по подложным документам на имя Александра Танарова. Считая недопустимым для анархиста работать на эксплуататора, Шапиро стал уличным фотографом. Мать будущего математика Иоганна (Ханка) Гротендик родилась в бюргерской семье в Гамбурге, но воодушевившись идеями анархизма, уехала от родителей в Берлин, где писала статьи в «левые» газеты об авангардном искусстве и политике. Она имела дочь от первого брака. В знак протеста против буржуазных традиций родители Гротендика не регистрировали брак, поэтому он формально считался сыном матери-одиночки и носил ее фамилию. Это обстоятельство помогло ему сохранить жизнь при фашистском режиме.

Когда в 1933 г. власть в Германии захватил Гитлер, отцу Гротендика, еврею по происхождению, пришлось бежать во Францию. Вскоре за ним последовала и мать. Ребенка отдали на воспитание в семью Гейдорнов, живших в предместье Гамбурга. Родители принимали активное участие в Гражданской войне в Испании на стороне республиканцев. После победы Франко они вернулись во Францию. Из-за террора в Германии приемные родители Гротендика незадолго до начала войны были вынуждены отправить мальчика к родным матери и отцу.

В 1940 г. родители Гротендика и он сам были интернированы. Отца отправили в Освенцим, где он и погиб. Мать и сын оказались в лагере для интернированных в Риекро. Через два года их разлучили: Ханку отправили в другой лагерь, а Александр попал в детский дом в городе Шамбо на Линьоне, возглавляемый благотворительной организацией «Швейцарская помощь», которая спасала детей евреев, антифашистов и беженцев.

Когда война закончилась, мать нашла сына. Вместе они поселились в Монпелье, где Александр поступил в университет. Ему приходилось подрабатывать на сборе винограда, а мать нанялась домработницей. Гротендик заинтересовался точным определением длины, площади и объема. Считая определения в учебниках недостаточно строгими, он самостоятельно пришел к основным понятиям теории меры и интеграла Лебега.

После окончания университета в 1948 г. Гротендик приехал в Париж, чтобы продолжить образование. Когда Александра спросили, чем он занимался в Монпелье, тот рассказал о своих работах по теории меры. Увидев, что Гротендик самостоятельно совершил открытие, ранее сделанное Лебегом, ему рекомендовали продолжать научную деятельность. На семинаре Анри Картана Гротендику приходилось трудно из-за пробелов в образовании и плохого знания французского языка. Поэтому по совету А. Картана и Ж. Дьёдонне в 1949 г. он переезжает в Нанси, который в то время был одним из математических центров Франции. Там Александр был принят в круг бурбакистов. Под руководством Дьёдонне и Шварца Гротендик занимался исследованиями в области функционального анализа. Шварц сформулировал для него шесть проблем, каждая из которых могла стать темой диссертационного исследования. К определенному сроку все они были полностью решены. Наиболее важная из проблем легла в основу диссертации Гротендика, опубликованной в 1955 г. в виде монографии.

Все же у Гротендика были трудности с получением работы, поскольку он не имел гражданства, а при получении гражданства подлежал бы нежелательному для него призыву в армию. Гротендик уже собирался стать плотником, чтобы зарабатывать на жизнь и содержать больную мать, но в 1953 г. получил приглашение работать в Бразильском университете в Сан-Паулу. В 1955 г. он работал в Канзасском университете, но потерял интерес к функциональному анализу и начал заниматься алгеброй, особенно гомологической алгеброй и алгебраической геометрией. В 1956 г. Гротендик вернулся в Париж. Благодаря своему таланту он вскоре сделался наиболее авторитетным членом группы Бурбаки.

По воспоминаниям Гротендика, до 1954 г. ему случалось подолгу и безрезультатно биться над одним и тем же вопросом, после у него появилась привычка заниматься параллельно несколькими задачами. По мнению А. Гротендика, это давало положительный эффект: «В каждый момент я работаю лишь с одной, но при этом всякий раз случается чудо: всем прочим, казалось бы, лежащим без дела, мой труд неизменно идет на пользу» [32].

Параллельно с Серром Гротендик занимается теорией пучков, исследуя гипотезы, сформулированные А. Вейлем. Он обобщает теорему Римана – Роха, используя идеи созданной им алгебраической K-теории.

Наиболее плодотворным для Гротендика стал 1958 г. На Международном конгрессе математиков в Эдинбурге он сделал доклад, идеи которого легли в основу современной алгебраической геометрии. Гротендик был приглашен на работу в основанный в том же году Институт высших научных исследований (IHES).

Гротендик обладает редчайшей и ценнейшей для ученого способностью создавать новые понятия в науке. С его именем связывают переворот в алгебраической геометрии, повлиявший и на другие разделы математики. На основе понятия «схема» Гротендик практически перестроил всю алгебраическую геометрию. Ему удалось обобщить и уточнить многие классические конструкции алгебраической геометрии. Им основаны новые важные разделы алгебраической геометрии. Введенная Гротендиком концепция схем вывела

алгебраическую геометрию на совершенно другой уровень абстракции. В терминах *K*-функтора Гротендика, мотивов и других сложных понятий стало возможным решение как классических проблем алгебраической геометрии, так и проблем теории чисел, ранее не поддававшихся усилиям нескольких поколений математиков.

Для получения необходимых результатов в алгебраической геометрии Гротендик использовал теорию чисел и теоретико-множественную топологию, одновременно проводил исследования в гомологической алгебре и создавал алгебраическую *K*-теорию. Он научился «скрещивать» математические понятия и получать «работоспособные гибриды». Им получены важнейшие результаты в функциональном анализе, топологии и алгебре. Гротендик доказал много основополагающих теорем, например, обобщенную теорему Римана – Роха. Его основной вклад в математику заключается во введении общих фундаментальных понятий. Это выделяет его даже среди членов группы Бурбаки.

Изданная им в соавторстве с Дьёдонне книга «Элементы алгебраической геометрии», называемая математиками «Евангелием от Гротендика», оказала на алгебраическую геометрию такое же влияние, как труды Галуа на алгебру или труды Гаусса на теорию чисел. Не менее важным был организованный Гротендиком семинар по алгебраической геометрии, труды участников которого имели огромное значение. На основе алгебраической *K*-теории М. Атья и другие математики создали топологическую *K*-теорию.

За выдающийся вклад в алгебраическую геометрию Гротендик был награжден медалью Филдса, которую он должен был получить в 1966 г. в Москве на Международном математическом конгрессе. По политическим соображениям он отказался ехать в Москву.

Борьба Гротендика против несправедливости в политике и науке, когда признанными мэтрами ущемлялись права молодых ученых, вызывала недовольство влиятельных академических кругов. В результате чего он, лидер третьего поколения группы Бубраки, начал конфликтовать со своими учениками, составившими большинство четвертого поколения группы.

Институт высших научных исследований был организован в 1958 г. Первыми его сотрудниками были Дьёдонне и Гротендик. В конце 1969 г. Гротендик узнал, что институт, частью которого он себя ощущал, частично финансировался министерством обороны. Это было несовместимо с его представлениями о морали, поэтому он ушел из института [32].

В 1970 г. Гротендик забросил математику и удалился в Монпелье. Немного он еще занимался биологией, экологией и даже эзотерикой. В 1977 г. его привлекли к суду за предоставление жилья незаконному иммигранту. Лишь некоторые из бывших коллег и друзей поддержали его, большинство осталось равнодушными, а некоторые даже выступили против. В 1988 г. ему (вместе с его учеником П. Делинем) присудили премию Крафурда, от которой он отказался.

В августе 1991 г. Гротендик внезапно покинул свой дом, прекратил занятия математикой, общение со знакомыми и начал писать работы по физике и философии. Известно, что в 2007 г. он жил предположительно в районе Пиренеев.

На русском языке изданы следующие книги Гротендика: «О некоторых вопросах гомологической алгебры» (1961), «Теория когомологий абстрактных алгебраических многообразий» (1962), «Урожаи и посевы» (1999).

Жак Титс

Французский математик Титс Жак родился 12 августа 1930 г. в Уккле, на южной окраине Брюсселя, в семье профессора математики. Математический талант Жака проявился очень рано. В возрасте трех лет он уже умел производить все арифметические действия. В школе он перешагнул через несколько классов. Когда умер отец, Жаку было всего 13 лет. Мальчик, чтобы улучшить материальное положение семьи, стал заниматься репетиторством со студентами.

Титс сдал вступительный экзамен в Свободный университет в Брюсселе в 14 лет, а в 20 – защитил диссертацию и получил степень доктора. К этому времени у него уже была репутация блистательного ученого.

Профессором Свободного университета в Брюсселе Титс стал в 1962 г. и оставался в этой должности два года. Затем он переехал в Германию и стал профессором Боннского университета. В 1973 г. Титс дал согласие занять должность заведующего кафедрой теории групп в Коллеж де Франс и переехал в Париж. В этой должности он работал до выхода на пенсию в 2000 г. В 1974 г. он получил французское подданство и был избран в Академию наук Франции.

Научные интересы Титса связаны с теорией групп. Он развивал теорию Галуа и успел сделать очень многое. Им предложена новая, чрезвычайно важная интерпретация групп как геометрических объектов, введено понятие билдинга, позволяющее посредством геометрических терминов кодировать алгебраическую структуру линейной группы.

Теория билдингов является объединяющим принципом с удивительным рядом приложений, например, в классификации алгебраических групп и групп Ли, конечных простых группах, используемых физиками-теоретиками группах Каца – Муди, комбинаторной геометрии, а также в исследовании явлений жесткости в отрицательно изогнутых пространствах. Им доказана знаменитая альтернатива (альтернатива Титса), согласно которой всякая конечно порожденная линейная группа либо почти разрешима, либо содержит свободную неабелеву группу. Этот результат породил многочисленные вариации и приложения.

Жак Титс был почетным членом группы Николя Бурбаки. В его публикациях содержится удивительно много фундаментальных математических идей.

Титс не только лично занимается математическими исследованиями, но и играет важную роль в международном мире математики. Он был главным редактором математических публикаций во французском Институте высших

научных исследований в период с 1980 по 1999 г. В 1978 и 1994 г. Титс был членом Филдсовского комитета, а с 1985 г. – членом комитета, присуждающего премию Бальзана.

В 1992 г. Титс был избран иностранным членом Национальной академии наук США и Американской академии искусств и наук. Кроме того, он является членом Академий наук Голландии и Бельгии, а также почетным профессором Утрехтского, Гентского, Боннского и Леувенского университетов. В Коллеж де Франс его называют одним из самых влиятельных и оригинальных математиков современности.

Титс является обладателем многочисленных премий по математике таких, как премия Вольфа, медаль Кантора, Гран-при математических и физических наук и приз Веттрема. Он был удостоен звания «Рыцаря Почетного Легиона» в 1995 г. и офицера Национального ордена «За заслуги» в 2001 г. В 2008 г. ему совместно с Джоном Томпсоном присуждена премия Абеля за глубокие достижения в алгебре и развитие современной теории групп.

Глава 19

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

> Физика не может обойтись без математики, которая предоставляет ей единственный язык, на котором она может говорить… Взамен физика, ставя новые задачи, была столь же полезна математикам, как модель для художника.
>
> *А. Пуанкаре*

О проблемах теоретической физики

С точки зрения естествоиспытателей, математика является языком науки, описывающим реальность посредством символов. По словам Бертрана Рассела, математическая концепция дает абстрактную логическую схему, под которую можно подогнать подходящими манипуляциями эмпирический материал. Для физиков математика является «поставщиком» абстрактных конструкций для теоретического моделирования физических наблюдений. Физики пытаются применить любое внутренне непротиворечивое, абстрактное математическое построение. Когда же таких конструкций не хватает, они их изобретают.

Теоретическая физика решает задачи, сходные с задачами математической физики. Однако физик-теоретик продумывает свои идеи с точки зрения физического смысла, тогда как в математической физике главный критерий – красота математической структуры. В последние десятилетия наиболее важные новые математические результаты получены при решении задач теоретической физики. Современная теоретическая физика, особенно такие ее разделы, как теория струн и конформная теория поля, «поглощают» новейшие математические достижения с поразительной скоростью. Например, проблема классификации n-мерных комплексных многообразий является востребованной в задаче компактизации дополнительных степеней свободы в теории струн. Важной является также задача нахождения связей между вполне интегрируемыми динамическими системами и проблемой модулей алгебраических многообразий.

Физики всегда стремились постигать разнообразные явления природы с единых позиций. Достижению этой цели способствовали большие научные открытия, например объединение механики земной и небесной Исааком Ньютоном в XVII столетии, объединение оптики с теорией электричества и магнетизма Джеймсом Клерком Максвеллом в XIX столетии, создание Альбертом Эйнштейном теории относительности, объединяющей геометрию пространства-времени и гравитацию, объединение химии и атомной физики в квантовой механике в 1920-х годах. В начале XX в. физики верили, что все может быть понято с позиций механики сплошных сред. Это предположение было опровергнуто благодаря открытию строения атома и квантовой механики.

Одной из основных проблем было то, что две важнейшие физические теории, – теория относительности и квантовая механика – многократно доказавшие свою состоятельность на практике, никак между собой не состыковываются. Действительно, физики, изучавшие микроскопические объекты, атомы и ядерные процессы, использовали только уравнения квантовой механики. Физики, работавшие с гигантскими и массивными объектами Вселенной, изучавшие движение планет и светил, процессы, происходящие в звездах и т. п., использовали уравнения теории относительности. Но единой теории, объединяющей законы микро- и макромира, не было. Всегда применялась либо одна, либо другая теория.

Со временем стали появляться задачи, требующие объединения законов микро- и макромира, например при исследовании процессов в черных дырах или в момент Большого взрыва, когда огромные массы сжаты до микроскопических размеров. Эти экстремальные объекты и чудовищно массивны, и крошечно малы.

Физики начали искать то, что можно назвать «всеобщей теорией всего». Первым к поискам приступил Альберт Эйнштейн в 1930-е годы. Он не признал квантовую механику и посвятил последние 30 лет своей жизни безрезультатному поиску единой теории поля, которая объединила бы общую теорию относительности (теорию пространства-времени и гравитации) с теорией электромагнетизма Максвелла. Эйнштейн посвятил созданию единой теории поля не только половину своей жизни, но и пожертвовал политической карьерой. Его, как одного из самых активных поборников создания Израиля, приглашали стать первым президентом этого государства. Эйнштейн отказался от этого предложения только для того, чтобы продолжить заниматься физикой.

Материя Вселенной считается разделенной на две части: частицы «вещества», такие как кварки, электроны, мюоны и т. д., и «взаимодействия», такие как гравитация, электромагнетизм и т. п. Частицы «вещества» разделены на две группы: адроны, состоящие из кварков, и лептоны, куда входят все оставшиеся частицы. Частицы «взаимодействия» разделены на четыре вида. Первым, в порядке убывания их силы, является сильное ядерное взаимодействие между адронами. Далее – электромагнитные силы между заряженными адронами и лептонами. Затем – слабые ядерные взаимодействия, возникающие между любыми адронами и лептонами. И, наконец, значительно более слабая сила – гравитация, которой подвержено все.

Одной из важнейших проблем теоретической физики является проблема создания полной непротиворечивой единой теории физических взаимодействий, которая описывала бы все возможные данные наблюдений. Открытие объединенной теории, описывающей природу в условиях любых энергий, позволит нам ответить на самые важные вопросы космологии.

Стандартная модель физики элементарных частиц

Квантовая механика. Общая теория относительности и электродинамика Максвелла были классическими теориями, т. е. имели дело с непрерывными величинами, которые могли быть измерены с любой точностью. Когда

попытались применить эти теории для построения модели атома, возникли проблемы. Было обнаружено, что атом состоит из небольшого положительно заряженного ядра, окруженного облаком отрицательно заряженных электронов. Если электроны вращаются по орбитам вокруг ядра подобно Земле, вращающейся по орбите вокруг Солнца, то они должны излучать электромагнитные волны. Эти волны уносят энергию, и электрон должен по спирали падать на ядро, что приведет к коллапсу атома.

Указанная трудность была преодолена благодаря открытию квантовой теории, основным постулатом которой является принцип неопределенности Гейзенберга, утверждающий, что определенные пары физических величин, как, например, положение и импульс частицы, не могут быть одновременно измерены с любой точностью. В случае с атомом это означает, что электрон в состоянии с наименьшей энергией не может упасть на ядро и покоиться там, так как тогда его положение и скорость могли быть определены точно. Вместо этого электрон должен быть «размазан» с некоторой вероятностью вокруг ядра.

В 20–30-х годах XX в. квантовая механика с большим успехом применялась в исследовании систем с конечным числом степеней свободы, таким как атомы или молекулы. Однако ее применение к электромагнитному полю, имеющему бесконечное число степеней свободы, дает бесконечные значения для массы и заряда электрона.

Перенормирование. Для преодоления указанной трудности в конце 1940-х годов была развита так называемая процедура перенормирования. Она заключалась в относительно произвольном вычитании некоторых бесконечных величин, после чего получались конечные остатки. Основой перенормирования стало применение в квантовой механике интеграла по траекториям, предложенного Дираком в 1933 г. Ричард Фейнман в 1947 г. ввел континуальный интеграл по траекториям, позже названный его именем, и разработал формулы для его применения. Он создал диаграммы, которые стали основным вычислительным аппаратом квантовой электродинамики и получили название «диаграммы Фейнмана». Континуальный интеграл широко используется в квантовой теории поля, теории струн и статистической физике, а также при изучении многих классов стохастических процессов в математике, хотя доказательство корректности его определения в достаточно общем случае отсутствует.

В электродинамике необходимо было введение процедуры перенормирования: для массы электрона и для его заряда. Процедура перенормирования никогда не основывалась на достаточно прочном математическом или теоретическом фундаменте, но она прекрасно работала на практике.

В 50–60-е годы XX в. ученые считали, что слабые и сильные ядерные взаимодействия неперенормируемы, т. е. требуют бесконечного числа вычитаний. Природа слабого взаимодействия по-прежнему оставалась во многом непонятной. Еще менее понятной казалась природа сильного взаимодействия.

Симметрия в физике. Важную роль в создании объединяющих теорий сыграло применение в фундаментальной физике симметрии в достаточно общем смысле. Обычно считают, что предмет обладает симметрией, если

он остается неизменным в результате той или иной проделанной над ним операции. Симметрия в фундаментальной физике – это инвариантность законов физики относительно любых изменений траектории движения. С этой точки зрения гравитационное взаимодействие представляет собой проявление локальной калибровочной симметрии, лежащей в основе законов реального мира. Эта симметрия гарантирует равноправие всех возможных точек наблюдения и всех возможных систем отсчета. Подобно тому, как сфера обладает вращательной симметрией и выглядит одинаково независимо от того, как мы вращаем ее в руках и под каким углом на нее смотрим, так и Вселенная обладает симметрией сильного взаимодействия: физические явления не изменятся при сдвигах зарядов этого взаимодействия. Физики считают, что симметрия сильного взаимодействия является примером калибровочной симметрии.

Как только природу сильного взаимодействия удалось объяснить на основе взаимодействия кварков, математически стало легче моделировать этот тип взаимодействия.

В середине января 1983 г. была открыта *W*-частица, переносчик слабого взаимодействия. Всякий раз, когда ученым удается установить новые связи, расширяется представление о мире. Связи – это одновременно и синтез знания, и стимул, направляющий научные исследования по новым, непроторенным тропам.

Таким образом, в 1960-е годы каждое из четырех взаимодействий описывалось с помощью своей теории, из которых только одну – квантовую электродинамику (КЭД) – можно было считать во всех отношениях удовлетворительной. Теоретики стали размышлять, в чем же секрет КЭД. Какими особенностями электромагнитного поля, не свойственными другим силовым полям, обусловлен успех квантового описания? Если бы удалось выявить эти особенности, то теории других взаимодействий можно было бы усовершенствовать.

Объединение электромагнетизма и слабого взаимодействия. Пути объединения электромагнитного и слабого взаимодействия были найдены в 1967 г. двумя физиками, работавшими независимо, – Стивеном Вайнбергом из Гарвардского университета и Абдусом Саламом из Империал-колледжа в Лондоне, – опиравшимися на более раннюю работу Шелдона Глэшоу. Суть разработанной ими теории состоит в описании слабого взаимодействия на языке концепции калибровочного поля. В основе решения лежала остроумная идея, получившая название спонтанного нарушения симметрии. На этот раз симметрия была калибровочной, а не вращательной, и спонтанное нарушение соответствовало квантовому состоянию силовых полей. Таким образом, в теории Вайнберга и Салама поля по-прежнему имеют фундаментальную симметрию, но не могут нормально существовать в состоянии, обладающем этой симметрией, так как такое состояние неустойчиво. Поэтому поле выбирает устойчивое состояние, в котором симметрия нарушена, а частицы – переносчики слабого взаимодействия – обладают массой. Симметрия по-прежнему присуща фундаментальным законам, но не проявляется в реальном состоянии системы. Именно поэтому физикам не удавалось обнаружить эту

крайне важную калибровочную симметрию в течение 35 лет исследований слабого взаимодействия.

Чтобы получить решающее спонтанное нарушение симметрии, Вайнберг и Салам ввели в теорию дополнительное поле Хиггса, названное в честь Питера Хиггса из Эдинбургского университета, который ранее изучал спонтанное нарушение симметрии в физике элементарных частиц. Открытие в 1983 г. *W*- и *Z*-частиц означало торжество теории Вайнберга – Салама. Не было больше нужды говорить о четырех фундаментальных взаимодействиях. Казавшиеся при поверхностном рассмотрении никак не связанными между собой электромагнитное и слабое взаимодействия в действительности оказались компонентами электрослабого взаимодействия. За выдающиеся достижения Вайнберг и Салам были удостоены в 1979 г. Нобелевской премии по физике, разделив ее с Шелдоном Глэшоу из Гарвардского университета, который ранее заложил основы этой теории. Однако сам Глэшоу заметил, что Нобелевский комитет в действительности пошел на риск, так как в то время не было ускорителя частиц на энергию, достаточно большую, чтобы проверить теорию экспериментально.

Создание стандартной модели физики элементарных частиц. Успех теории Вайнберга – Салама инициировал поиски аналогичной перенормируемой теории сильных взаимодействий. Возникла идея дальнейшего объединения – слияния сильного взаимодействия с электрослабым.

Сильное взаимодействие испытывают протоны и нейтроны, но не электроны, нейтрино и фотоны. В сильном взаимодействии участвуют только более тяжелые частицы. Оно проявляется и как обычное притяжение, позволяющее сохранить целостность ядра, и как слабая сила, вызывающая распад некоторых нестабильных частиц. Создавалось впечатление, что сильное взаимодействие представляет собой сплав взаимодействий с различными свойствами.

В начале 1960-х годов была предложена кварковая модель. Пришло осознание того, что протон и другие адроны, скажем π-мезон, не могут быть истинно элементарными частицами, но должны быть связанными состояниями других частиц, называемых кварками. По-видимому, кварки обладают любопытным свойством: они всегда появляются либо тройками (как в протоне или нейтроне), либо парами, состоящими из кварка и антикварка (как в π-мезоне). Чтобы это объяснить, кварки были наделены характерным признаком, называемым цветом. Стоит заметить, что этот термин не имеет ничего общего с общепринятым понятием цвета: кварки слишком малы, чтобы их можно было наблюдать в лучах видимого света. Цвет – это просто удобное название. Идея состоит в том, что кварки могут быть трех цветов (например, красного, зеленого и голубого), но любое наблюдаемое связанное состояние (адрон) должно быть бесцветным. Это достигается либо смесью всех трех цветов, как в протоне, либо смесью красного и антикрасного и т. д., как в π-мезоне. Сильные взаимодействия переносятся глюонами. Глюоны также несут цвет и вместе с кварками описываются перенормируемой теорией, называемой квантовой хромодинамикой. Введение кварков упростило разработку математической модели сильного взаимодействия.

После того, как кваркам были приписаны цвета, теория сильного взаимодействия развивалась по тому же сценарию, что и теория слабого взаимодействия. Сильному взаимодействию должно соответствовать калибровочное поле с детально разработанной симметрией, достаточно широкой, чтобы охватить все калибровочные симметрии. Отыскание такой симметрии – задача математики. Требование локальной калибровочной симметрии – инвариантности относительно изменений цвета в каждой точке пространства – приводит к необходимости введения восьми компенсирующих силовых полей. В 1973 г. Шелдон Глэшоу и Говард Джорджи опубликовали теорию, в которой новое электрослабое взаимодействие сливалось с сильным в единое взаимодействие. В настоящее время существует несколько конкурирующих подобных теорий, основная идея которых состоит в том, что кварки, источники (носители) сильного взаимодействия, и лептоны, источники (носители) электрослабого взаимодействия, включаются в единую теоретическую схему. До сих пор кварки и лептоны рассматривались как различные объекты, так что их включение в единую теорию было новой идеей. Оно ознаменовало еще один важный шаг на пути к объединению. Так была создана «стандартная модель физики элементарных частиц». Расчеты показали, что сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия в некоторый момент существования Вселенной были одним видом и, по мере остывания вещества Вселенной, разошлись.

Квантовая гравитация. Включить в эту теорию гравитационное взаимодействие не удалось. Описывающая ее общая теория относительности блестяще подтверждается в космических масштабах и плохо работает в мире элементарных частиц, где господствует квантовая механика.

В теоретической физике направление исследований, проводимых с целью объединения гравитации с остальными фундаментальными взаимодействиями называют квантовой гравитацией. Прямые эксперименты в области квантовой гравитации не доступны современным технологиям, поэтому исследования сводятся к разработке адекватного математического аппарата. Наиболее перспективными являются теория струн и петлевая квантовая гравитация. Рассматриваются также теория твисторов и причинная динамическая триангуляция. Несмотря на многочисленные попытки, теория квантовой гравитации пока не построена.

Теория твисторов. На Международном математическом конгрессе 1978 г. в Хельсинки Роджер Пенроуз выступил с пленарным докладом «Комплексная геометрия реального мира». Основная идея доклада заключалась в том, что точки четырехмерного пространства-времени можно интерпретировать как комплексные прямые в трехмерном комплексном пространстве. Эта идея разрабатывалась Пенроузом с конца 1960-х годов в рамках его «твисторной программы». Твисторами он называет точки вспомогательного трехмерного комплексного пространства. В упрощенном виде твистор можно представить как световой луч в обычном пространстве-времени (пространстве Минковского). Луч можно рассматривать как примитивную причинную связь между парой событий (т. е. точек в пространстве-времени).

Теория твисторов представляет собой математическую схему для переструктурирования пространства-времени, в котором отдельные точки рассматриваются не как фундаментальное абстрактное понятие, а как «сечения» лучей света, полагаемых более фундаментальными вещами, чем отдельные точки. Точки пространства-времени лишаются той привычной роли, которую они всегда играли в физической теории. Пространство-время становится вторичной конструкцией, построенной из более примитивных твисторных элементов. Теория твисторов, как и теория струн, оказала значительное влияние на чистую математику.

С точки зрения математики, теория твисторов – это геометрический аппарат для новых математических методов работы с нелинейными уравнениями. С точки зрения физики, теория твисторов претендует на роль «теории всего». При ее развитии удалось найти твисторную интерпретацию решений многих фундаментальных уравнений релятивистской физики. Одной из ее особенностей является то, что на пространство-время не налагается условие дискретности. Развивая теорию твисторов, Э. Виттен начал заниматься теорией струн в твисторном пространстве, где вместо 26-мерного и 11-мерного пространств рассматривается четырехмерное.

Теорию твисторов нельзя считать основным направлением в теоретической физике. Одним из ее достоинств является то, что она, как и теория струн, оказала значительное влияние на математику.

Теория суперструн

Теория суперструн возникла из удивительного объединения трех частных теорий: теории Калуцы – Клейна, теории струн и супергравитации. Такое объединение выглядит потому удивительным, что оно приводит к разрешению определенных противоречий, которыми страдали каждая из этих теорий в отдельности.

Теория Калуцы – Клейна. На протяжении всей жизни Эйнштейн мечтал о создании теории поля, в которой все силы природы сливались бы воедино, основываясь на принципах чистой геометрии. Поискам такой теории Эйнштейн посвятил большую часть своей жизни после создания общей теории относительности. Однако ближе всех к реализации мечты Эйнштейна подошел малоизвестный польский физик Теодор Калуца, который еще в 1919 г. заложил основы нового и неожиданного подхода к объединению физики. Он задался целью обобщить теорию Эйнштейна, включив электромагнетизм в геометрическую формулировку теории поля. Это нужно было сделать, не нарушая уравнений теории электромагнетизма Максвелла.

Чтобы включить электромагнетизм в общую теорию относительности, Калуца решил считать его дополнительным пространственным измерением, и предложил рассматривать пятимерное пространство-время. Он ввел в математическое уравнение Эйнштейна дополнительное измерение и обнаружил, что гравитация и электричество глубоко связаны между собой. Но это возможно при одном условии – в нашем трехмерном пространстве существуют еще одно какое-то дополнительное одномерное пространство.

Калуца отослал свою статью с расчетами Альберту Эйнштейну. Только через два года после получения статьи, хорошенько все пересчитав и обдумав, Эйнштейн согласился с Калуцей, и в 1921 г. идеи Калуцы стали известны другим физикам.

Теория Калуцы не только позволила объединить гравитацию и электромагнетизм, но и дала основанное на принципах геометрии описание обоих силовых полей. Так, электромагнитная волна (например, радиоволна) в этой теории не что иное, как пульсации пятого измерения.

В 1926 г. шведский физик Оскар Клейн предположил, что мы не замечаем дополнительного пятого измерения потому, что оно в некотором смысле свернулось до очень малых размеров. То, что мы обычно считаем точкой в трехмерном пространстве, в действительности является крохотной окружностью в четвертом пространственном измерении. Из каждой точки пространства в направлении ни вверх, ни вниз, ни вбок, ни куда-либо еще в воспринимаемом нами пространстве выходит небольшая «петелька». Мы не замечаем всех этих «петель» вследствие крайней малости их размеров.

Клейн вычислил периметр петель вокруг пятого измерения, используя известное значение элементарного электрического заряда электрона и других частиц, а также величину гравитационного взаимодействия между частицами. Он оказался равным 10^{-32} см, т. е. в 10^{20} раз меньше размера атомного ядра. Поэтому неудивительно, что мы не замечаем пятого измерения: оно «скручено» в масштабах, которые значительно меньше размеров любой из известных нам структур, в том числе в физике субъядерных частиц. Очевидно, в таком случае не возникает вопроса о движении, скажем, атома в пятом измерении. Скорее это измерение следует представлять себе как нечто находящееся внутри атома.

Последующий анализ гипотезы Калуцы показал, что она противоречит экспериментальным данным. Попытки включить в эту теорию электрон приводили к такому отношению массы электрона к его заряду, которое существенно отличалось от реальных значений. В то время способов разрешения этой проблемы не было, и большинство физиков потеряли интерес к предложенной Калуцей гипотезе пятимерного пространства.

После открытия в 1930-е годы слабых и сильных взаимодействий идея объединения гравитации и электромагнетизма в значительной мере потеряла свою привлекательность. Последовательная единая теория поля должна была объединить уже не две, а четыре силы. Очевидно, это невозможно было сделать, не постигнув сути слабого и сильного взаимодействий.

Квантовая теория поля и матрица рассеяния. История физики высоких энергий может быть представлена в виде истории двух конкурирующих исследовательских программ: квантовой теории поля (КТП) и матрицы рассеяния (*S*-матрицы).

КТП разрабатывалась в конце 1920-х годов как квантовая теория взаимодействия излучения и вещества. Работы Дирака 1927–1928 гг., Гейзенберга и Паули 1929 г. подтвердили состоятельность гипотезы о возникновении частиц из квантовых полей, а также возможность описания взаимодействия

между полями в терминах обмена частицами. Первая версия КТП столкнулась с проблемой расходимостей, приведшая к двум разным точкам зрения. Сторонники первой полагали, что КТП не верна, и ее следует заменить другой теорией. Приверженцы второй настаивали на неполноте КТП и на том, что тщательное исследование расходимостей могло бы подсказать, как избавиться от них.

Гейзенберг, придерживавшийся первой точки зрения, в 1943 г. предложил рассматривать в качестве основного объекта теории *S*-матрицу, описывающую процесс перехода квантовомеханических систем из одних состояний в другие при их взаимодействии. Взаимодействие называют рассеянием, а *S*-матрицу – матрицей рассеяния. В теории *S*-матрицы не существует явного динамического уравнения: можно лишь сравнивать состояния взаимодействующих частиц до и после столкновения. Осуществление программы перенормирования превратило КТП в одну из наиболее успешных теорий. Новые идеи в теории дисперсии, предложенные в 1954 г. Гелл-Манном, Гольдбергером и Тирринго́м, и развитые в 1956 г. Боголюбовым, вновь повысили интерес к программе *S*-матрицы. Благодаря развитию квантовой хромодинамики, КТП вновь стала фаворитом в конце 1950-х годов. В 1969 г. Намбу, Нельсон и Сэскинд обнаружили, что дуальные модели, разрабатывавшиеся на базе теории *S*-матрицы, могут рассматриваться как описывающие движения релятивистской струны. Это открытие положило начало теории струн.

Теория бозо́нных струн. Основополагающая идея теории струн родилась в начале 70-х годов XX в. В 1974 г. Шварц и Шерк при изучении свойств струнных вибраций обнаружили, что эти свойства в точности соответствуют свойствам гипотетической частицы-переносчика гравитационного взаимодействия, которую называют гравитоном. Они пришли к выводу, что квантовая механика несоединима с гравитацией потому, что элементарные частицы априорно считаются бесконечно малыми точками. Ученые предположили, что все элементарные частицы являются вибрациями незримых нитей (струн), которыми заполнена Вселенная. Сами струны являются энергией в чистом виде, а все кирпичики мироздания возникают подобно звукам, рождаемым при колебании гитарной струны. Эта идея высказывалась и раньше, но не поддавалась математическому решению, так как струны отказывались вибрировать в трехмерном пространстве. Кроме того, теория струны содержала несуществующие частицы (тахионы) и безмассовые частицы со спином 1 или 2, которые не должны были встречаться при сильных взаимодействиях.

Так была создана теория бозонных струн, которая является первым вариантом теории струн. Первоначальные модели включали как открытые струны, т. е. нити, имеющие два свободных конца, так и замкнутые, т. е. петли. Эти типы струн ведут себя по-разному и генерируют два различных спектра.

Теория бозонных струн не лишена проблем. Спектр частиц ограничивается только бозонами. Бозоны – это важная составляющая мироздания, но в состав Вселенной входят также фермионы.

Возникновение теории суперструн. Британский физик Майкл Грин и Джон Шварц из Калифорнийского технологического института ввели в теорию струн суперсимметрию. Суперсимметрия представляет собой радикальное расширение пространственно-временной симметрии, объединяющее фермионы и бозоны. Абстрактное преобразование суперсимметрии связывает бозонное и фермионное квантовые поля так, что они могут превращаться друг в друга. Образно говоря, преобразование суперсимметрии может переводить материю во взаимодействие (или в излучение) и наоборот. На начало 2011 г. суперсимметрия является физической гипотезой, не подтвержденной экспериментально. Теории, включающие в себя фермионные вибрации струн, называют суперструнными теориями.

Суперсимметрия ведет к удвоению числа фундаментальных частиц, поэтому каждой частице соответствует ее «суперпартнер». Частицы с нулевой массой покоя и со спином 2 рассматривались в качестве гравитонов, а теория струн трактовалась как описывающая квантовую гравитацию. Это было началом теории суперструн, в которой не было тахионов. Безмассовые частицы со спином 1 и 2 рассматривались как калибровочные бозоны и гравитоны соответственно. Летом 1984 г. на симпозиуме физиков Грин и Шварц показали коллегам, что можно объединить теорию гравитации и квантовую механику, основываясь на теории струны. То, что нельзя было соединить прежде, оказалось легко связать лишь в десятимерном пространстве. Так через десятилетия возродился интерес к теории Калуцы – Клейна.

В теории струн роль физического пространства-времени играет 26-мерное пространство (так называемая бозонная струна) и 10-мерное пространство (фермионная струна). Дополнительные пространственные измерения не могут быть свернуты произвольным образом: уравнения теории струн существенно ограничивают геометрическую форму, которую они могут принимать. Условиям уравнений удовлетворяет один конкретный класс многомерных геометрических объектов – пространство Калаби – Яу (или многообразие Калаби – Яу).

Согласно расчетам, длина струны равна 10^{-33} см. Было решено считать большую часть размерностей бесконечно малыми величинами. Они свернуты в крохотные клубочки величиной с саму струну и недоступны для измерения. Значит, в любой точке четырехмерного пространства-времени должен скрываться клубочек свернутых размерностей, которые, хотя и невидимы, определяют свойства элементарных частиц (например, массу и электрический заряд).

Сразу после Большого взрыва десятимерное пространство свернулось в крохотный шар. Затем четыре размерности вытянулись, образовав мир, в котором мы живем. Остальные шесть размерностей остались незримыми.

В середине 1980-х годов физики пришли к выводу, что суперсимметрия, являющаяся центральным звеном теории струн, может быть включена в нее не одним, а двумя способами, что приводит к пяти различным теориям струн. Все они формируются в десятимерном пространстве-времени, однако различаются набором частиц и калибровочной группой симметрии.

Только одна из пяти теорий струн могла претендовать на роль «теории всего», причем та, которая при низких энергиях и компактифицированных шести дополнительных измерениях согласовывалась бы с реальными наблюдениями. Оставались открытыми вопросы о том, какая именно теория более адекватна и что делать с остальными теориями.

M-теория. В 1995 г. профессор Принстонского университета Эдвард Виттен на конференции физиков в Лос-Анджелесе предложил считать, что пространство изначально имеет одиннадцать размерностей. Частными случаями являются различные десятимерные вселенные, соответствующие разным концепциям. Внутри 11-мерного пространства имеются многомерные мембраны – так называемые p-браны, обладающие p-размерностью. Следовательно, 0-брана – точка в пространстве, 1-брана – струна, 2-брана – плоскость, называемая мембраной. По аналогии истолковываются браны более высоких размерностей. Так колебания струн были заменены вибрациями мембран. Предложенную Виттеном теорию стали называть *M*-теорией.

Основными особенностями теории суперструн являются согласованность, единство, симметрия, простота, доступная математизация, причем единство, симметрию и простоту можно назвать критерием красоты. Нет сомнений в том, что именно Красота служит источником вдохновения ученых. В некоторых случаях, когда дальнейший путь неясен, математическая красота и изящество ведут ученых к истине. Ученые интуитивно чувствуют, что природа предпочитает красивые решения. Поль Дирак однажды сказал, что красота уравнений важнее, чем их согласие с экспериментом. Он имел в виду, что воображение может привести к созданию теории столь привлекательной, что физики не будут сомневаться в ее истинности до проведения экспериментальной проверки и не отвергнут теорию, даже столкнувшись с противоречащими ей экспериментальными данными.

Теоретики не располагали новыми результатами экспериментальных данных, еще не были сформулированы исходные физические принципы, лежащие в основании теории, в то время как математический аппарат теории суперструн уже достиг более высокого уровня, чем это имело место в теориях до сих пор. Никогда еще математика не играла столь важной роли для физики, как в теории суперструн.

Теория суперструн не пересматривает законы физики, но вносит существенные дополнения в наше представление о реальности. У каждого взаимодействия есть своя частица, с помощью которой это взаимодействие переносится. Электромагнитное взаимодействие переносится фотонами, сильное взаимодействие – глюонами, слабое – бозонами. Однако чем переносится гравитация? Ранее физики предположили, что существует частица, переносящая гравитацию, и назвали ее гравитоном. Каково же было удивление ведущих теоретиков, когда в молодой теории суперструн было теоретически подтверждено существование частицы, обладающей нулевой массой и двойным спином, т. е. характеристиками гравитона. С этого момента и началось признание теории суперструн.

В соответствии с теорией суперструн, процесс возникновения Вселенной происходил так. Изначально Вселенная имела «планковский размер» (10^{-33} см) и состояла из свернутого 11-мерного пространства. Все измерения равноправны и симметричны. На эту поверхность намотаны струны, которые держат крошечный 11-мерный комок как в панцире. Струны бегают по поверхности в разные стороны и встречаются друг с другом. Если этот процесс идет активно, то колеблющаяся струна может встретить струну, намотанную в другом направлении (антиструну). В результате обе струны аннигилируют и образуют ненамотанную струну, которая уже не может выступать в роли сдерживающего панциря. Если таких встретившихся струн будет много, то некоторые измерения могут перестать сдерживаться и начать расширяться.

Физики показали, что вероятность столкновения двух намотанных струн является высокой только для случая трех пространственных измерений (и одного временного). Именно поэтому вероятность развертывания только трех пространственных измерений из этого первоначального 11-мерного комка самая высокая. Возможно, что все так и произошло, и в какой-то момент эти измерения начали расширяться и расширяются до сих пор. Остальные семь измерений так и остались свернутыми.

Теорию струн и суперструн исследуют многие математики, в том числе лауреаты медали Филдса. Они используют математический аппарат различных разделов математики, развивая и совершенствуя его.

Завершить детальное математическое описание *M*-теории пока не удалось. Однако теория струн уже применяется в практических целях, например, при описании свойств черных дыр. В 2003 г. выяснилось, что существует множество способов преобразовать десятимерные суперструнные теории в четырехмерную эффективную теорию поля. Оставалось неясным, какой из возможных путей предпочтителен. Каждый из вариантов редукции десятимерной теории порождает свой четырехмерный мир, который может напоминать, а может и отличаться от мира, который мы наблюдаем. Всю совокупность возможных реализаций низкоэнергетического мира из исходной суперструнной теории называют ландшафтом теории.

Результаты теоретических исследований физиков требуют экспериментальной проверки. Сравнивая физику и математику, В.И. Арнольд сказал, что физика отличается от математики тем, что в ней эксперимент стоит миллиарды долларов, а в математике – копейки. Следует, однако, подчеркнуть, что не существует даже намека на экспериментальное подтверждение теории струн. Никогда еще столь блестящий математический аппарат не был создан физиками при столь слабой экспериментальной поддержке. Оказывается, количество таких вариантов огромно. Каков бы ни был наш мир, всегда найдется способ свести его описание к суперструнной теории. Таким образом, суперструнная теория не только не противоречит современным экспериментальным данным, но и не будет противоречить никакому эксперименту в обозримом будущем.

Физики надеются, что ответы на многие вопросы они получат благодаря Большому адронному коллайдеру, который расположен в туннеле,

пролегающем под землей на границе Франции и Швейцарии. Ученые верят, что коллайдер, запущенный 10 сентября 2008 г., сможет открыть некоторые суперсимметричные частицы. Это было бы серьезной поддержкой теории струн и помогло бы прояснить структуру Вселенной. Если надежды ученых оправдаются, тогда теория суперструн будет определять развитие физики на ближайшие десятилетия.

Н.Н. Боголюбов

Боголюбов Николай Николаевич родился 8 августа 1909 г. в Нижнем Новгороде. Отец Боголюбова, Николай Михайлович, был преподавателем философии и психологии, профессором богословия. Мать, Ольга Николаевна, урожденная Ламинарская – преподавателем музыки. Все трое сыновей в семье Боголюбовых стали академиками. С пяти лет отец начал учить старшего сына Николая основам немецкого языка, затем французскому и английскому языкам.

Детство Николая прошло в революционные годы. Семья бедствовала. Образованием мальчика занимался отец. Вскоре у Николая обнаружились способности к точным наукам. Отец брал для сына книги в университетской библиотеке. У мальчика с детства была исключительная работоспособность. В СССР в то время существовали ограничения, не позволявшие детям «служителя культа» получить достойное образование, поэтому семья переехала в Украину. В 1921 г. Боголюбов окончил трудовую школу в селе Высокая Круча. Аттестат об окончании семилетки стал единственным документом об образовании, который он получил за всю жизнь.

К середине 1922 г. его знания по математике и физике почти равнялись полному университетскому курсу. В 1922 г. с матерью и младшим братом Алексеем Николай переезжает в Киев. В том же году мальчика заметил академик Н.М. Крылов. Можно представить удивление участников семинара, которым руководил Крылов, когда он привел на занятие 13-летнего подростка. Однако вскоре стало ясно, что в академический институт пришел отнюдь не новичок в математике. В 1924 г. Боголюбов опубликовал свою первую математическую работу «О поведении решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности». В 1925 г. без диплома о высшем образовании по специальному решению Совета народных комиссаров УССР 16-летний Боголюбов «ввиду феноменальных способностей по математике» был принят в порядке исключения в аспирантуру на кафедру математики при Академии наук УССР. В 1928 г. он защитил кандидатскую диссертацию на тему «О прямых методах вариационного исчисления». В 1930 г. она была удостоена премии Академии наук Болоньи. В 1930 г. Академия наук Украины присудила ему степень доктора математики без защиты диссертации. В 1936 г. степень была подтверждена Президиумом АН СССР. В 1929 г. Боголюбов стал научным сотрудником Украинской

академии наук, в 1934 г. начал преподавать в Киевском университете. В 1936 г. он получил звание профессора.

Первые работы Боголюбова посвящены прямым методам вариационного исчисления, теории почти периодических функций, приближенным методам решения задач математической физики. Уже в этот, начальный, период творчества Боголюбов стал широко известен. Отсутствие классического университетского образования вызывало у него определенные трудности во взаимоотношениях с другими математиками. Его работы находились под пристальным вниманием, подвергались строгим проверкам. Боголюбов не ошибался в полученных результатах, но в его доказательствах все же обнаруживались неточности. Это привело к тому, что Боголюбов с 1932 г. перешел к исследованиям в теоретической физике. Совместно с Н.М. Крыловым им создано новое направление механики, получившее название «нелинейная механика». Разработка новых методов теории нелинейных колебаний в работах Боголюбова и Крылова была связана с проблемой асимптотического интегрирования нелинейных уравнений. Боголюбов доказал ряд теорем для неконсервативных систем с малым параметром, позволивших строго исследовать вопросы существования и устойчивости квазипериодических решений. Важным этапом исследований по нелинейной механике явилась работа Боголюбова «О некоторых статистических методах в математической физике», написанная в 1945 г. В дальнейшем им были развиты метод усреднения и метод интегральных многообразий, ставшие в настоящее время классическими. Решение задач нелинейной механики позволило по-новому взглянуть на проблему качественного исследования нелинейных дифференциальных уравнений и, в частности, получить ряд интересных и неожиданных результатов в эргодической теории.

Нелинейные колебания приобрели особую актуальность в 20-х годах XX в. Это связано с быстрым развитием радиотехники. Учение о нелинейных колебаниях стали рассматривать как отдельную дисциплину – механику нелинейных колебаний или нелинейную механику. Одним их первых исследования в области нелинейной механики проводил голландский физик Ван-дер-Поль. В начале 1930-х годов оставался открытым вопрос о создании теории нелинейных колебаний. Ее исследовали Н.Н. Боголюбов и Н.М. Крылов в ряде работ, среди которых особое место занимает «Введение в нелинейную механику» (1937). Они разработали новый подход к изучению нелинейных колебаний, основанный на построении асимптотических разложений. При исследовании асимптотических методов особое внимание было уделено построению простых и эффективных приемов, позволяющих получить приближенные формулы.

Основополагающие идеи и фундаментальные результаты, полученные Боголюбовым в нелинейной механике, составляют основу многих современных исследований по общей механике, механике сплошной среды, небесной механике, механике твердого тела и гироскопическим системам, теории устойчивости движения, теории управления, регулирования и стабилизации, механике космического полета, математической экологии и другим направлениям естествознания и техники [27].

В 1946 г. Боголюбов был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1953 г. – действительным членом АН СССР.

В работах «Проблемы динамической теории в статистической физике» (1946), «Кинетические уравнения» (1946) Боголюбову удалось вынести асимптотическую теорию за рамки собственно нелинейной механики и использовать ее в статистической физике, в теории кинетических уравнений.

С помощью одночастотного метода, предложенного Боголюбовым в 1949 г., можно строить асимптотические разложения решения нелинейных систем со многими степенями свободы на основе исследования некоторой эквивалентной колебательной системы с одной степенью свободы. Результаты изложены в монографии «Асимптотические методы в теории нелинейных систем» Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского (1963).

В статистической механике Боголюбовым разработана математически строгая теория возникновения стохастических закономерностей в динамических системах большого числа частиц. Им дано описание наиболее интересных эффектов макросистем – сверхтекучести и сверхпроводимости, предложен последовательный подход к важнейшей для равновесной статистической механики проблеме фазовых переходов, использующий фундаментальные для физики представления о симметриях системы и их нарушениях.

Естественным развитием асимптотических методов нелинейной механики стали фундаментальные работы Боголюбова по обоснованию и строгому микроскопическому подходу в неравновесной статистической механике. В этих работах был создан последовательный метод описания стохастических закономерностей в динамических системах большого числа частиц и сформулированы принципиально новые закономерности установления в таких системах статистического равновесия. Принципиальные вопросы статистической механики являются ключевыми в творчестве Боголюбова. Он неоднократно обращался к ним на протяжении своего творческого пути. В 1946–1947 гг. Боголюбов дал блестящее по своей простоте и тонкое, с точки зрения анализа, объяснение явлению сверхтекучести и построил наиболее адекватный этому явлению математический аппарат. Создав концепцию парных корреляций в квантовой физике и схему нарушения симметрии в теории слабонеидеального бозе-газа, Боголюбов объяснил появление сверхтекучести в такой системе. Через десять лет Боголюбов применил метод канонических преобразований и метод компенсации опасных диаграмм в теории ферми-газа, построив теорию сверхпроводимости.

С 1948 г. Боголюбов регулярно бывал и подолгу жил в Москве, где возглавлял Теоретический отдел в Институте химической физики АН СССР. Кроме того, с 1950 г. он работал в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР и Московском университете, где в 1953 г. основал кафедру квантовой статистики и теории поля, которой руководил до последних дней своей жизни. В 1950–1953 гг. работал также в закрытом институте оборонного профиля в Сарове (Арзамас-16). С 1951 г. Боголюбов – директор лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований в Дубне, а с 1965 по 1988 г. – директор этого института.

В начале 1950-х годов внимание Боголюбова привлекла квантовая теория поля. Его работы в этой области привели к появлению новых понятий. К этому времени в квантовой теории поля имелся лишь один эффективный аппарат – теория возмущений. Основной недостаток этого аппарата – ультрафиолетовые расходимости – Боголюбов предложил устранить путем перенормирования массы и заряда. В своих работах Боголюбов отмечал, что взгляд на расходимости как на недостаток теории связан с перенесением в квантовую теорию поля привычных понятий макрофизики. Им было предложено адекватное решение этой проблемы, потребовавшее привлечения в теорию поля современного математического аппарата обобщенных функций и существенное его развитие. В частности, им определена операция произведения обобщенных функций, открыт новый принцип аналитического продолжения обобщенных функций многих переменных. Доказанная им теорема об острие клина (ныне носящая имя Боголюбова) стала основой нового направления в теории функций многих комплексных переменных. Боголюбов разработал общий метод теоретической физики – метод ренормализационной группы. Ярким примером создания и применения новых математических средств к физике является разработка аксиоматического подхода к квантовой теории поля, предпринятая им в 1950-е годы. Предложенная им система аксиом – первый опыт нетривиального применения аксиоматического метода в физике. Фактически он сделал первые шаги к решению 6-й проблемы Гильберта.

В 1961 г. вышла в свет работа Боголюбова, в которой глубокие физические идеи о вырожденном и нестабильном вакууме привели к введению фундаментального понятия квазисреднего и построению, по существу, новой теории фазовых переходов. Распространение этих идей на физику частиц получило название спонтанного нарушения симметрии.

Боголюбову принадлежит заслуга построения основанной на понятии S-матрицы аксиоматической теории, включающей новый принцип причинности (условие микропричинности Боголюбова). Работы Боголюбова по обоснованию дисперсионных соотношений открыли новый этап в теории сильных взаимодействий. В физике появилось новое понятие, понятие об амплитуде рассеяния как о единой аналитической функции переменных рассеяния. Наличие этого понятия стало решающим фактором для последующего развития теории.

Важнейшую роль в теории элементарных частиц сыграло предложенное Боголюбовым понятие цвета, введение которого позволило разрешить известную проблему статистики кварков и привело к построению квантовой хромодинамики – современной калибровочной теории сильных взаимодействий.

Боголюбов использовал различные математические подходы к исследованию физических задач: умение логически вычислить основное в исследуемом объекте, увидеть проблему в целом, «ухватить» ее суть. Своими знаниями и опытом Боголюбов с радостью делился с молодежью. Он создал известные на весь мир научные школы.

Николай Николаевич Боголюбов знал десятки иностранных языков. Возможно, если бы он не увлекся в юношестве математикой, то стал бы известным лингвистом.

Боголюбову принадлежит заслуга развития международного научного сотрудничества: положено начало советско-американским совместным исследованиям на крупнейших ускорителях мира задолго до заключения соответствующих правительственных соглашений. Научные и организаторские способности Н.Н. Боголюбова высоко оценивают не только у нас в стране, но и во всем мире. Н.Н. Боголюбов – дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий, премии им. А.П. Карпинского (ФРГ) и многих других советских и международных премий. Он награжден золотой медалью им. М.В. Ломоносова, золотой медалью им. Бенджамина Франклина (США), золотой медалью им. Макса Планка (ФРГ). Н.Н. Боголюбов – почетный член ряда зарубежных академий и почетный доктор университетов многих стран.

Почти 25 лет Н.Н. Боголюбов возглавлял крупнейший международный научный центр – Объединенный институт ядерных исследований, который играл роль координирующего центра в развитии физических исследований в странах – участницах ОИЯИ. По инициативе Боголюбова было организовано сотрудничество с ведущими научными центрами мира.

В 1989 г. в Дубне отмечали 80-летие Н.Н. Боголюбова. Вскоре, в связи с достижением предельного возраста, он оставил должность руководителя и был избран почетным директором института.

Много времени и внимания Н.Н. Боголюбов уделял общественной деятельности, неоднократно избирался депутатом Верховного Совета СССР, был участником Пагуошского движения ученых, выступавших за мир, разоружение, международную безопасность и предотвращение мировой термоядерной войны.

Имя Боголюбова стоит в ряду тех, кто определял развитие научной мысли во второй половине XX в. Невозможно перечислить все его научные достижения – можно говорить лишь о тех областях знаний, в которые он внес значительный вклад.

Умер Н.Н. Боголюбов 13 февраля 1992 г. в Москве.

Ричард Фейнман

Фейнман Ричард Филлипс родился 11 мая 1918 г. в Нью-Йорке в обеспеченной еврейской семье. Его родители были выходцами из России. Младшая сестра Ричарда – известный астрофизик.

В 13 лет Ричард научился быстро и качественно ремонтировать радиоприемники. В 1935 г. Фейнман поступил на факультет физики в Массачусетский технологический институт, который окончил в 1939 г. и поступил в аспирантуру Принстонского университета, получил Прокторскую премию. Научные интересы Фейнмана в это время относились к квантовой электродинамике, изучающей взаимодействия между элементарными частицами, между частицами и электромагнитным полем.

Когда США вступили во Вторую мировую войну, Фейнман решил пойти добровольцем в армию, но психиатру его поведение на медицинской комиссии показалось странным. Его не приняли. Вскоре он был приглашен участвовать в Манхэттенском проекте по разработке атомной бомбы.

В 1942 г. Фейнман получил степень доктора и перед отъездом в Лос-Аламос женился на девушке, в которую был влюблен с 13 лет. Его невеста к моменту свадьбы была больна туберкулезом и обречена. Она умерла в 1945 г. После Фейнман женился еще дважды. С ним часто советовался Нильс Бор, потому что Фейнман не преклонялся перед авторитетами. Он всегда говорил все, что думает, не боясь показаться неуважительным по отношению к известным людям.

С 1942 по 1945 г. Фейнман руководил группой в отделе Ханса Бёте. Во время работы в Лос-Аламосе Фейнман прославился как мастер по вскрытию секретных сейфов. Он наглядно демонстрировал, что существующие меры безопасности недостаточны.

После взрыва американской бомбы в Хиросиме в 1945 г. Фейнман преподавал физику и занимался исследованиями в Корнелльском университете. Он продолжал заниматься квантовой электродинамикой, в которой многие результаты были получены В. Гейзенбергом, В. Паули и П. Дираком. Однако из-за допущения о действии электрона на самого себя в расчетах масса и заряд электрона получались бесконечными. Фейнман начал разрабатывать радикально новые подходы к решению этих проблем. Он предложил считать, что электроны испытывают действие только со стороны других электронов с запаздыванием из-за разделяющего их состояния. В 1947 г. Фейнман ввел в рассмотрение континуальный интеграл по траекториям, который стали называть фейнмановским. Взаимодействия частиц стали рассматриваться как движения частиц из начальной точки в конечную по траекториям, причем все выражается в терминах относительных вероятностей. Позитроны рассматривались как электроны, движущиеся вспять во времени. Эти вероятности суммируются в комплексные ряды, для анализа которых Фейнман разработал правила и графические диаграммы (диаграммы Фейнмана). Внешне простые, но чрезвычайно удобные, они широко используются во многих областях теоретической физики. С их помощью Фейнману и его последователям удалось объяснить многие свойства частиц. Свои варианты решения задач квантовой электродинамики предложили также Д. Швингер и С. Томонага.

Квантовая электродинамика Фейнмана – Швингера – Томонаги считается наиболее точной из известных ныне физических теорий. Она подтверждена экспериментами от субатомных до астрономических масштабов. В то же время фейнмановский интеграл по траекториям до сих пор не имеет полного математического обоснования. Его использование в теоретической физике и математике дает множество блестящих результатов, в его полезности и верности ученые не сомневаются, но введен в практику он на интуитивном уровне. Разработка теории этого интеграла позволяет считать Фейнмана одним из творцов математики.

С 1951 г. Фейнман работал профессором Калифорнийского технологического института. Его приглашали во многие университеты, но он решил остаться в Калифорнии.

Совместно с М. Гелл-Манном Фейнман в 1958 г. разработал количественную теорию слабых взаимодействий.

В 1965 г. Фейнман, Швингер и Томонага за свои исследования в области квантовой электродинамики получили Нобелевскую премию по физике. Используемая ими процедура избавления от бесконечностей при расчетах получила название перенормировки. В 1969 г. Фейнман предложил модель нуклона. Им рассмотрена теория квантованных вихрей, высказана идея квантовых вычислений, а также предложено объяснение теории сверхтекучести, развитой Л.Д. Ландау, на основе уравнения Шрёдингера. Это открытие позволило активизировать исследования в физике низких температур.

В начале 1980-х годов Фейнман сформулировал идею создания квантового компьютера, на котором можно было бы моделировать явления квантовой физики. В настоящее время квантовые вычисления и квантовая теория информации – это уже не область смелых теоретических прорывов в будущее, а широкомасштабная кропотливая работа по поиску наиболее эффективных практических реализаций квантовых компьютеров.

Ричард Фейнман был не только выдающимся ученым. Его увлечения простирались от игры на барабане и изучения японского языка до занятий живописью. Он был хорошим портретистом. Физики, хорошо знающие Фейнмана, иногда сравнивали его с Л.Д. Ландау. У этих ученых было много общего: научные интересы, высокий уровень эрудиции и даже схожие характеры.

В 1986 г. после аварии американского космического корабля «Челленджер» Фейнман был включен в комиссию по расследованию причин катастрофы. В своем персональном отчете он резко раскритиковал сотрудников НАСА за халатность.

С именем Фейнмана связаны значительные изменения в преподавании физики. В 1960-х годах по просьбе Академии Фейнман в течение трех лет занимался разработкой нового курса физики. В результате появился учебник «Фейнмановские лекции по физике», который и по сей день считается одним из лучших учебников по общей физике для студентов.

Фейнманом написаны две автобиографические книги: «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» и «Какое тебе дело до того, что подумают другие?» По мотивам этих произведений был снят фильм, который получил название «Бесконечность».

С конца 1970-х годов Фейнман был болен редкой формой рака. При первой операции ему удалили почку. В 1987 г. была обнаружена еще одна раковая опухоль. Ее удалили, но боли остались. В феврале 1988 г. Фейнман попал в больницу с почечной недостаточностью. Сознавая, что умирает, он отказался от подключения к аппарату искусственной почки и других лечебных процедур и скончался 15 февраля.

Роджер Пенроуз

Пенроуз Роджер родился 8 августа 1931 г. в Колчестере (Англия) в семье члена Королевского научного общества медика-генетика и врача. В 1939 г. в связи с началом Второй мировой войны семья переехала в Канаду в город Лондон (Онтарио). Отец Роджера работал психиатром в госпитале.

В 1945 г. семья вернулась в Англию. Отец Роджера был назначен профессором генетики Университетского колледжа в Лондоне. Роджер в этом колледже изучал математику, физику и химию. В 1954 г. Роджер и его отец под влиянием работ голландского художника М.К. Эшера опубликовали в Британском журнале психологии статью о двух невозможных фигурах: невозможном треугольнике и бесконечной лестнице.

После получения степени бакалавра Пенроуз поступил в Колледж Святого Иоанна. Диссертация, посвященная алгебраической геометрии, была защищена Пенроузом в 1958 г.

Получение стипендий за научные исследования позволило Пенроузу в 1959–1961 гг. стажироваться в Принстонском и Сиракузском университетах США, а в 1963–1964 гг. – в Университете штата Техас в Остине.

В 1964 г. Пенроуз стал преподавателем, а в 1966 г. – профессором прикладной математики Колледжа Биркбек в Лондоне. С 1973 по 1998 г. он был профессором математики Оксфордского университета.

Пенроуз увлекся физикой, проблемами космологии. В 1960-е годы совместно со Стивеном Хокингом он заложил основы современной теории черных дыр. В 1965 г. Пенроуз показал, что сингулярности, подобные существующим в черных дырах, могут быть сформированы в процессе гравитационного коллапса умирающих больших звезд. В физике сингулярностью называют точку пространства, содержащую бесконечное (или очень большое) количество энергии или материи.

Исследования Пенроуза были основополагающими для современного развития теории квантовой гравитации. Им разработана теория твисторов, теория спиновых сетей и принцип космической цензуры.

В 1967 г. Пенроуз начал разрабатывать теорию твисторов, которую продолжает совершенствовать более 40 лет. Возможно, что эта теория сведет воедино гравитацию и квантовую механику.

В 1969 г. Пенроуз так сформулировал принцип космической цензуры: «Природа питает отвращение к голой сингулярности». Позже стали различать две формы космической цензуры. Выдвинутую Пенроузом в 1979 г. гипотезу о глобальной гиперболичности пространства-времени в целом, стали называть сильной формой космической цензуры. Сформулированное позже Хокингом предположение о глобальной гиперболичности «будущего компонента» пространства-времени стали называть слабой формой космической цензуры.

Разработанные Пенроузом в 1971 г. спиновые сети активно используются для описания геометрии пространства-времени и петлевой квантовой гравитации.

Увлечение занимательной математикой трансформировалось у Пенроуза в разработку так называемых «мозаик Пенроуза» (1974), решающих задачу непериодического покрытия плоскости. Он доказал, что это возможно сделать плитками простой формы всего лишь двух типов. Этот результат был неожиданным для кристаллографии. Оказалось, что между аморфными и кристаллическими телами нет резкой границы. Позже «мозаики Пенроуза» стали предметом пристального изучения ученых, поскольку демонстрируют множество различных свойств «золотого сечения». Было доказано, что проблема непериодического покрытия плоскости, решаемая «мозаикой Пенроуза», принадлежит к классу задач, не вычислимых алгоритмически на компьютере. И это далеко не единственная задача из решенных человеком, но не укладывающихся в логику вычислительных машин.

Пенроуз является автором замечательных книг, посвященных вопросам философии и вызвавших большой интерес как у специалистов, так и у широкой публики. Например, работа 1989 г. «Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики», ставшая вехой в дискуссиях, которые ведутся вокруг феномена сознания и проблем построения систем искусственного интеллекта.

По мнению Пенроуза, мозг не является обычным сверхмощным компьютером. Пенроуз считает, что человеческий интеллект использует квантовую гравитацию в качестве базиса для интуитивных озарений, проверяемых (или не проверяемых) аристотелевой логикой. С помощью логических аргументов, привлекая известные факты физики и математики, он демонстрирует, что в человеческом мышлении есть такие аспекты, которые никогда не удастся повторить с помощью машины, что «искусственный интеллект» невозможен, поскольку значительная часть сознания, а может и все сознание, не является по своей природе алгоритмическим.

Пенроуз развил идею квантового компьютера, выдвинутую Р. Фейнманом в 1982 г. Он считает, что детерминистское, логическое мышление несовершенно, раз ту же самую задачу можно гораздо проще решить на недетерминистском (квантовом) устройстве. Если алгоритмическое мышление несовершенно, то естественно предположить, что в природе используется не только оно. Фейнман предлагал решать с помощью квантового компьютера задачи, которые алгоритмически разрешимы, хотя технически реализация этих алгоритмов невозможна. Пенроуз идет гораздо дальше Фейнмана и утверждает, что с помощью наблюдений можно решать задачи, алгоритмически неразрешимые. Пенроуз написал несколько книг, в которых пытался доказать, что мозг – это квантовый компьютер и логическое аристотелево мышление человеку чуждо.

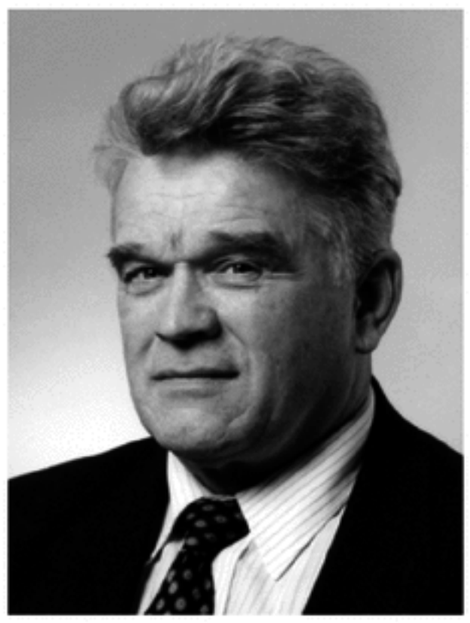
В 1994 г. Пенроуз и Хокинг прочли цикл публичных лекций по общей теории относительности в Институте математических наук им. Исаака Ньютона при Кембриджском университете. Хотя оба они принадлежат к одной школе в физике, их взгляды на роль квантовой механики в эволюции вселенной сильно отличаются друг от друга. Содержание лекций было опубликовано в их общей книге о пространстве и времени.

В книге «Тени разума» (1994) представлены современные подходы к изучению деятельности мозга, мыслительных процессов и пр. Изложены основы математического аппарата – от классической теории (теорема Гёделя) до последних достижений, связанных с квантовыми вычислениями.

В 2004 г. Пенроуз опубликовал книгу «Путь к реальности», над которой трудился восемь лет. В книге объемом более 1000 страниц он комментирует законы физики и излагает свои оригинальные взгляды на законы Вселенной.

Роджер Пенроуз возглавляет кафедру математики Оксфордского университета, а также является почетным профессором многих зарубежных университетов и академий. Он является членом Лондонского королевского общества, награжден премией Вольфа (совместно с С. Хокингом), медалью Дирака, премией Альберта Эйнштейна и медалью Королевского общества. В 1994 г. за развитие науки королевой Англии ему был присвоен титул сэра.

Л.Д. Фаддеев



Фаддеев Людвиг Дмитриевич родился 23 марта 1934 г. в Ленинграде в профессорской семье. Его отец, Фаддеев Дмитрий Константинович, известный математик, с 1964 г. член-корреспондент АН СССР, мать тоже математик, двоюродная сестра известного писателя Евгения Замятина. В июне 1941 г. Людвиг вместе со старшей сестрой и младшим братом был в Юхнове, но за два дня до начала Великой Отечественной войны мать перевезла детей в Ярославскую область и перед блокадой последним поездом вернулась в Ленинград. Блокадный город родители Фаддеева покинули на самолете в 1942 г.

В 1956 г. Фаддеев окончил физический факультет Ленинградского государственного университета. Физик по образованию, он больше увлекался математикой. В 1959 г. Фаддеев защитил кандидатскую диссертацию на тему «Свойства *S*-матрицы для рассеяния на локальном потенциале» и стал сотрудником Ленинградского отделения Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

Работы Фаддеева во многом предопределили современное состояние математической физики, открыли целый ряд новых направлений науки и способствовали их развитию. Он использовал математический аппарат для решения физических задач, еще не осмысленных физиками-теоретиками. Одно из первых мировых достижений – решение квантовой задачи рассеяния трех частиц – Фаддеев использовал в своей докторской диссертации, защищенной в 1963 г., которая легла в основу теории малочастичных систем. Эту теорию используют в своих исследованиях десятки ученых.

Самая крупная работа Фаддеева – это исследование уравнений Янга–Миллса, полученных еще в первой половине XX в. и носивших абстрактный характер. Фаддеев со своим учеником Виктором Поповым в 1966 г. вывел

формулы теории возмущений для квантовой теории Янга – Миллса и теории тяготения Эйнштейна. Эти результаты продолжили исследования американского физика Фейнмана и были опубликованы в работе «Правила Фейнмана для квантования калибровочных теорий». Незамеченная вначале, эта работа впоследствии принесла Фаддееву мировую известность, стала основой теории стандартного взаимодействия элементарных частиц и привела к открытию новых микрочастиц – кварков и лептонов. После встречи с Фейнманом во время командировки в США в 1971 г. Фаддееву предложили возглавить кафедру в Принстонском университете. В 1967 г. он был назначен профессором ЛГУ. В науке появился термин «ду́хи Фаддеева – Попова», смысл которого в следующем: реально осязаемые частицы могут быть порождены мыслью ученого [51].

Л.Д. Фаддеев второй советский ученый, после Н.Н. Боголюбова, получивший Медаль имени Макса Планка. Во всех учебниках по математической физике можно найти главу, посвященную уравнениям Фаддеева. В то время как Фаддеев пользовался большим авторитетом за рубежом, на родине ему приходилось сложнее – он не принадлежал ни к школе Ландау, ни к школе Боголюбова. Тем не менее уже в 42 года он был избран действительным членом АН СССР и назначен заместителем директора Ленинградского отделения Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

Фаддеев первым нашел решение обратных задач для случаев многих переменных. Учитывая, что многое в природе устроено по принципу решения обратных задач, когда по полученной «отраженной» информации воссоздается объект, результаты Фаддеева нашли приложение в различных областях науки.

Выдающимся достижением Фаддеева является развитие теории солитонов, получение точных решений задач с нелинейными уравнениями математической физики. Солитоны – это волновые возбуждения в нелинейной среде, которые ведут себя подобно частицам: при взаимодействии друг с другом или другими возмущениями они не разрушаются, а расходятся, сохраняя свою структуру неизменной. Многомерная теория солитонов использует широкий спектр математических методов от абстрактной топологии до вычислительной математики, и уже получила применение в теории конденсированного состояния и теории элементарных частиц.

Исследования Фаддеева по квантовой теории калибровочных полей стали основой стандартной модели в теории элементарных частиц. Иной взгляд на теорию квантовых спиновых цепочек привел его к открытию новых математических структур – квантовых групп.

Школа Фаддеева является лидером в мире по целому ряду направлений математической физики. Результаты работы Фаддеева вошли в учебники по математике и физике, регулярно цитируются и используются в научной литературе. Ленинградской школе математической физики, созданной Фадеевым, принадлежат первоклассные результаты в теории квантовых групп. Ученые этой школы сыграли важнейшую роль в создании общего метода интегрирования квантовых систем – построении квантовой обратной задачи рассеяния.

В 1986 г. на заседании Политбюро ЦК КПСС первой обсуждали математику. Фаддеев предложил создать международный математический институт, чтобы ведущие математики мира приезжали в СССР, так как поездки советских математиков за рубеж были затруднены. Идею поддержали. Был создан Международный математический институт им. Л. Эйлера во главе с Фаддеевым, и выделены 16 квартир для проживания иностранных ученых. Когда началась эпоха приватизации, то здание института Фаддееву удалось спасти, но квартиры «испарились». Переживания Фаддеева по этому поводу стали причиной инфаркта. Ему предложили возглавить институт им. А. Эйнштейна в Америке. Фаддеев отказался, но 15 учеников, работавших с ним в 1980-е годы, стали профессорами в разных зарубежных университетах.

В 1986–1990 гг. Л.Д. Фаддеев был первым – и пока остается единственным среди советских и российских ученых – президентом Международного математического союза.

В настоящее время Фаддеев возглавляет Национальный комитет математиков России, Международный математический институт им. Л. Эйлера в Санкт-Петербурге, является иностранным членом академий ведущих стран мира (США, Франции, Швеции, Финляндии, Польши, Бразилии). В 1990 г. Национальная академия Соединенных Штатов избрала Л.Д. Фаддеева иностранным членом по двум отделениям – математики и физики. Все академии мира принимают в свои ряды выдающихся иностранных ученых, но старейшая в мире Французская академия – самая требовательная и придирчивая. Попасть в ее ряды – удел избранных. Среди наших соотечественников этой высокой чести, помимо Фаддеева, удостоены академик Владимир Арнольд и Гурий Марчук – в то время президент АН СССР.

Людвиг Дмитриевич Фаддеев является почетным профессором многих зарубежных университетов, лауреатом премии им. Д. Хайнемана Американского физического общества, международной премии им. А.П. Карпинского, награжден Медалью имени Макса Планка Немецким физическим обществом, Медалью имени Поля Дирака Международным институтом теоретической физики. Он возглавляет Отделение математических наук РАН, является лауреатом Государственной премии СССР (1971) и Государственных премий Российской Федерации 1995 и 2004 гг. В 2008 г. Фаддеев получил премию Шоу.

Фаддеев является автором 200 научных трудов и 5 монографий. Он женат на своей однокурснице, имеет двух дочерей. Фаддеев прекрасно играет на рояле, его любимые композиторы – Гайдн, Шуберт, Берлиоз, Штраус. Физики считают его одним из крупнейших физиков-теоретиков мирового уровня, а математики – математиком мировой величины.

Шинтан Яу

Яу Шинтан родился 4 апреля 1949 г. в китайском городе Шантоу в семье профессора философии. После образования КНР родители в октябре 1949 г. переехали в Гонконг. Яу было всего 14, когда его отец скончался. Чтобы помочь матери прокормить семью, мальчик занимался репетиторством. После окончания школы Яу поступил на математический факультет Китайского университета Гонконга. Там он проучился с 1966 по 1969 г. и получил степень бакалавра. Знаменитый китайский математик Чжэнь Шэншэнь помог Яу получить стипендию для обучения в Калифорнийском университете. Преподаватели Яу были поражены его упорством и целеустремленностью.

После защиты диссертации в 1971 г. и получения степени доктора Яу в течение года работал в Институте перспективных исследований в Принстоне, затем два года – ассистентом профессора в Нью-Йоркском университете.

В 1974 г. Яу стал профессором Станфордского университета, а в 1980 г. – профессором Института перспективных исследований в Принстоне. Его научные интересы лежали в области комплексного анализа, и одним из самых важных результатов, полученных Яу, является доказательство (1976) гипотезы Э. Калаби, сформулированной в 1954 г. Калаби предположил, что существует связь между компактными многообразиями и тензором Риччи. Яу доказал, что гипотеза выполняется на многообразиях определенного класса, названных позже многообразиями Калаби – Яу. Эта гипотеза широко используется в комплексном анализе и алгебраической геометрии.

В 1983 г. на Международном математическом конгрессе в Варшаве Яу Шинтан получил премию и медаль Филдса «за вклад в уравнения в частных производных, за гипотезу Калаби в алгебраической геометрии, за гипотезу о положительности масс в общей теории относительности и за действительные и комплексные решения уравнений Монжа – Ампера».

В последнее время интерес к многообразиям Калаби – Яу усилился в связи с развитием теории суперструн. Уравнения теории суперструн дают правильные решения только при условии, если наше пространство является 11-мерным, и в дополнение к 4-мерному пространству-времени в каждой точке нашего пространства существуют семь свернутых размерностей. Но дополнительные пространственные измерения не могут быть свернуты произвольным образом, так как уравнения теории струн существенно ограничивают геометрическую форму, которую они могут принимать. Оказалось, что условиям уравнений удовлетворяет один конкретный класс многомерных геометрических объектов – многообразия Калаби – Яу.

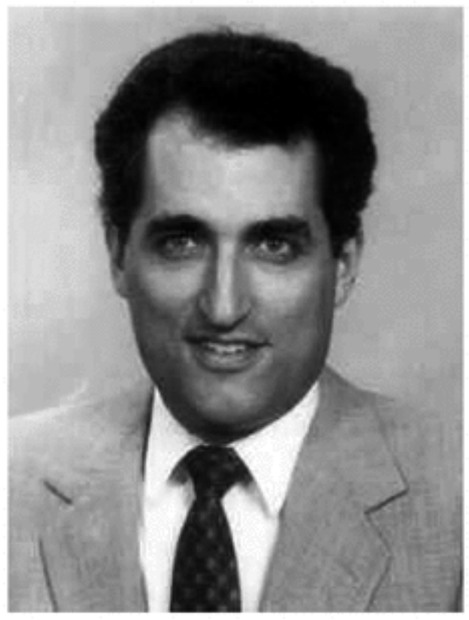
Большим достижением Яу является доказательство гипотезы о положительности массы в общей теории относительности. Совместно с Р. Шоеном он доказал, что для нетривиальной изолированной физической системы полная энергия, включая вклад материи и гравитации, положительна. Отметим

еще некоторые результаты Яу. Совместно с В. Миксом при рассмотрении трехмерных многообразий им доказано несколько гипотез в теории минимальных поверхностей, в том числе теорема об эквивалентной петле. Совместно с Х.Б. Лоусоном им описаны многообразия, обладающие метрикой отрицательной кривизны, на которых действует компактная неабелева группа преобразований [56].

В 1987 г. Яу перешел в Гарвардский университет. Он уделяет много внимания развитию математики в Китае, стремясь восстановить научные учреждения страны, разрушенные во время культурной революции. Он стал директором математических институтов в Пекине и Гонконге, оставаясь профессором математики в Гарварде. Яу убедил одного гонконгского торговца недвижимостью учредить медаль аналогичную Филдсовской, предназначенную для китайских математиков в возрасте до 45 лет.

Яу стремился доказать гипотезу Пуанкаре в топологии силами китайских математиков. Следует отметить, что не все его действия, направленные на достижение этой цели, были корректны. Об этом более подробно рассказано в гл. 21.

Эдвард Виттен



Американский физик-теоретик и математик Виттен Эдвард родился 26 августа 1951 г. в Балтиморе (штат Мэриленд) в семье физика, специалиста по общей теории относительности. В 1971 г. Виттен окончил университет Брандейса и получил степень бакалавра истории. Продолжил обучение он в Принстонском университете и в 1974 г. стал магистром истории. Виттен стремился стать политическим обозревателем, занимался журналистикой, а также работал в президентской кампании Джорджа Мак-Гаверна. Затем в течение семестра он, будучи аспирантом, изучал экономику в Университете Висконсин-Мэдисона.

Только после этого Виттен решил заняться физикой и продолжил образование в Гарвардском университете. После защиты диссертации и получения степени доктора в 1976 г. он до 1980 г. работал в Гарвардском университете младшим научным сотрудником.

В 1980 г. Виттен переехал в Принстон и стал профессором физики Принстонского университета. В 1987 г. он в Принстоне перешел на должность профессора естественных наук в Институт перспективных исследований.

В 1988 г. Виттен занялся исследованиями связи между геометрией и теоретической физикой и стал выдающимся специалистом в этой области. В 1990 г. за разработку нового математического аппарата в теоретической физике он получил премию и медаль Филдса.

Наиболее важным в научном плане для Эдварда Виттена является 1995 г. В этом году им сформулирована *M*-теория (теория мембран), которая объединила различные концепции, вытекающие из теории струн. Он предположил,

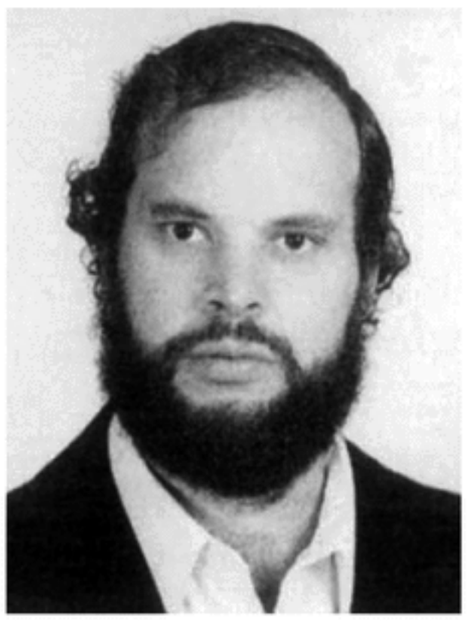
что наше пространство изначально имеет одиннадцать измерений. Частными случаями являются пять рассмотренных ранее концепций десятимерных пространств, вытекающих из теории струн. Свой результат Виттен доложил на конференции физиков в Лос-Анджелесе. Теория суперструн стала самой модной теорией, а Виттен – самым цитируемым физиком.

Его научные интересы лежат в области квантовой теории поля, теории струн и разделов топологии, которые используются в этих разделах физики. Им доказана теорема о положительной энергии в общей теории относительности, взаимосвязь суперсимметрии и теории Морса, создана топологическая квантовая теория поля. Он обнаружил связь между теорией струн и абстрактной теорией алгебраической геометрии в рамках программы Ленглендса, внес ощутимый вклад в теорию зеркальной симметрии и суперсимметричные калибровочные теории. Ему также принадлежит одно из объяснений того, откуда в космосе взялась «темная материя» – вещество, которое ничего не излучает и практически никак себя не проявляет. При этом оно составляет бóльшую часть массы Вселенной.

Виттен наделен интуицией физика и потрясающе владеет современным математическим аппаратом.

В 1999–2000 гг. Виттен преподавал в Калифорнийском технологическом институте, а затем стал профессором математической физики в Принстонском институте перспективных исследований. Его считают «современным Эйнштейном» и одним из величайших физиков в истории человечества. В 2008 г. он, совместно с Концевичем удостоен премии Крафурда за исследования в области суперструн.

Воган Джонс



Джонс Воган Фредерик Рэндал родился 31 декабря 1952 г. в Гизборн в Новой Зеландии. Учился он в Окленде, где в 1969 г. окончил среднюю школу. В 1972 г. он стал бакалавром, в 1973 г. – окончил университет и стал магистром. Аспирантуру он окончил в Школе физики в Женеве. В 1979 г. в Женевском университете защитил диссертацию и получил степень доктора. В 1980 г. он переехал в США, где работал сначала доцентом Калифорнийского университета (Лос-Анджелес) и Пенсильванского университета (Филадельфия). В 1985 г. он стал профессором Калифорнийского университета в Беркли.

Научные работы Джонса относятся преимущественно к одному разделу функционального анализа – теории факторов. Проводя исследования по теории факторов, Джонс сделал замечательное открытие – построил новый класс инвариантов узлов полиномиального типа. Инварианты Джонса, в отличие от известных с 1920-х годов инвариантов Александера, обладают свойством киральности, т. е. различают узел и его зеркальное отражение. Благодаря использованию этих инвариантов решен ряд классических проблем в теории узлов. Особенно интересен метод построения инвариантов

Джонса. Уже их первоначальная конструкция основывалась на изучении факторов, возникающих в точно решаемых моделях статистической физики. Вскоре была найдена прямая связь между методом квантовой обратной задачи (*R*-матрицами) и полиномами типа Джонса. После работ Джонса были получены целые серии новых полиномиальных инвариантов, определяемых точно решаемыми статистическими моделями. Это привело к обнаружению новых связей между топологическими, теоретико-полевыми и групповыми задачами [56].

За исследования по теории факторов Джонс в 1990 г. награжден медалью Филдса на Международном математическом конгрессе в Киото.

В 2002 г. Воган Джонс был награжден новозеландским орденом «За заслуги», эквивалентом рыцарской награды.

М.Л. Концевич

Концевич Максим Львович родился 25 августа 1964 г. в Химках в семье известного советского востоковеда Льва Рафаиловича Концевича. Школьником, он побеждал на Всесоюзных математических олимпиадах. После досрочного окончания московской школы № 91 Концевич поступил в 1980 г. на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова и еще на третьем курсе заинтересовался теорией суперструн.

После окончания университета в 1985 г. началась его работа в Институте проблем передачи информации. Международное признание Концевич получил в 1990 г. На-

математической конференции в Бонне был сделан доклад о гипотезе Виттена. Виттен, основываясь на нестрогих соображениях квантовой теории поля, получил «красивую» математическую формулу. Эта формула устанавливает связь между топологическими характеристиками пространств модулей алгебраических кривых с отмеченными точками и уравнением Кортевега – де Фриза теории мелкой воды. Доказать истинность этой формулы не мог ни ее автор, ни другие математики. После выступления на конференции Концевичу пришло в голову совершенно неожиданное доказательство. Ему немедленно предложили остаться для работы в Бонне, в известном Институте Макса Планка. Через год он закончил доказательство теоремы Виттена, и в математической физике появился новый термин – «модель Концевича». Он ввел важнейшее понятие стабильного отображения комплексной кривой с отмеченными точками в комплексное пространство и построил новую математическую теорию. Это позволило правильно компактифицировать пространство отображений и применить к полученному комплексному многообразию методы современной топологии.

В 1992 г. Концевич защитил в Боннском университете диссертацию и был награжден премией Европейского математического общества на I Европейском математическом конгрессе в Париже. Вскоре его пригласили работать в США и предложили на выбор Принстон, Беркли или Гарвард [11].

Концевич является представителем московской математической школы. Хотя официальным научным руководителем диссертации Концевича считается работающий в Бонне Дон Загир, сам он при получении премии Европейского математического общества назвал себя учеником И.М. Гельфанда, Ю.И. Манина и В.И. Арнольда. Большая часть его достижений относится к квантовой математике, молодой области математики.

Новые методы позволили Концевичу получить замечательные результаты. За четыре года работы в Институте Макса Планка он внес серьезный вклад в геометрию: вывел новые формулы, получившие название «инварианты узлов Концевича». Он ввел в математику новое понятие «комплекс графов», т. е. многомерное обобщение графов. В множество различных графов он внес новую комбинаторную структуру (структуру комплекса Концевича), оказавшуюся очень полезной в ряде задач, на первый взгляд, не связанных ни с графами, ни с комбинаторикой. Им развиты исследования математика В.А. Васильева, который в 1989 г. среди всех инвариантов узлов выделил инварианты конечного порядка. Концевич получил явные выражения в виде кратных интегралов по соответствующим конфигурационным пространствам для всех инвариантов Васильева. Так была обобщена электродинамическая формула Гаусса.

Построенная Концевичем теория позволила ему дать явные интегральные формулы не только для инвариантов узлов Васильева, но и для квантования скобок Пуассона. До работы Концевича не только не были известны найденные им явные формулы универсального квантования, но подвергалось сомнению само существование квантования.

Использование достижений Концевича позволило многим математикам получить первоклассные результаты в разных разделах математики, в основном в симплектической геометрии (классической механике гамильтоновых комплексных систем без диссипации энергии) и в теории комплексных многообразий (многомерных обобщений римановых поверхностей).

Исследования Концевича затрагивают фундаментальные вопросы современной физики. Он дал математически строгую формулировку интегралов Фейнмана для топологической теории струн через введенное им понятие пространства модулей стабильных отображений. По мнению одного из основоположников теории струн Брайана Грина, Концевич вывел эту теорию из тупика.

В 1998 г. на Международном математическом конгрессе в Берлине Концевич стал лауреатом премии и медали Филдса. Он успешно продолжает исследования в теории узлов, стремясь объединить теорию суперструн с общей теорией относительности.

Концевич получил значительные результаты в исследовании деформационного квантования пуассоновских многообразий и гомологической зеркальной симметрии. Его авторитет в науке подтверждает тот факт, что в 2000 г. на конференцию «Важнейшие математические проблемы XXI века», организованную Американским математическим обществом, Концевич был приглашен первым из числа ведущих математиков мира.

В настоящее время Концевича считают французским математиком. Он является профессором Института высших научных исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем и Университета Ратгерса в США. В 2008 г. он вместе с Виттеном удостоен премии Крафурда «за важный вклад в области математики, на который их вдохновила современная теоретическая физика».

Виттен и Концевич перенесли многие концепции теоретической физики в математику, что позволило найти решения математических проблем, которые раньше не удавалось даже поставить. Развиваемая ими идея зеркальной симметрии интересна своей физической компонентой, но ее математическая компонента привела к результатам, которые еще не нашли объяснения в рамках обычной теории. Виттен и Концевич являются авторами большого количества новых идей и своеобразными законодателями математической моды.

Глава 20

ТОПОЛОГИЯ ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ XX в.

> В соединении с алгеброй топология составляет общую основу математики и содействует ее единству
>
> *А.В. Архангельский*

Новые идеи в топологии

В XX столетии одним из основных объектов изучения в математике стали многообразия. Многообразие – это геометрический объект, локально имеющий строение числового пространства R^n или другого векторного пространства. Иначе говоря, многообразие – это геометрическая фигура, все точки которой равноправны. Примерами многообразий могут служить окружность, сфера, прямая, плоскость. Основной характеристикой многообразия является размерность. Прямая и окружность имеют размерность, равную единице, а размерность плоскости и обычной сферы равна двум. В работах по геодезии Гаусс изучал двумерные поверхности.

Термин «многообразие» был введен Риманом в знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Он перенес на многомерный случай идеи Гаусса. Таким образом, многообразие является фундаментальным понятием математики, уточняющим и обобщающим на любое число измерений понятия линии и поверхности.

Одна линия исследования многообразий – линия Гаусса – Римана – Риччи. На основе римановой геометрии Риччи, Леви-Чивитом и Кристоффелем был создан тензорный анализ, далее используемый и развиваемый в исследованиях по теории относительности. Другая линия – линия Гельмгольца – Клейна – Ли. Ее можно проследить от построения Гельмгольцем геометрии через реализацию Эрлангенской программы Клейна до исследования непрерывных групп Ли.

Эли Картан в 40-х годах XX в. объединил эти направления, что позволило использовать при изучении многообразий и математический анализ, и топологические исследования. Была подтверждена идея Пуанкаре о связи между вещественными когомологиями и дифференциальными формами.

Изучение многообразий с точки зрения топологии началось после открытия римановых поверхностей и связано с представлением аналитических функций интегралами. Это была попытка избавиться от многозначности этих функций. В данном направлении после Римана работали Пуанкаре, Мёбиус, К. Жордан, Г. Вейль.

Если при исследовании чисел задействована в основном «арифметическая» компонента естественного человеческого воображения, то при исследовании многообразий принимается во внимание еще и «геометрическая»

компонента здравого смысла. Это открывает перед математикой новые возможности.

В работе «Analysis Situs» (1895) Пуанкаре ввел понятие фундаментальной группы. В 1935 г. Витольд Гуревич, используя результат Хопфа 1931 г., ввел определение n-мерной гомотопической группы, явившееся естественным n-мерным обобщением фундаментальной группы.

В 1938 г. Уитни совершил крупное открытие в топологии. Он доказал, что любое многообразие размерности k можно вложить в евклидово пространство размерности $2k$. Как только проблема вложения замкнутых многообразий была решена, топологи взялись за проблему бордизма этих же многообразий.

В 1945 г. Жан Лере ввел ряд определений, связанных с тонкими свойствами аналитичности. Он изучил когомологии комплексных пространств с коэффициентами в пучках голоморфных функций, далее им были развиты алгебраическая топология и геометрия.

Примерно с середины 1930-х и до конца 1940-х годов одно из центральных мест в отечественной и мировой топологии заняли работы Л.С. Понтрягина и его школы. Основной особенностью творчества Понтрягина в области топологии является глубокое изучение алгебро-топологических свойств гладких многообразий. Эти работы стали основополагающими в дифференциальной топологии.

В начале 1930-х годов Х. Хопф обнаружил гомотопически нетривиальные отображения сфер на сферы низших размерностей и указал на связь этих вопросов с другими проблемами математики. Первым (после результатов Хопфа) важным шагом был созданный Понтрягиным метод оснащенных многообразий. В дальнейшем Понтрягину удалось применить полученные результаты к решению других гомотопических задач. Так, в 1941 г. он классифицировал гомотопические классы отображений трехмерного комплекса в двумерную сферу. Эта работа интересна совершенно новой для топологии того времени функториальной когомологической операцией, не выражающейся операциями сложения и умножения. Операция получила название «квадрат Понтрягина», а ее простейшие обобщения – «степени Понтрягина». В 1947 г. американский математик Стинрод развил идеи Понтрягина, и в рассмотрение были введены «квадраты Стинрода». Значительные результаты в топологических исследованиях были получены В.А. Рохлиным и его учениками.

В начале 1950-х годов в топологии произошли существенные изменения. Во-первых, благодаря работам многих видных математиков (Хопфа, Понтрягина, Уитни, Стинрода, Эйленберга, Маклейна, Уайтхеда и других) был накоплен богатый материал – теоретический и фактический. Однако не было единого мнения о методе, который позволял бы решать отдельные частные задачи теории гомотопий. Во-вторых, в малоизвестных работах Ж. Лере строился большой сложно формулируемый аппарат спектральных последовательностей и вводились основные понятия теории пучков, но не было предмета, к которому все это можно было бы применить. Тогда трудно было понять, что это не тавтология, а реально применимая система «правильных» понятий и взаимосвязей. Семинар Анри Картана, в котором принимали участие Серр, Борель, Том и другие ученые, в 1940-е годы еще не был известен, хотя и работал весьма активно. Краткие заметки об исследованиях его

участников, полностью изменивших топологию (а позднее и не только ее), стали появляться в начале 1950-х годов, в Советском Союзе – во второй половине 1950-х годов.

Математиков интересовала «проблема кобордизма» – проблема определения условий, при которых многообразия размерности n будет границей многообразия размерности $n + 1$. Понтрягин, который вскоре занялся исследованием операций, в 1950 г. ввел наглядно-геометрический способ установления связи между так называемой гомотопической группой сфер и кобордизмом многообразий. Он показал, что для вычисления гомотопической группы сфер нужно решать проблему кобордизма для особых «оснащенных» многообразий. Через четыре года методы теории оснащенных многообразий стали основой теории кобордизмов.

Блестящим топологам французской школы А. Картану и Ж. Лере война и возрастные ограничения не позволили получить медали Филдса. Первым топологом, получившим в 1954 г. медаль Филдса, был ученик А. Картана, член группы Бурбаки Жан-Пьер Серр, о котором рассказано в гл. 18. Применяя созданный Лере метод спектральных последовательностей, он добился принципиально новых результатов в вычислении гомотопических групп сфер.

Серр доказал несколько общих теорем. Он не только повторил результаты Понтрягина, Уайтхеда и Рохлина, но и получил новые результаты. Им решены также трудные задачи, связанные с вычислением гомотопических групп классических групп Ли.

Используя результаты исследований Понтрягина, французский математик Рене Фредерик Том смог решить общую проблему кобордизма, за что в 1958 г. был удостоен медали Филдса. Результат Тома ускорил развитие топологии и исследований гипотезы Пуанкаре.

И все же до конца 50-х годов XX в. математики рассматривали топологию как красивую, но бесполезную теорию. В 60-х годах XX в. был обнаружен ряд интересных топологических закономерностей в других разделах математики: теории функций и комплексном анализе, качественной теории динамических систем и уравнений с частными производными, теории операторов и даже алгебре. Колмогоров писал: «Теория дифференциальных уравнений послужила отправным пунктом исследований топологий многообразий. Здесь получили свое начало “комбинаторные”, “гомологические” и “гомотопические” методы алгебраической топологии. Другое направление в топологии возникло на почве теории множеств и функционального анализа и привело к систематическому построению теории общих топологических пространств» [55].

Алгебраическая дисциплина, возникшая на базе сложных вычислительных средств аналитической топологии, связанных с природой гомологий, называется гомологической алгеброй. Для усовершенствования вычислительных методов аналитической топологии были разработаны K-теория и теория кобордизмов.

K-теория изучает свойства векторных расслоений с помощью алгебраических и топологических методов. В узком смысле она является обобщенной теорией когомологий, вытекающей из категорий векторных расслоений. Ее создали М. Атья и Ф. Хирцебрух под влиянием работ А. Гротендика. Для

этого Атья отказался от когомологий как основного гомотопического инварианта и заменил их так называемым *K*-функтором.

В 1960-х годах благодаря появлению *K*-теории были переосмыслены многие задачи не только в топологии, но и в других разделах математики. В 1970-х годах появились обобщения *K*-теории, связанные с применением функциональных методов и приспособлением *K*-теории к различным задачам топологии, геометрии, теории дифференциальных уравнений. Эта теория оказала заметное влияние на развитие идей дифференциальной топологии. С ее помощью были решены задачи классификации гладких и кусочно-линейных структур на многообразиях, гомотопической и топологической инвариантности характеристических классов Понтрягина. Ее методы имеют широкое применение в функциональном анализе, в частности в теории банаховых алгебр.

Еще одним топологом, ставшим лауреатом медали Филдса, был американский математик Джон Уиллард Милнор, которому вручили награду в 1962 г. на Международном математическом конгрессе в Стокгольме. Он получил ряд важных результатов в решении задачи о вычислении групп кобордизмов многообразий. Милнор доказал, что существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия и классифицировал гомотопические сферы высоких порядков. Открытие на семимерной сфере 28 гладких структур поразило воображение всех математиков и привело к созданию дифференциальной топологии. Позже выяснилось, что семимерная сфера – не единственный пример многообразия с гладкими структурами. Наличие большого числа гладких структур на одиннадцатимерной сфере рассматривается в рамках мембранной теории в теоретической физике при компактификации дополнительных степеней свободы пространственного континуума.

Аналогичные результаты независимо от Милнора получил С.П. Новиков. Он исследовал гомотопии пространств Тома на основе спектральной последовательности Адамса и не только более простым способом передоказал полученные ранее результаты, но и получил новую информацию о предложенных им и Милнором других видах кобордизмов.

Майкл Атья, английский математик арабского происхождения, лауреат премии Филдса 1966 г., геометр и алгебраист, создал *K*-теорию, которая помогла доказать, что всякая кривая в пространстве задается системой всего из двух уравнений.

С начала 70-х годов XX в. началось интенсивное проникновение методов топологии в аппарат современной физики. В конце XX столетия в нескольких областях физики возник ряд задач, получивших свою адекватную формулировку и решение на языке топологии. Теперь не вызывает сомнений важность топологических методов для теории поля и общей теории относительности, физики анизотропных сплошных сред и низких температур, современной квантовой теории и т. д.

Примером может служить биофизика полимеров, имеющая дело с гигантскими молекулами белков и нуклеиновых кислот. Рассматривая положения, которые молекула может занимать в пространстве, мы сталкиваемся с ограничениями топологической природы. С точки зрения математики, длинная замкнутая молекула представляет собой замкнутую линию, образующую узлы.

В теории поля фигурируют частицы, математически описываемые векторными полями с топологическими особенностями. Топологические методы используют при изучении обычных и жидких кристаллов всех типов, ферро- и антиферромагнетиков, сегнетоэлектриков, сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей.

Исследование топологических объектов в различных разделах математики требует особых, специфических для данного раздела методов. Эти методы придают некоторым направлениям топологии индивидуальные черты, что позволяет говорить о разделении топологии на ряд самостоятельных и малосвязанных дисциплин: алгебраическую, общую, дифференциальную и геометрическую топологию.

К числу общих методов топологии относят следующие:

– метод покрытий, на котором основана аппроксимация топологических пространств полиэдрами;

– метод функторов, который сопоставляет топологические пространства с алгебраическими объектами, обладающими правильным (функториальным) поведением и допускающими вычисления;

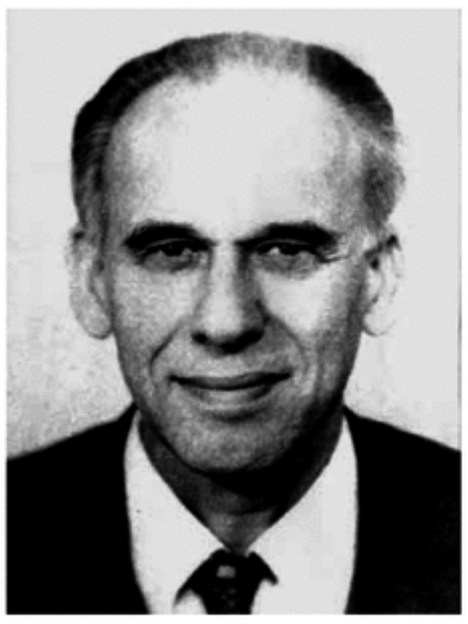
– метод спектров, в котором реализуется идея топологической аппроксимации топологических пространств более простыми или более удобными для изучения объектами;

– метод непрерывных отображений, основой которого является исследование поведения топологических инвариантов при отображении пространств из одного класса на пространства из другого класса;

– аксиоматический метод, анализирующий взаимоотношения между топологическими инвариантами и классами топологических пространств внутри самой топологии для ее совершенствования.

Долгое время топологию воспринимали лишь как науку, призванную прославлять «человеческий разум». В конце XX в. выяснилось, что она имеет самое непосредственное отношение к физической реальности, к объяснению устройства мироздания, может быть использована во многих областях практической деятельности.

В.А. Рохлин



Рохлин Владимир Абрамович родился 23 августа 1919 г. в Баку. Мать Рохлина, начальник санитарно-эпидемиологической службы Баку, была убита в 1923 г., а отец, член Бакинского комитета меньшевистской организации, расстрелян в 1940 г. Рохлин является племянником известного детского писателя и поэта Корнея Ивановича Чуковского. В 1935 г. Рохлин окончил школу и поступил на механико-математический факультет Московского университета. После окончания университета он поступил в аспирантуру. Его научным руководителем стал Понтрягин.

В июле 1941 г. Рохлин вступил в народное ополчение, в бою был ранен и попал в плен. То обстоятельство, что он выдавал себя за азербайджанца,

хотя был евреем, спасло ему жизнь. В конце войны он был освобожден союзниками и продолжил службу в Красной армии. После победы его отправили в лагерь для «проверки». Один из освобожденных солагерников Рохлина рассказал о его судьбе Понтрягину, который вместе с Колмогоровым написал письмо Берии с просьбой ускорить «проверку» талантливого математика и освободить его. Рохлина освободили и назначили охранником в том же лагере. После второго письма Берии Рохлин был освобожден. Он не имел права жить в Москве, но Понтрягину, как незрячему члену-корреспонденту АН СССР, было позволено нанять личного секретаря. Понтрягин устроил на эту должность Рохлина.

В конце 1946 г. Рохлин вернулся к научной работе. Его интересы составили эргодическая теория, топология и вещественная алгебраическая геометрия. К эргодической теории Рохлин обратился еще перед войной под влиянием Колмогорова, уже в те годы пропагандировавшего эту область математики. Владимир Абрамович взялся с самого начала за разработку основных вопросов этой теории. Как самостоятельная область общей теории динамических систем эргодическая теория оформилась в начале 1930-х годов после работ Дж. Биркгофа и фон Неймана. Первый период ее развития (вплоть до 1958 г., т. е. до введения А.Н. Колмогоровым понятия энтропии динамических систем) был периодом уточнения основ и исследования различных конкретных примеров (от геодезических потоков до теоретико-числовых систем).

В 1946 г. Рохлин и А.И. Плеснер разработали теорию унитарных инвариантов операторов, действующих в несепарабельных пространствах, и обобщили теорему фон Неймана о счетном множестве коммутирующих самосопряженных операторов на случай любой мощности. В декабре 1947 г. Рохлин защитил кандидатскую диссертацию на тему «Пространства Лебега и их автоморфизмы». Термин «пространства Лебега», предложенный В.А. Рохлиным, теперь является общепринятым. В 1948 г. Рохлиным впервые введены важные для теории представлений гильбертовы алгебры (в коммутативном случае). Эргодической теории посвящены 25 опубликованных работ В.А. Рохлина.

С 1947 по 1952 г. Владимир Абрамович работал младшим научным сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, в 1951 г. защитил докторскую диссертацию на тему «О важнейших метрических классах динамических систем». В 1952–1955 гг. он работал в Архангельском лесотехническом институте, в 1955–1957 гг. – в Ивановском педагогическом институте, в 1957–1959 гг. – в Коломенском педагогическом институте, в 1960–1967 гг. – в Московском университете. Работая в Коломне, он в течение года вел в Москве ставший знаменитым семинар по метрической теории динамических систем. На этом семинаре Колмогоров впервые рассказал о своем новом открытии – энтропии динамических систем.

В начале 1950-х годов был опубликован цикл работ Рохлина по гомотопическим группам сфер, характеристическим классам Понтрягина и введенным им группам внутренних гомологий. Им получены геометрические результаты, позволившие решить трудные задачи методами теории гладких

многообразий. Рохлиным и Р. Томом в 1953 г. были введены в современную топологию кольца внутренних гомологий (кобордизмы). Затем Рохлин исследовал ориентируемые кобордизмы. На Всесоюзном математическом съезде, состоявшемся в 1961 г. в Ленинграде, Рохлин был председателем секции топологии в оргкомитете. Ему удалось пригласить на съезд Милнора и Хирцебруха. В работах Рохлина, относящихся к топологии, особое место занимают четырехмерные многообразия. Отправной точкой послужили работы Понтрягина, в которых была обнаружена глубокая связь с геометрическими задачами топологии гладких многообразий. В работах Понтрягина и Рохлина были заложены начала теории кобордизмов, имевшей большое значение в развитии топологии. Рохлин разработал глубокую теорию трех- и четырехмерных многообразий, открыл замечательные свойства сигнатуры четырехмерных многообразий, ее делимость и связь с характеристическими классами Понтрягина. Особое место в дальнейшем развитии топологии занимает теорема Рохлина о делимости сигнатуры спинорного четырехмерного многообразия на 16. Ее многомерные обобщения, найденные Кервером и Милнором, сыграли важную роль в теории гладких структур. Сама теорема Рохлина вошла как важнейшая компонента в доказательство существования топологических многообразий, не допускающих комбинаторной триангуляции.

С 1967 г. Рохлин по приглашению ректора Ленинградского университета А.Д. Александрова начал работать профессором на математико-механическом факультете. До приезда Рохлина в Ленинграде практически не занимались топологией и теорией динамических систем. Рохлин организовал семинары по топологии и динамическим системам, стимулировал занятия своих учеников в геометрии, топологии, теории динамических систем. Практически Рохлин создал в Ленинграде свою математическую школу. Под его руководством свыше 20 человек защитили кандидатские и докторские диссертации. Из его учеников наиболее известны М.Л. Громов, Яков Элиашберг, А.М. Вершик. Заметное влияние Рохлин оказал на С.П. Новикова, который приезжал к Владимиру Абрамовичу для обсуждения сложных топологических проблем.

В 1972 г. Рохлин начал исследовать топологические свойства вещественных алгебраических многообразий. Вместе со своими учениками им были получены значительные результаты в вещественной алгебраической геометрии. Работы Рохлина в топологии вещественных алгебраических многообразий во многом определили ее современный облик.

В.И. Арнольд писал, что при разговоре с Рохлиным его не покидало ощущение, что он общается с высшим разумом, который знает окончательные и самые правильные ответы на все вопросы. Рохлин выделялся среди окружающих определенностью мнений и прямотой их высказывания.

Среди советских математиков Рохлин занимал скромное место, не соответствующее его таланту и вкладу в развитие науки. У него были натянутые отношения с партийным руководством Ленинграда. После того, как дочь члена Политбюро не смогла пересдать Рохлину «тройку» по математике, из университета был исключен сын Рохлина Владимир. С большим трудом сыну удалось стать студентом Вильнюсского университета, после окончания

которого в аспирантуру его не приняли. Сейчас он профессор Йельского университета в США.

В 1974 г. Рохлин перенес инфаркт, после которого его здоровье не восстановилось. В 1980 г. Рохлина отправили на пенсию. В последние годы он мужественно боролся с тяжелой болезнью, ни на минуту не прекращая работать.

Умер В.А. Рохлин 3 декабря 1984 г. в Ленинграде.

Рене Том

Французский математик Том Рене Фредерик был вторым среди топологов, удостоенных медали Филдса. Первым лауреатом стал Жан-Пьер Серр, о котором рассказано в гл. 19.

Рене Том родился 2 сентября 1923 г. в городе Монбельяр. Там он в 1940 г. окончил Коллеж Кювье и получил степень бакалавра в области элементарной математики.

После нападения Германии на Францию родители отправили Тома с братом в Швейцарию. Позже Том вернулся во Францию, продолжил образование в Лионе и в 1941 г. получил степень бакалавра философии. Затем он переехал в Париж, чтобы поступить в Высшую нормальную школу. Попытка 1942 г. оказалась неудачной, но в 1943 г. Том добился успеха. В Высшей нормальной школе Том попал под влияние группы Бурбаки. В 1951 г. под руководством Анри Картана он защитил диссертацию на тему «Расслоенные пространства в сферах и квадратах Стинрода» и получил степень доктора.

В 1951 г. Том попал в автомобильную катастрофу и за шесть месяцев, проведенных в постели, смог решить общую проблему кобордизма, используя результаты исследований Понтрягина. Он показал, что найденное Понтрягиным необходимое условие того, чтобы одно комплексное многообразие служило границей другого многообразия, является и достаточным условием. В 1953 г. термин «кобордизм» был введен в современную топологию.

Том был награжден стипендией, позволившей ему поехать в США, где он встречался с Эйнштейном, Г. Вейлем и Стинродом и посещал научные семинары Калаби и Кодаиры. После возвращения из Америки Том преподавал математику в Гренобле (1953–1954) и Страсбурге (1954–1963).

При разработке теории кобордизмов Томом были введены многие новые топологические понятия, вошедшие в словарь-минимум топологов. В 1954 г. ему удалось полностью вычислить неориентируемые кобордизмы и получить обширную информацию об ориентируемых. Тому принадлежит заслуга создания новых алгебраических методов вычисления, основанных на достижениях алгебраической топологии. В основе его методов лежит введение вспомогательных пространств, названных пространствами Тома.

В 1957 г. Тому было присвоено звание профессора. За разработку теории кобордизма (внутренней гомологии) он в 1958 г. на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге получил премию и медаль Филдса.

Рене Тому принадлежат идеи, нашедшие свое применение много лет спустя. Например идеи об использовании теории Морса при изучении топологии комплексных пространств.

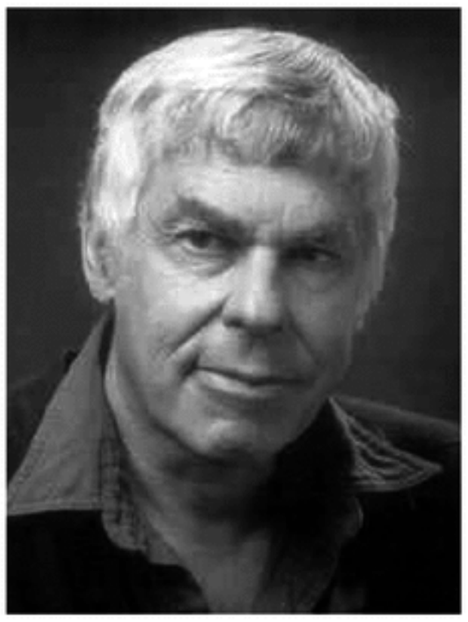
В 1964 г. Том перевелся из Страсбургского университета в Институт высших естественных наук. Причиной этого стало соперничество с его коллегой Гротендиком, который пользовался большей популярностью. Том оставил абстрактную математику и занялся исследованием морфогенеза.

Одним из главных достижений Тома является создание теории катастроф, изучающей функции по свойствам их особенностей. Эта теория вобрала в себя достижения теории Морса, теории особенностей Уитни и др. Она позволила включить многочисленные блестящие результаты в различных областях математики в единую концепцию. Рене Том рассматривал ее приложения в биологии и лингвистике. В 1972 г. он опубликовал монографию «Структурная стабильность и морфогенез».

Результаты исследований Тома в теории катастроф были обобщены и развиты В.И. Арнольдом и его учеником А.Н. Варченко. Школа В.И. Арнольда вывела теорию катастроф за рамки чистой математики и даже физики. Идеи этой теории теперь применяются в различных областях науки, включая экономику и социологию.

Скончался Рене Том 25 октября 2002 г. в Бюр-сюр-Иветт.

Стивен Смейл



Американский математик Смейл Стивен родился 15 июля 1930 г. во Флинте, штат Мичиган. В 1948 г. он поступил в Мичиганский университет. Смейл не был отличником, как многие другие творцы математики. Из-за неудачи в изучении ядерной физики ему грозило отчисление. Но он, как говорится, взялся за ум. В 1952 г. он окончил университет, поступил в аспирантуру при Мичиганском университете и стал работать преподавателем в колледже Чикагского университета.

В 1957 г. Смейл стал доктором философии. Первые значительные научные результаты он получил в топологии. Самым известным его достижением является доказательство общей теоремы об h-кобордизме, из которой следует справедливость гипотезы Пуанкаре для $n \geq 5$. Для $n = 5$ и $n = 6$ справедлива и усиленная гипотеза Пуанкаре (о диффеоморфизме). Доказательство Смейла основано на оригинальном использовании теории перестроек М. Морса. Оно талантливо изложено в книге Дж. Милнора. Затем у Смейла возникли трудности из-за оригинального способа работы. Он заявил, что свои лучшие результаты он получил на пляжах Рио-де-Жанейро. Это вызвало негодование, и его лишили одной из стипендий. С 1958 по 1960 г. Смейл работал в Институте перспективных исследований в Принстоне. В 1959 г. он получил результат, из которого следует, что трехмерную сферу можно вывернуть наизнанку. Он работал профессором во многих университетах США, в том числе в Колумбийском и Калифорнийском в Беркли.

В 1966 г. на Международном математическом конгрессе в Москве Стивен Смейл за выдающиеся результаты в топологии был награжден медалью Филдса.

После значительных достижений в топологии Смейл переключился на исследование динамических систем, где достиг большого успеха. В работах по теории динамических систем он также использовал топологические методы. Им исследованы многомерные грубые динамические системы. Само понятие грубости динамических систем было точно сформулировано и изучено для двумерного случая в 1937 г. в работе Л.С. Понтрягина и А.А. Андронова.

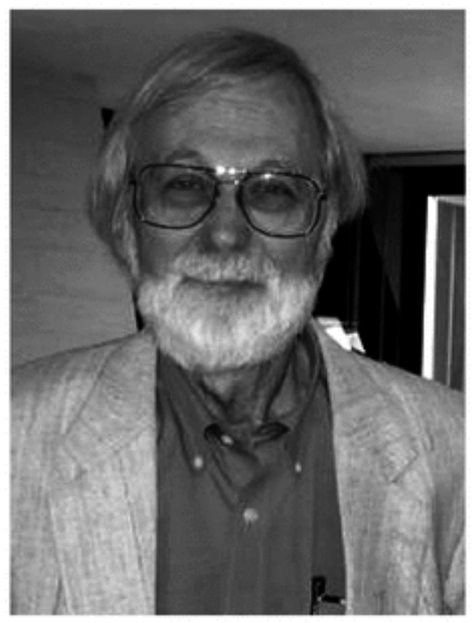
Смейл показал принципиальное отличие свойств двумерной и многомерных грубых динамических систем. Теория многомерных динамических систем находит интересные физические приложения в гидродинамике, теории турбулентности и т. д. В последние десятилетия она обогатилась открытиями странных аттракторов, универсальности Фейгенбаума и других важнейших понятий, имеющих первостепенное научное значение.

Большую известность получили применение Смейлом теории Морса в математической экономике и его исследования в теории вычислений.

В 1995 г. Смейл ушел из Калифорнийского университета на пенсию и перешел на должность профессора в Гонконгский университет. В 1998 г. он, подражая Гильберту, составил список из 18 проблем в области математики, которые предстоит решить в XXI в. В этот список вошли те проблемы Гильберта, которые не решены до сих пор, а также гипотеза Пуанкаре, проблема Навье – Стокса и другие. Из этого перечня в 2000 г. выбирались «проблемы тысячелетия», сформулированные Институтом Клэя.

Помимо медали Филдса, Смейл имеет много математических наград, в том числе премию Вольфа, полученную в 2007 г.

Джон Милнор



Следующим после Рене Тома топологом, получившим медаль Филдса, стал американский математик Милнор Джон Уиллард. Он родился 20 февраля 1931 г. в Ориндже, штат Нью-Джерси.

Почти вся жизнь Милнора связана с Принстонским университетом. В 1951 г. он окончил этот университет, в 1954 г. там же защитил диссертацию и получил степень доктора, а с 1960 г. стал профессором Принстонского университета.

В 1950-х годах Милнор проводил исследования по алгебраической топологии. Им получено много важных результатов в задаче о вычислении групп кобордизмов многообразий. Он использовал мощную топологическую технику операции Стинрода и спектральную последовательность Адамса. Дифференциальная топология окончательно выделилась в самостоятельное направление в 1956 г. после исследований Милнора, в которых было доказано существование гомеоморфных, но не диффеоморфных гладких многообразий. На основе K-теории он смог

классифицировать гомотопические сферы высоких порядков. Им доказано, что в каждой размерности может быть различное число гомотопических сфер. Так, например, существуют 28 разных семимерных сфер, только 2 восьмимерные сферы и 992 одиннадцатимерные сферы. Эти числа находят применение в квантовой теории поля при расчетах скорости распада элементарных частиц. Милнор также предложил способ явного построения этих сфер. Кстати, из открытия Милнора следовало, что предположение Пуанкаре о диффеоморфизме гладкого односвязного n-мерного многообразия и n-мерной сферы в общем случае неверно. В результате этих исследований в топологии появилось новое понятие «сфера Милнора».

В 1962 г. за выдающиеся результаты в дифференциальной топологии Милнор был награжден медалью Филдса на Международном математическом конгрессе в Стокгольме. Позже он стал лауреатом многих международных математических премий.

Джону Милнору принадлежат крупные достижения в разных разделах математики: теории дискретных и алгебраических групп, полиномиальных отображениях комплексных множеств. Например, при исследованиях 16-й проблемы Гильберта в работе 1964 г. Милнор рассматривал алгебраические поверхности в евклидовом, а также проективном пространстве и дал оценки суммы их чисел. В этой же работе им доказана теорема о сумме чисел Бетти. Он автор прекрасных книг по теории Морса, характеристическим классам и кобордизмам, дифференциальной топологии, алгебраической K-теории, симметрическим билинейным формам. Многие из его книг переведены на русский язык.

С 2005 г. Милнор – заслуженный профессор Государственного университета штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук.

В 2011 г. за вклад в развитие дифференциальной геометрии, топологии и алгебры Милнор награжден премией Абеля. Он стал третьим математиком (после Жана-Пьера Серра и Джона Томпсона), удостоенным наиболее престижных наград: медали Филдса, премии Вольфа и премии Абеля.

Майкл Атья

Атья Майкл Фрэнсис родился 22 апреля 1929 г. в Лондоне в семье ливанского писателя Эдуарда Атьи.

Учился Майкл в начальной школе в Хартуме (1934–1941), в средней школе в Каире и Александрии (1941–1945). В 1945 г. семья Атьи переехала в Лондон, где он продолжил свое образование. В 1949–1955 гг. Атья учился в Тринити-колледже в Кембридже и в 1955 г. под руководством В. Ходжа защитил диссертацию на тему «Некоторые применения топологических методов в алгебраической геометрии».

Научные исследования Атья проводил в США в Институте перспективных исследований в Принстоне (1955–1956, 1969–1972) и Англии в Лестере (1995–2005), Эдинбурге (2005–2008).

Уже первые работы Атьи по алгебраическим поверхностям и теории Римана – Роха сделали его известным математиком. Майкл Атья является крупным специалистом в нескольких разделах алгебраической топологии и комплексного анализа.

Вдохновленный идеей Гротендика Атья в сотрудничестве с Ф. Хирцебрухом создал топологическую K-теорию. При помощи K-теории Атья вместе с Р. Боттом доказал теорему о неподвижной точке, а в 1963 г. вместе с И. Зингером – теорему об индексе эллиптического оператора, которая является самым известным достижением Атьи. Она вобрала в себя целый ряд классических результатов, связывающих топологические свойства многообразий с дифференциально-геометрическими.

В теории дифференциальных уравнений с частными производными существует понятие индекса. Индексом эллиптического оператора называют гомотопический инвариант, характеризующий разрешимость дифференциального уравнения. В 1960 г. И.М. Гельфанд поставил вопрос о вычислении индекса любой нормально разрешимой предельной задачи и связанный с этим вопрос о гомотопической природе всех эллиптических предельных задач. В 1961 г. А.С. Дынин показал, что полезно обобщить класс допустимых предельных условий, включая в них коэффициенты, являющиеся сингулярными интегральными операторами. Такие предельные задачи получили название интегро-дифференциальных граничных задач. Эта идея была использована в работах Атьи и Зингера. В их работах решена проблема индекса общей предельной задачи, требующая изучения задачи «в целом», а не по свойствам решений с постоянными коэффициентами в малых областях, как делали до того. Атья и Ботт обобщили классические результаты И.Г. Петровского о гиперболических уравнениях в частных производных.

Первоначально в теореме об индексе рассматривались псевдодифференциальные операторы, крупный вклад в построение общей теории которых внес лауреат филдсовской медали 1962 г. Ларс Хёрмандер. Частным случаем теоремы об индексе является также теорема Римана – Роха – Хирцебруха – ключевой результат в алгебраической геометрии. Благодаря результату Атьи – Зингера появился новый раздел математики – аналитическая топология. Если раньше топологи изучали простые операторы на сложных многообразиях, а аналитики – сложные операторы на простых пространствах, то с появлением работ Атьи пришло время изучения сложных операторов на сложных многообразиях.

Доказательство Атьи и Зингера было сложным, основанным на использовании широкого спектра математических понятий. Изучение этой теоремы и упрощение доказательства продолжалось несколько лет во время проведения ежегодных математических семинаров. Теорема используется не только в математике, но и в физике при исследовании проблем квантовых аномалий, теории поля, при вычислениях размерности пространства инстантонов в калибровочных теориях.

Теорема об индексе Атьи – Зингера – одно из крупнейших достижений в области математики XX в., повлиявшее на многие важные более поздние

разработки в области топологии, дифференциальной геометрии и теории квантовых полей.

В последующие годы Атья занялся исследованиями современной «физической» математики. Им в соавторстве с Р. Боттом и И. Зингером развита теория Янга – Миллса над римановыми поверхностями. Особенно важны работы Атьи по математической физике (в области калибровочных полей). Им проведены исследования по классификации инстантонов, выполненные в соавторстве с В.Г. Дринфельдом, Н. Хитчиным и Ю.И. Маниным.

Среди его учеников наиболее известны С. Дональдсон и Н. Хитчин.

Атья – автор многочисленных обзорных и популярных докладов по современным проблемам математики и математической физики, прекрасный педагог и учитель.

25 мая 2004 г. король Норвегии Харальд V на торжественной церемонии в Осло вручил 75-летнему Фрэнсису Атье и 79-летнему Изадору Зингеру премию Абеля за работу на стыке физики и математики. Норвежская академия наук и литературы выделила 6 млн крон (858 тыс. долл.) «за открытие и доказательство теоремы об индексе с помощью топологии, геометрии и математического анализа, а также за их выдающуюся роль в создании новых связей между математикой и теоретической физикой».

В 2008 г. Атья вышел на пенсию и является почетным профессором Эдинбургского университета. Его труды, написанные до 1985 г., изданы Оксфордским университетом в пяти томах, но каждый год появляются его новые значительные работы.

С.П. Новиков

Новиков Сергей Петрович родился 20 марта 1938 г. в городе Горьком (ныне Нижний Новгород) в семье выдающихся математиков, о которых рассказано в гл. 12 и 15. Его отец Петр Сергеевич Новиков и мать Людмила Всеволодовна Келдыш были выдающимися математиками, «лузитанцами» второго поколения. В 1955 г. С.П. Новиков поступил на механико-математический факультет Московского университета, который окончил в 1960 г. После защиты диплома на тему «Гомотопические свойства комплексов Тома» Новиков становится аспирантом Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Дипломная работа и первые исследования Новикова в топологии посвящены вычислениям колец кобордизмов при помощи спектральной последовательности Адамса и операций Стинрода в алгебрах Хопфа над конечными полями.

Кольца внутренних гомологий (кобордизмы) были введены в современную топологию Рене Томом в 1953 г., а уже в 1954 г. Том значительно продвинулся в вопросе вычисления этих групп. Результаты Тома улучшались многими исследователями. В 1959 г. Новиков в работе о гомологиях алгебры

Стинрода ввел когомологические операции. Применив спектральную последовательность Адамса для исследования гомотопий пространств Тома, он в 1960 г. не только в более простой форме передоказал результаты, но и получил новую информацию о предложенных им и Милнором других видах кобордизмов. В 1961 г. Новиков в Москве встречался со Стивеном Смейлом. Эта встреча придала ему уверенности в себе, помогла окончательно разобраться в топологии многообразий.

В 1962 г. Новиков предложил конструкцию весьма общего характера, связанную с проблемой нахождения полной системы инвариантов диффеоморфизма односвязных многообразий.

Еще студентом, Новиков занимался вычислением колец кобордизмов при помощи спектральной последовательности Адамса, алгебр Хопфа и операций Стинрода в алгебрах Хопфа над конечными полями. Этими вопросами он интересовался до 1962 г.

Состав делегации на Международный математический конгресс в Стокгольме в 1962 г. формировал М.А. Лаврентьев. Сам он в возрасте 28 лет был участником Международного математического конгресса в Болонье в 1928 г. Понимая всю важность для молодых математиков участия в конгрессе, он включил в состав делегации 12 талантливых ученых, из которых только трое были докторами наук. Десять из них позже стали членами Академии наук. 24-летний аспирант С.П. Новиков, включенный М.А. Лаврентьевым в состав делегации, на конгресс не поехал, так как райком не утвердил его характеристику.

В 1963 г. Новиков окончил аспирантуру, стал сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1964 г. он защитил кандидатскую диссертацию на тему «Гладкие расслоения на сферы» и был награжден премией Московского математического общества.

После появления работ Понтрягина в нашей стране случился некоторый застой в топологии, интенсивно развиваемой французскими математиками. Новые результаты в топологии активно влияли на развитие алгебры, дифференциальных уравнений с частными производными, алгебраической и римановой геометрии, динамических систем. Исследования Новикова в 1960-е годы были направлены на ликвидацию отставания советской топологии от мировой. Его работы по теории расслоений лежат на границе топологии и теории динамических систем. Теория расслоений в определенном смысле является обобщением теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместо траекторий рассматриваются распределения гиперповерхностей, задаваемые дифференциальными формами. Позже, в 1981 г., за работы по расслоениям Новиков был награжден международной премией им. Н.И. Лобачевского.

В 1965 г. Новиков защитил докторскую диссертацию на тему «Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия», а в 1966 г. был избран членом-корреспондентом АН СССР.

20 августа 1966 г. на Международном конгрессе математиков в Москве с докладом выступил 28-летний Сергей Петрович Новиков. Он не стал читать свою заявленную работу, текст которой имелся у участников, а доложил

о новом результате. Новиков рассмотрел кобордизмы Понтрягина – Тома не как «вещь в себе», а как вычислительный метод, т. е. рассмотрел алгебру кобордизмов и класс задач, который можно решить с ее помощью. Таким образом, геометрические идеи Тома превратились в новый раздел топологической алгебры.

В 1967 г. С.П. Новиков получил Ленинскую премию за цикл работ по построению общей теории отображения односвязных многообразий на гладкие многообразия. Он разрабатывал классификацию односвязных многомерных многообразий. Новиковым доказана топологическая инвариантность рациональных классов Понтрягина. В доказательстве он использовал алгебраический аппарат, который успешно применялся им и в дальнейших исследованиях. В 1970 г. в Ницце состоялся Международный математический конгресс, на котором высшая награда Международного союза математиков – премия и медаль Филдса – была присуждена С.П. Новикову за работы по топологии. Однако поездка С.П. Новикова на конгресс, где проходило торжественное вручение награды, не состоялась. В Ниццу его не пустили. В это время Новиков занимался исследованием гладких многообразий, характеристическими классами, кобордизмами и вычислением стабильных гомотопических групп.

После получения впечатляющих результатов в алгебраической и дифференциальной топологии Новиков занялся теоретической физикой. Изучив работы Эйнштейна, Фейнмана, книги Ландау и Лифшица, исследования по квантовой теории поля, Новиков в своих работах 1970-х годов укреплял связи между современной математикой и теоретической физикой. В 1971 г. он возглавил математический отдел Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау. Основными в его программе стали исследования на рубеже современной математики и теоретической физики, базирующиеся на идеях геометрии, алгебраической геометрии, топологии (включая геометрию динамических систем). Новиков исследовал методы качественной теории динамических систем в теории однородных космологических моделей. В круг научных интересов Новикова входила общая теория относительности: он исследовал структуру однородных моделей. Результаты, полученные Новиковым в теории интегрируемых систем, тесно связаны с алгебраической геометрией. Сергей Петрович исследовал двумерный нерелятивистский оператор Паули в периодическом магнитном поле. В 1981 г. Новиков был избран действительным членом АН СССР, в 1982 г. – назначен заведующим кафедрой высшей геометрии и топологии МГУ.

С 1983 г. С.П. Новиков занимает крупные должности в международных и отечественных научных организациях. В 1984 г. он назначен заведующим отделом геометрии и топологии Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Его избирали членом комитета по присуждению медали Филдса на конгрессах математиков в Беркли и Пекине. Новиков был вице-президентом Международной ассоциации математической физики (1986–1990), возглавлял Московское математическое общество (1985–1996) и проблемную комиссию «Геометрия и топология» при Отделении математики АН СССР (1984–1991).

В 1980-е и 1990-е годы Новиков активно занимался теорией струн и суперструн. Он разрабатывал теорию солитонов, осуществлял операторное построение многопетлевой бозонной квантовой теории струн с взаимодействиями, исследовал двумерные операторы Шрёдингера. Новикову принадлежат первые работы по теории многозначных функционалов. Эту теорию он использовал при исследовании калибровочных полей. Б.А. Дубровин, А.Т. Фоменко и С.П. Новиков осуществили мечту многих физиков и математиков об изложении современной геометрии и топологии в доступной для физиков-теоретиков форме. Они опубликовали трехтомный курс «Современной геометрии», который дает физикам-теоретикам материал, необходимый для работы в новых разделах математической физики.

С.П. Новиков является почетным членом многих зарубежных академий и научных обществ. В 2005 г. Новиков получил премию Вольфа за вклад в алгебраическую топологию, дифференциальную топологию и математическую физику. Он стал одним из восьми математиков, удостоенных и медали Филдса, и премии Вольфа. В 2008 г. Новиков награжден премией им. Погорелова Национальной академии наук Украины. В 2009 г. Сергею Петровичу присуждена золотая медаль им. Н.Н. Боголюбова Отделения математики РАН. Новиков преподает в Университете в Мэриленде и является старшим научным сотрудником Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау.

Гипотеза Пуанкаре

В 1900 г. Пуанкаре опубликовал статью, в которой утверждал, что если у трехмерной поверхности гомология совпадает с гомологией сферы, то и сама поверхность является сферой. В его рассуждения вкралась ошибка, которую он сам и обнаружил. К 1904 г. Пуанкаре определил фундаментальную группу, первую из гомотопических групп и на ее основе построил контрпример к собственной теореме. Тогда он сформулировал утверждение правильно.

В 1904 г. Анри Пуанкаре выдвинул гипотезу о том, что все замкнутые односвязные трехмерные поверхности гомеоморфны сфере. Чтобы понять смысл этой гипотезы, необходимо усвоить смысл понятия «гомеоморфизм».

Топологическими свойствами (или топологическими инвариантами) считают те свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфных отображениях (гомеоморфизмах), т. е. отображениях, которые являются взаимно однозначными и взаимно непрерывными. Термин «гомеоморфизм» был введен А. Пуанкаре в 1895 г. Наглядно гомеоморфизм можно представить себе как такое отображение одного множества на другое, которое происходит и без разрывов, и без склеиваний. Например, будем считать, что фигуры A и B изготовлены из очень прочного и эластичного материала, и будем допускать возможность любых растяжений и искривлений этого материала без разрывов и без образования складок и склеек. Если мы сможем при этих условиях наложить фигуру A на фигуру B, то эти фигуры гомеоморфны. Так, контур любого многоугольника гомеоморфен окружности.

Другой пример. Изображенные в упрощенном виде линиями без засечек буквы русского алфавита Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным выше буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита. Поверхности шара, куба, цилиндра гомеоморфны между собой. Однако они не гомеоморфны тору, который можно наглядно представить как поверхность баранки или автомобильной камеры. Если гомеоморфизм является дифференцируемым отображением, то он называется диффеоморфизмом. По сравнению с диффеоморфными многообразиями гомеоморфные многообразия имеют меньшее сходство.

В начале XX в. началось интенсивное изучение гомеоморфизмов. Эта задача была поставлена Д. Гильбертом в 5-й проблеме. Особое значение имело установление Л. Брауэром негомеоморфности R^n и R^m при $n \neq m$, благодаря чему была восстановлена вера математиков в геометрическую интуицию, поколебленную результатами Кантора о равномощности R^n и R^m.

Долгое время на гипотезу Пуанкаре не обращали внимания. В 30-е годы XX в. английский математик Джон Генри Константин Уайтхед объявил, что доказал гипотезу Пуанкаре. Доказательство оказалось неверным. Пытаясь исправить ошибку, Уайтхед обнаружил интереснейшие классы трехмерных поверхностей, результаты исследования которых составили теорию низших размерностей (выяснилось, что низшие размерности исследовать сложнее, чем высшие).

Некоторые математики называют доказательство гипотезы Пуанкаре задачей тысячелетия. Почему ей уделяется так много внимания? Дело в том, что доказательство гипотезы Пуанкаре позволяет продвинуться в решении основополагающей проблемы математики и физики – проблемы определения формы Вселенной, ее пространственных свойств и сферичности пространства. Институт Клэя выделил миллион долларов в качестве премии «Миллениум» за доказательство гипотезы Пуанкаре.

Гипотеза в виде заметки на полях была помещена в конце статьи, посвященной другой теме. Пуанкаре указал условия, которые, по его мнению, позволяют считать то или иное многообразие гомеоморфным сфере, но не доказал своего предположения. К тому времени топологические свойства двумерных поверхностей были хорошо изучены. Пуанкаре сформулировал свою гипотезу для трехмерного случая. Естественное обобщение на n-мерный случай называется обобщенной гипотезой Пуанкаре. Пуанкаре предполагал, что справедливо более сильное утверждение о диффеоморфизме гладкого односвязного n-мерного многообразия и n-мерной сферы. Для случая $n = 5$ и $n = 6$ это оказалось справедливым, но в общем случае – неверным.

Многие математики стремились доказать обобщенную гипотезу Пуанкаре, но в первой половине XX в. серьезных результатов не было достигнуто. Исследования Тома 1951 г. по теории кобордизмов ускорили развитие топологии и продвинули исследования, связанные с гипотезой Пуанкаре.

После работ Джона Милнора и Майкла Атьи американский математик Стивен Смейл, специалист в топологии и теории динамических систем, сумел

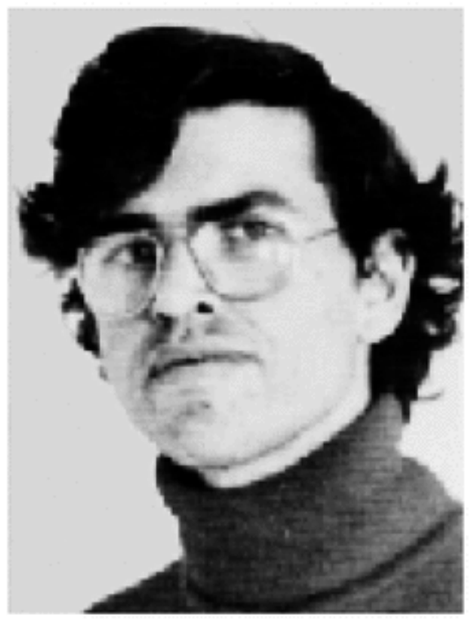
доказать теорему о кобордизме, из которой следовала справедливость гипотезы Пуанкаре для размерностей $n \geq 5$. За этот результат он в 1966 г. получил одновременно с Майклом Атьей на Международном математическом конгрессе в Москве премию и медаль Филдса.

Оказалось, что гипотезу Пуанкаре для многомерных пространств доказать намного проще, чем для $n = 3$ и $n = 4$. Это объясняется тем, что методы, эффективные для больших размерностей, в малых размерностях приводят к сильным вырождениям. Эта особенность справедлива и для классификации многообразий.

Спустя 16 лет, в 1982 г., Майкл Фридман также получил медаль Филдса за доказательство гипотезы Пуанкаре для $n = 4$. Случай, когда $n = 3$, оказался самым сложным, поэтому был разрешен только в начале XXI в.

Математиков волновал вопрос: верно ли для трехмерных поверхностей в четырехмерном пространстве то, что верно для двумерных поверхностей в трехмерном пространстве? Как была доказана гипотеза Пуанкаре для $n = 3$, изложено ниже, в статье о Г.Я. Перельмане.

Уильям Тёрстон



Американский математик Тёрстон Уильям Пол родился 30 октября 1946 г. в Вашингтоне. После окончания Нового колледжа во Флориде в 1967 г. он получил степень бакалавра, а в 1972 г. стал доктором математики в Калифорнийском университете в Беркли. После получения ученой степени Тёрстон проработал год в Институте перспективных исследований в Принстоне и год в Массачусетском технологическом институте в должности ассистента профессора.

В 1974 г. Тёрстон стал профессором Принстонского университета. Там он серьезно занялся исследованиями в топологии. Свои научные идеи Тёрстон любит демонстрировать с помощью ножниц и бумаги. В конце 70-х годов XX в. он предложил систематизировать все трехмерные многообразия. По его мнению, каждое из многообразий тяготеет к некоторой «предпочтительной» геометрической форме подобно тому, как кусок шелка стремится принять форму того манекена, вокруг которого он обернут. Тёрстон сформулировал гипотезу, получившую название гипотезы геометризации. Он предположил, что любое трехмерное многообразие (поверхность) склеивается максимум из восьми различных трехмерных «строительных блоков».

Наиболее простыми примерами таких «кирпичей» являются трехмерная сфера (трехмерное эллиптическое пространство), трехмерное евклидово пространство (трехмерное плоское пространство), трехмерное гиперболическое пространство. Остальные блоки имеют более сложную структуру. Гипотеза геометризации оказалась более сильным утверждением, чем гипотеза Пуанкаре, и обобщает последнюю. Доказательство гипотезы геометризации автоматически доказывает гипотезу Пуанкаре.

В 1983 г. Тёрстон за вклад в топологию был удостоин медали Филдса на Международном математическом конгрессе в Варшаве. В 1991 г. он вернулся в Калифорнийский университет в Беркли и в 1993 г. стал директором Института исследования математических наук. В 1996 г. Тёрстон перешел в Калифорнийский университет в Девисе, а с 2003 г. работает профессором математики и информатики в Корнелльском университете.

Майкл Фридман

Американский математик Фридман Майкл Хартли родился 21 апреля 1951 г. в Лос-Анджелесе в еврейской семье. В 1968 г. он поступил в Калифорнийский университет в Беркли, а затем перешел в Принстонский университет. В 1973 г. он получил степень доктора философии в Принстонском университете, до 1975 г. работал преподавателем в Калифорнийском университете в Беркли. Вскоре Фридман перешел в Институт перспективных исследований в Принстоне, в 1976 г. был назначен адъюнкт-профессором в Университете Сан-Диего в Калифорнии, а в 1982 г. стал там же профессором.

Пытаясь доказать гипотезу Пуанкаре для случая $n = 4$, Фридман получил более общий результат – осуществил классификацию четырехмерных односвязных компактных многообразий. За простой формулировкой результата скрывается исключительно трудное доказательство. Основным инструментом Фридмана была сложная техника перестройки, основанная на вклеивании так называемых ручек Кассона. Идея классификации с помощью формы пересечения заимствована Фридманом из работы Рохлина 1952 г.

За классификацию четырехмерных односвязных гладких многообразий и доказательство гипотезы Пуанкаре для $n = 4$, в 1986 г. Фридман на Международном математическом конгрессе в Беркли был награжден медалью Филдса.

Фридман имеет многочисленные награды, является членом Национальной академии наук США, американской Академии искусств и наук и Нью-Йоркской академии наук. В настоящее время он работает в Калифорнийском университете в Санта-Барбаре в фирме «Майкрософт» и руководит группой, члены которой занимаются разработкой квантового компьютера.

Саймон Доналдсон

Английский математик Доналдсон Саймон родился в 1957 г. в Кембридже. В 1979 г. после окончания колледжа Пемброук в Кембридже он стал бакалавром гуманитарных наук и в 1980 г. поступил в аспирантуру в Оксфорде.

Дональдсон продолжил работы Фридмана по четырехмерным гладким (дифференцируемым) многообразиям. Во время обучения в аспирантуре он спустя всего год после классификации Фридманом четырехмерных односвязных гладких многообразий показал, что эти многообразия гомеоморфны, но не диффеоморфны. Следовательно, предположение Пуанкаре о диффеоморфизме гладкого односвязного n-мерного многообразия и n-мерной сферы не подтвердилось. Удивительным в работе Дональдсона является то обстоятельство, что топологическая теорема была доказана с помощью колибровочных полей, т. е. с помощью методов математической физики. Опубликованный Дональдсоном в 1983 г. результат ошеломил математический мир.

После получения докторской степени в Оксфордском университете в 1983 г. Доналдсон был назначен младшим научным сотрудником в Оксфорде и провел 1983/84 учебный год в Институте перспективных исследований в Принстоне. В Оксфорд он вернулся в 1985 г. профессором.

Результаты Доналдсона открыли неожиданные свойства многообразий, благодаря чему привлекли ученых к новой области исследований. Особенно интересны результаты, связанные с дифференциальной структурой алгебраических многообразий. Доналдсоном исследовано соотношение топологических и алгебраических свойств четырехмерных многообразий.

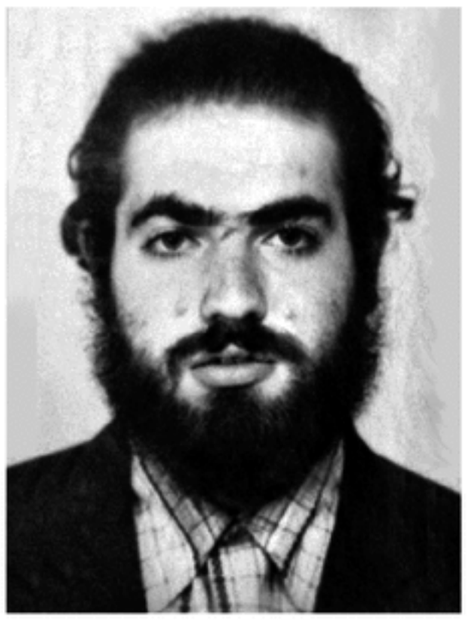
Работы Доналдсона интересны не только результатами, но и методом доказательства. Наряду с тонкой топологической техникой, он использовал конструкции современной теории поля – инстантонные решения уравнений Янга – Миллса.

В 1985 г. Доналдсон получил премию Лондонского математического общества. В 1986 г. он был избран членом Королевского общества и на Международном математическом конгрессе в Беркли был удостоен медали Филдса.

В 1999 г. Доналдсон перешел в Имперский колледж Лондона. Он получил много премий за свои математические работы и работы в области теоретической физики, в том числе премию Крафурда в 1994 г., премию короля Фейсала в 2004 г., премию Шоу в 2009 г. В 2010 г. он был избран иностранным членом Шведской королевской академии наук.

Математические работы Доналдса помогают понять законы материи на субъядерном уровне. В настоящее время Доналдс продолжает исследования в топологии и дифференциальной геометрии.

Г.Я. Перельман



Перельман Григорий Яковлевич родился 13 июня 1966 г. в семье инженера-электрика.

В 1982 г. 16-летний Григорий Перельман получил золотую медаль на Международной математической олимпиаде школьников в Будапеште и без экзаменов был принят в Ленинградский университет. Он был победителем студенческих математических олимпиад разных уровней, получал Ленинскую стипендию.

Окончив с отличием университет, Перельман поступил в аспирантуру при Ленинградском отделении Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. После защиты диссертации на тему «Седловидные поверхности в евклидовой геометрии» Перельману предложили работать в институте, где он занимался исследованиями в области пространств Александрова и геометрии Римана. Его статьи опубликованы в ведущих российских и американских журналах.

В 1992 г. Перельман был приглашен на один семестр в Нью-Йоркский университет, а затем оставлен на двухгодичную стажировку в Калифорнийском университете в Беркли. В Нью-Йорке он поддерживал отношения с китайским математиком Жэнь Тянем. Вместе они ездили на научные семинары в Принстон. К концу первого года пребывания в Беркли Перельман написал несколько статей. В 1994 г. ему предложили прочитать лекцию на Международном математическом конгрессе в Цюрихе. Перельмана пригласили на работу в университеты Тель-Авива, Стэнфорда, Принстона и Институт углубленных исследований. Он отверг эти предложения и вернулся в Санкт-Петербург.

Известный математик Уильям Тёрстон, получивший в 1982 г. медаль Филдса за вклад в топологию, в конце 1970-х годов предложил новую классификацию трехмерных поверхностей. Он высказал предположение, позже названное гипотезой геометризации. Из доказательства этой гипотезы следует доказательство гипотезы Пуанкаре.

Ричард Гамильтон, математик из Корнуэлла, в 1982 г. опубликовал статью о дифференциальных уравнениях, обобщающих уравнения термодинамики и названных потоками Риччи. Математики предполагали, что идеи Гамильтона помогут доказать гипотезы Тёрстона и Пуанкаре. При попытках доказать эти гипотезы у Гамильтона на некоторых участках поверхностей возникали сингулярности (особенности), препятствующие достижению единообразия. Особенно мешали ему сингулярности, называемые сигарами и шеями. Перельман во время командировки в США слушал лекции Гамильтона и беседовал с ним. Ранее написанная статья Перельмана о пространствах Александрова могла помочь избежать сложностей с этими сингулярностями, но, по мнению Перельмана, Гамильтон не понял его идей. Тогда Григорий Яковлевич решил доказать гипотезу геометризации самостоятельно.

В основе доказательства Перельмана лежит исследование потоков метрик на трехмерных многообразиях. Он исследовал свойства исходной поверхности с помощью дифференциального уравнения специального вида, напоминающего знаменитые уравнения Эйнштейна из общей теории относительности. Парадоксальность этого подхода состоит в том, что сама трехмерная сфера изначально предполагается не гладкой, а топологической сферой. Другими словами, наша сфера не обязана быть гладкой поверхностью и в общем случае подобна репейной колючке. Но решения дифференциального уравнения в обычной ситуации являются гладкими (дифференцируемыми), а не «колючими» (непрерывными). Перельман находит способ системно «отщипывать колючки» (разрешать особенности).

Решениями уравнения Гамильтона, взятого Перельманом в качестве отправной точки, являются куски исходной поверхности. Идея Перельмана состоит в том, что «хорошим» свойствам пространства решений уравнения Гамильтона соответствуют «хорошие» поверхности. Перельману после крайне сложных в техническом плане вычислений удалось установить такие свойства решений, соответствующие, в частности трехмерной сфере.

В ноябре 2002 г. Перельман разместил в Интернете статью «Формула энтропии для потоков Риччи и ее применение в геометрии» и отправил заинтересованным математикам, в том числе Гамильтону, Жэнь Тяню и Яу Шинтану. Жэнь Тянь понял важность полученного результата и организовал его обсуждение. Статья была первой частью доказательства гипотезы геометризации, фактически черновым вариантом доказательства без подробных выкладок. Математики не до конца поняли Перельмана, но стало ясно, что он знает, как доказать гипотезу Пуанкаре. Перельман показал, что «сигары», с которыми математики не могли справиться, не возникают, а с другими сингулярностями можно справиться некоторыми особыми приемами.

Перельмана пригласили прочитать цикл лекций о своей статье в шесть ведущих американских университетов. Он принял эти приглашения. На лекции в Принстоне присутствовали многие знаменитые математики, в том числе Джон Болл, Эндрю Уайлс, Джон Форбс Нэш-мл. и Джон Конвей. Во время чтения лекции Перельман даже не упоминал о гипотезе Пуанкаре.

18 апреля 2003 г. в журнале «Science» была опубликована статья Перельмана. Из-за краткости статьи не все математики были убеждены, что Перельман полностью справился с сингулярностями. После возвращения в Санкт-Петербург в середине июля Перельман поместил в Интернете две следующие части своего доказательства. Две команды экспертов в США начали проверку работы Перельмана.

Суждение о корректности доказательства математической теоремы выносится влиятельными математическими журналами, находящимися под контролем представителей научной элиты. Проверка корректности доказательства проводится комиссией экспертов, отбираемых редколлегией журнала. Имя ученого, работа которого рассматривается, во время работы комиссии держится в секрете. Работа публикуется только в том случае, если доказательство признается оригинальным, полным и не имеет изъянов. Чтобы считаться полностью апробированным, доказательство должно быть

опубликовано в курируемом экспертами журнале и выдержать двухгодичную проверку математическим сообществом.

В сентябре 2004 г. Перельман получил от Жэнь Тяня, одного из экспертов, проверяющих его работу, письмо, в котором сообщалось, что в Принстоне был проведен двухнедельный семинар и что ошибок в доказательстве не обнаружено.

Институт Клэя учредил премию «Миллениум» размером в миллион долларов за доказательство гипотезы Пуанкаре. Жэнь Тяню институт выделил средства на написание специальной книги, в которой последовательно были бы изложены все результаты Гамильтона и Перельмана. В мае 2006 г. опубликована статья, в которой более подробно изложены результаты Перельмана. Институт Клэя пришел к предварительному выводу, что Перельман и Гамильтон должны разделить премию «Миллениум», а комитет из девяти выдающихся математиков проголосовал за присуждение Перельману медали Филдса.

В июне 2006 г. к Григорию Яковлевичу в Санкт-Петербург прилетел президент Международного математического союза Джон М. Болл. В течение двух дней он убеждал Перельмана принять награду на публичной церемонии, приуроченной к открытию конгресса Международного математического союза, который должен был состояться 22 августа 2006 г. в Мадриде. По неизвестной причине, Перельман отказался.

20 июня 2006 г. на конференции по теории струн в аудитории отеля «Дружба» в Пекине Яу Шинтан сообщил, что два его студента, Чжу Су-Пин и Цао Хуайдун, полностью доказали гипотезу Пуанкаре за несколько недель до конференции. Он заявил, что в доказательстве Перельмана некоторые ключевые моменты лишь намечены и отсутствуют важные детали и звенья, а сам Перельман отказывается дать более подробные комментарии. Работа студентов, по мнению Яу, восполняет все пробелы. Статья упомянутых студентов (объемом в 300 страниц) «Полное доказательство гипотез Пуанкаре и геометризации: приложение теории потоков Риччи – Гамильтона – Перельмана» была в июне напечатана в «Азиатском математическом журнале», редактором которого является Яу Шинтан. Никто из ведущих математиков, кроме Яу Шинтана, предварительно с этой статьей не знакомился. Теперь математикам-экспертам из Института Клэя предстояло решить, чей вклад весомее.

18 марта 2010 г. Институт Клэя объявил о присуждении Григорию Перельману премии в размере одного миллиона долларов. Это первое в истории присуждение премии за решение одной из проблем тысячелетия. 8 июня 2010 г. в Париже состоялась математическая конференция, на которой Перельман должен был получить премию, но он на вручение не явился. При этом организатор и учредитель премии, Джеймс Карлсон, сказал, что он готов ждать решения Перельмана столько, сколько потребуется.

Загадкой остается личная жизнь Григория Перельмана. Он ведет аскетичный образ жизни. Из Ленинградского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН он уволился, живет в Санкт-Петербурге с матерью. В 1990-е годы его отец внезапно уехал в Израиль и фактически

порвал отношения с семьей. Сестра Григория давно живет за границей, видятся они редко.

Главный редактор французского математического журнала «Inventiones Mathematicae» Жан-Мишель Бисмут считает, что метод решения, использованный Перельманом, даже более интересен, чем само решение проблемы Пуанкаре, в котором перемешаны идеи из математики и теоретической физики. Эта гипотеза была навязчивой идеей для многих ученых, ее решение связано с гипотезой геометризации и оказалось технически сложным, элегантным и естественным. Перельман стал использовать дифференциальные уравнения в топологии. Это расширяет диапазон методов исследования для целой группы математиков, ищущих новые способы описания сложных объектов. Оказалось, что уравнения, используемые Перельманом, можно применять в теории струн.

Глава 21

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пока алгебра и геометрия развивались врозь, их прогресс был медленным, применение – ограниченным; когда же эти две науки были соединены, они стали помогать друг другу и быстро шагать к совершенству.

Ж. Лагранж

Очерк развития алгебраической геометрии

Одни творцы математики тяготеют в своих работах к развитию геометрических идей, другие – алгебраических идей. Геометрия является наукой о пространстве. Она статична. Алгебра динамична, ее можно назвать наукой о времени. Эти различия между геометрией и алгеброй приводят к стремлению рассматривать «гибриды» геометрии и алгебры. Один из таких гибридов – алгебраическая геометрия, являющаяся разделом математики, в рамках которого изучают геометрические объекты, связанные с алгебраическими уравнениями: алгебраические многообразия и их различные обобщения. Понятие «алгебраическое многообразие» обобщает понятия «алгебраическая кривая» и «алгебраическая поверхность» на пространства размерностью более трех. В алгебраические многообразия входят алгебраические кривые, алгебраические поверхности, абелевы многообразия. Рассматриваемые свойства являются преимущественно геометрическими, а выводятся они алгебраическими методами. Одной из основных задач алгебраической геометрии является исследование пересечения двух и более алгебраических многообразий. В основе алгебраической геометрии лежит теорема Абеля о множествах нулей и полюсов мероморфных функций, считающаяся одним из наиболее важных открытий математики XIX в.

Необходимо помнить, что алгебраическая геометрия не имеет ничего общего с аналитической геометрией, хотя слова «алгебраическая» и «аналитическая» близки по смыслу. Чтобы не путать эти разделы математики, творение Декарта и Ферма, известное как аналитическая геометрия, правильнее было бы называть координатной геометрией.

Алгебраическая геометрия – самый популярный и быстро развивающийся раздел современной абстрактной математики. Понятия и результаты алгебраической геометрии используются во многих разделах математики: теории чисел, дифференциальной топологии, теории групп, теории дифференциальных уравнений, теории комплексных пространств, теории категорий, функциональном анализе. В последние десятилетия она играет важную роль в теории солитонов, одном из важнейших разделов математической физики.

Возникла алгебраическая геометрия как теория алгебраических кривых. Монж и Понселе первыми сопоставили алгебраические уравнения с действительными коэффициентами и множества их комплексных решений, отождествляемое с множеством точек в комплексном координатном пространстве соответствующей размерности.

После выхода в свет работ Абеля и Якоби по теории эллиптических функций Риман ввел новый принцип исследования функций комплексного переменного. Началось изучение топологии алгебраических кривых. Благодаря работам Римана геометрия алгебраических кривых заняла важное место в математике наряду с теорией абелевых интегралов и абелевых функций.

Гаусс в работах по геодезии изучал поверхности. Риман перенес на многомерный случай идеи Гаусса. Термин «многообразие» был введен Риманом в знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».

Появление во второй половине XIX в. теории алгебраических чисел сделало естественным изучение диофантовых уравнений с коэффициентами из произвольного поля алгебраических чисел. Параллельно с теорией алгебраических чисел развивалась теория алгебраических функций, причем между ними существует аналогия. Исследования этих теорий проводятся с помощью методов алгебраической геометрии, в которой неинвариантное понятие системы уравнений заменяется понятием алгебраического многообразия над заданным полем, а место решений занимают рациональные точки со значениями в этом поле или его конечном расширении.

В 1910–1920 годы развитие теории колец и теории полей способствовало систематическому построению многомерной алгебраической геометрии над произвольными полями констант. Алгебраическое многообразие определяется системой алгебраических уравнений. В зависимости от того, к какому полю коэффициентов принадлежат координаты точек, говорят о рациональном, вещественном или комплексном алгебраическом многообразии. Это привело к возникновению понятия комплексного проективного алгебраического многообразия.

Классификация одномерных комплексных алгебраических кривых эквивалентна классификации компактных римановых поверхностей. При этом единственным дискретным топологическим инвариантом является род g – число «ручек» римановой поверхности. Изучение общих свойств алгебраических кривых приводит к их делению на три класса в зависимости от рода кривой g: кривые с $g = 0$, кривые с $g = 1$ и кривые с $g \geq 2$. Их геометрическими аналогами являются соответственно сфера, тор и римановы поверхности рода $g \geq 2$. Классификация двумерных комплексных алгебраических поверхностей оказывается задачей гораздо более сложной. Здесь существует значительно большее число возможностей.

В 1922 г. молодой американец Луис Морделл обнаружил связи множества решений диофантова уравнения с геометрическим родом той комплексной кривой, которая задается этим уравнением. Он высказал предположение, что при степени уравнения больше двух размерность пространства решений выражается через род кривой и поэтому эта размерность конечна.

Начиная с 1920-х годов в работах Нётер, Ван-дер-Вардена и других математиков понятие алгебраического многообразия было обобщено на случай произвольного поля.

В 1924 г. Э. Артин ввел понятие дзета-функции алгебраической кривой. Ван-дер-Варден в 1933–1938 гг. положил в основу абстрактной алгебраической геометрии теорию полиномиальных идеалов. В 1940 г. Герман Вейль обнаружил, что для доказательства гипотезы Римана для алгебраических кривых произвольного рода необходимо привлечь теорию многомерных многообразий над произвольными полями. В связи с этим им были построены:

– теория абстрактных алгебраических многообразий над произвольными полями;

– теория пересечений для абстрактных алгебраических многообразий;

– теория дивизоров;

– общая теория абелевых многообразий.

Андре Вейль перенес на алгебраическое многообразие идею конструкции дифференцируемых многообразий с помощью «склейки», что позволило определить абстрактное алгебраическое многообразие.

Основоположником современной теории комплексных многообразий является Соломон Лефшец.

Жан-Пьер Серр ввел новые мощные методы коммутативной алгебры. Если до 1950 г. проходило накопление различных методов классификации многообразий, то после алгебраической теории многообразий начали происходить качественные изменения.

В конце 1950-х годов алгебраическая геометрия была перестроена Александром Гротендиком. Используя язык теории категорий, он обобщил и прояснил многие важные классические конструкции алгебраической геометрии, абстрактное определение которых было ранее мало гармоничным. Он создал много новых разделов алгебраической геометрии, опираясь на теорию схем.

В мемуарах 1960 г. Гротендик обобщил введенное А. Вейлем понятие абстрактного алгебраического многообразия. Он ввел в алгебраическую геометрию язык функторов и теории категорий и создал *K*-теорию.

Алгебраическая *K*-теория – часть общей линейной алгебры, изучающей *K*-функторы. Она обобщает результаты исследований о существовании и единственности базиса векторного пространства и других общих теоретико-групповых фактов о линейных группах над полями. В алгебраической *K*-теории широко используются теория колец, гомологическая алгебра, теория категорий и теория линейных групп.

Первой предпосылкой к возникновению теории было введение Уайтхедом понятия «кручение», связанного с гомотопической эквивалентностью конечных комплексов, и анализ групп Уайтхеда в 40-е годы XX в. Второй – доказательство в 1957 г. Гротендиком теоремы Римана – Роха и ее обобщений. Эта теорема посвящена решению проблемы Римана – Роха – вычислению размерности пространства сечений пучка. Она позволяет выразить эйлерову характеристику локального свободного пучка на алгебраическом или аналитическом многообразии в терминах многообразия характеристических классов Чжэня этого пучка.

Одномерная теорема Римана – Роха была обобщена сначала Ф. Хирцебрухом, а затем А. Гротендиком на многомерный случай. В доказательстве Гротендика был введен *K*-функтор как группа значений универсальной аддитивной функции на когерентных пучках на гладком алгебраическом многообразии. Затем *K*-функтор был перенесен в топологию, где нашел многочисленные применения, сделав возможным решение многих задач.

В 1922 г. английский математик Луис Джоэл Морделл сформулировал предположение о конечности множества рациональных точек на алгебраической кривой рода $g > 1$. Это предположение стали называть проблемой Морделла. Доказать ее спустя 60 лет сумел обладатель медали Филдса 1986 г. немецкий математик Герд Фалтингс.

Достижения ученых в области алгебраической геометрии постоянно находятся в поле зрения международной математической общественности и Международного математического союза. Математиков, занимающихся алгебраической геометрией, награждают престижными математическими премиями, в том числе и медалью Филдса.

Сильная школа алгебраической геометрии создана в Японии, но свои основные результаты математики японского происхождения получили, работая в США. Больших успехов добился Кенчики Ивасава. Трое математиков из Страны восходящего солнца награждены медалью Филдса: Кунихиро Кодаира в 1954 г., Хейсуке Хиронака в 1970 г. и Сигифуми Мори в 1990 г.

В 1966 г. медали Филдса за работы по алгебраической геометрии был удостоен А. Гротендик. Медали Филдса за исследования в области алгебраической геометрии получили Д. Мамфорд в 1974 г., П. Делинь и Д. Квиллен в 1978 г., Г. Фалтингс в 1986 г., В.Г. Дринфельд в 1990 г., Л. Лаффорг и В.А. Воеводский в 2002 г., А.Ю. Окуньков в 2006 г., Нго Бао Чау в 2010 г.

Алгебраическая геометрия в современной математике играет ведущую роль. Ее проблемы стимулируют развитие и алгебры, и геометрии, и топологией, и теории чисел, и многих других разделов математики. Из семи «задач на миллион» три имеют непосредственное отношение к алгебраической геометрии: гипотеза Ходжа, гипотеза Бёрча – Свиннертон-Дайера и гипотеза Римана.

Кунихико Кодаира

Японский математик Кодаира Кунихико родился 16 марта 1915 г. в Токио. В 1941 г. он окончил Токийский университет, а с 1943 до 1949 г. преподавал математику в этом университете. В 1949 г. Кодаира переехал в США и до 1961 г. работал в Институте перспективных исследований в Принстоне. Его исследования относятся к топологии, комплексному анализу, алгебраической и дифференциальной геометрии.

Наиболее важным результатом Кодаиры считают введение критерия алгебраической компактности комплексного многообразия. Ему также принадлежат первые многомерные обобщения теоремы Римана – Роха. Работы Кодаиры подвели итог исследованиям алгебраических многообразий над полем комплексных

чисел. За эти работы Кодаира был в 1954 г. награжден медалью Филдса на Международном математическом конгрессе в Амстердаме.

По мнению Германа Вейля, председателя Филдсовского комитета 1954 г., эти работы стали крупнейшим вкладом в теорию комплексных многообразий после работ В. Ходжа. Одновременно с Кодаирой медаль Филдса получил Ж.-П. Серр. В ходе своего выступления на конгрессе Вейль сказал: «У непосвященного может возникнуть ощущение, что Филдсовский комитет плохо работал, так как выдал две награды за похожие работы. И его задача показать, что, несмотря на некоторое пересечение в методах, они дают решения совершенно различных труднейших проблем» [56].

Изучая поведение голоморфных форм на алгебраических многообразиях, Кодаира ввел инвариант, позволяющий различать двумерные алгебраические поверхности в духе алгебраических кривых. Этот инвариант (размерность Кодаиры) связан с кратными родами поверхности, определяемыми поведением голоморфных форм старших размерностей. Размерность Кодаиры позволяет получить классификацию поверхностей, аналогичную кривым, но в этом случае далеко не полную. Ранее большинство результатов по классификации комплексных двумерных поверхностей было получено исследователями итальянской школы алгебраической геометрии. Новые результаты в классификации комплексных многомерных алгебраических многообразий получил Мори.

В дальнейшем Кодаира получил еще несколько важных результатов. Особенно следует отметить цикл работ по деформации аналитических пространств, выполненный совместно с Д. Спенсером и посвященный изучению семейства комплексных многообразий.

В 1967 г. Кодаира вернулся на родину. В 1985 г. он был удостоен премии Вольфа.

Скончался Кунихико Кодаира 26 июля 1997 г. в Кофу.

Хейсуке Хиронака

Американский математик профессор Гарвардского университета Хиронака Хейсуке родился 9 апреля 1931 г. в японском городе Ямагути. Основным направлением его работ было разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями нулевой характеристики.

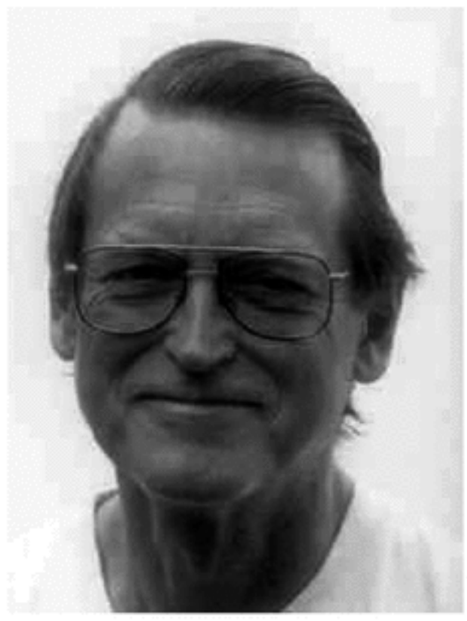
Многообразие с особенностями определяется как многообразие, у которого в некоторых точках якобиан имеет не максимальный ранг. Простейшим примером многообразия с особенностями являются кривые типа «клюв». Другие многообразия с особенностями, называемые орбифолдами, возникают в теории струн. Проблема разрешения особенностей считалась центральной в алгебраической геометрии. Разрешение особенностей для кривых было известно уже в XIX в., а для поверхностей было показано в работах математиков итальянской школы алгебраической геометрии. Но оно считалось не строгим, поскольку было

получено трансцендентными методами. Алгебраическое доказательство над полями характеристики нуль было дано О. Зарисским в 1939 г., а для *n*-мерных алгебраических многообразий – Хиронакой в 1964 г.

В 1970 г. на Международном математическом конгрессе в Ницце Хейсуке Хиронака был удостоен премии и медали Филдса за разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями нулевой характеристики.

В 1981 г. Хиронака стал членом Парижской академии наук.

Дэвид Мамфорд



Американский математик Мамфорд Дэвид Брайант родился 11 июня 1937 г. в Уорте (Западный Сассекс, Великобритания) в семье англичанина и американки. В 1961 г. он окончил Гарвардский университет. Научным руководителем Мамфорда был Оскар Зарисский.

Основные научные работы Мамфорда посвящены алгебраической геометрии. Он развил идеи Гротендика и значительно продвинулся в решении классической проблемы алгебраической геометрии – описании многообразия модулей абелевых многообразий.

Для работ Мамфорда характерно сочетание традиционной геометрической интуиции и новейшей алгебраической техники. За исследования в алгебраической геометрии в 1974 г. на Международном математическом конгрессе в Ванкувере он удостоен премии и медали Филдса.

Важное значение имеют его работы по «патологиям» в алгебраической геометрии (1961–1975), классификации гладких проективных поверхностей (1969–1976), теории тэта-функций (1966–1967). Мамфорд также занимается исследованиями в области искусственного интеллекта.

В целом работы Мамфорда направлены на объединение классических результатов, полученных трансцендентными методами математиками итальянской школы алгебраической геометрии, и обобщающих концепций современной алгебраической геометрии.

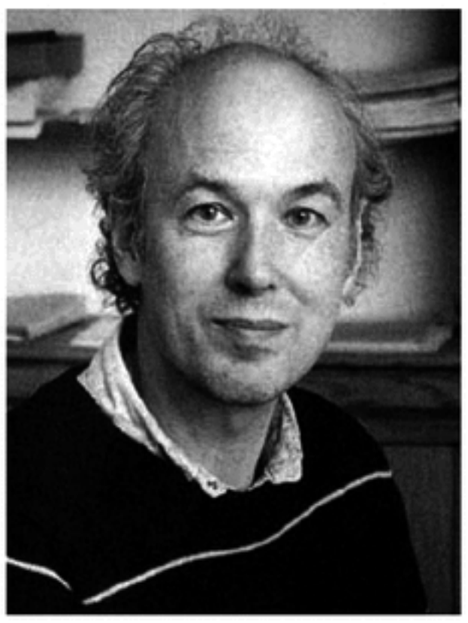
Кроме медали Филдса, Мамфорд имеет другие международные математические награды, в том числе премию Шоу (2006) и премию Вольфа (2008). Он избран членом многих иностранных академий и математических обществ. С 1995 по 1999 г. Мамфорд был президентом Международного математического союза.

На русском языке изданы многие труды Мамфорда. Первыми, с которыми познакомились российские математики, были «Лекции о кривых на алгебраической поверхности» (1968), «Абелевы многообразия» (1969). После исследований Гильберта по теории инвариантов считалось, что в этом направлении все уже сделано, и вся теория разработана. Однако исследования Мамфорда возродили интерес к этому разделу математики. В 1974 г. на русском языке была издана книга Мамфорда «Геометрическая теория инвариантов», представляющая несомненный интерес для специалистов по

алгебраической геометрии, функциональному анализу и теории групп Ли. Затем появилась монография «Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия» (1979). В монографии «Лекции о тэта-функциях» (1988) по теории тэта-функций, играющих важную роль в математической физике, анализе, теории чисел и алгебраической геометрии, Мамфордом мастерски представлено приложение изложенной теории к теории чисел и теории дифференциальных уравнений типа Кортевега – де Фриза. Краткое, но содержательное введение в алгебраическую геометрию на языке схем изложено в работе «Красная книга о многообразиях и схемах» (2007).

Многие годы Мамфорд работал в Гарвардском университете, а затем перешел в отдел прикладной математики в Университет Брауна.

Пьер Делинь



Бельгийский математик Делинь Пьер Рене родился 3 октября 1944 г. в Брюсселе. Он окончил Брюссельский университет и работал вместе с А. Гротендиком и Ж.-П. Серром. Делинь сотрудничал со многими членами группы Н. Бурбаки, хотя достоверных данных о принадлежности его к этой группе нет. С 1970 по 1984 г. Делинь работал в Институте перспективных исследований в Принстоне.

В 1949 г. А. Вейль показал, что рациональность дзета-функций многообразия и L-функций многообразия над конечным полем следует из формулы Лефшеца, а остальные гипотезы о дзета-функции естественно формулируются в когомологических терминах. Он высказал мнение о необходимости создания теории когомологий алгебраических многообразий с коэффициентами в поле нулевой характеристики, обладающих необходимыми формальными свойствами для получения формулы Лефшеца для числа неподвижных точек, и сформулировал ряд предположений.

В 1973 г. Делинь, исследовавший предположения А. Вейля, доказал их справедливость. За свои исследования Делинь в 1978 г. на Международном математическом конгрессе в Хельсинки получил премию и медаль Филдса.

Из результата Делиня следует доказательство классической гипотезы Рамануджана – Петерсона о свойствах коэффициентов Фурье одной из функций. Хотя формулировка этой гипотезы сравнительно проста, ее доказательство, рассчитанное на математика, не специалиста в алгебраической геометрии, по словам самого Делиня, занимает около 2000 страниц.

Объем исследований, проведенных Делинем в алгебраической геометрии и теории чисел, огромен [56]. Он занимался модулярными формами, теорией схем и теорией модулей.

Делинь удостоен нескольких престижных международных математических премий, среди которых премия Крафурда (1988) и премия Вольфа (2008). В 2006 г. король Бельгии присвоил Делиню титул виконта.

Герд Фалтингс

Немецкий математик Фалтингс Герд родился 28 июля 1954 г. в Гельзенкирхене. Он учился в университете Мюнстера и в 1978 г. получил степень доктора. Основные научные исследования Фалтингс проводил в области алгебраической геометрии. После защиты диссертации он уехал в США, где в течение года работал младшим научным сотрудником в Гарвардском университете. В 1979 г. Фалтингс вернулся в Германию и стал профессором университета в Вуппертале.

Важнейшим научным достижением Фалтингса является доказательство в 1983 г. гипотезы Морделла, не поддававшейся ученым более 60 лет. В 1922 г. английский математик Луис Джоэл Морделл выдвинул гипотезу о конечности множества рациональных точек на алгебраической кривой рода $g > 1$. Эта гипотеза является следствием гипотезы Шафаревича о конечности числа алгебраических кривых, имеющих заданный род $g > 1$. Гипотеза Шафаревича также была доказана Фалтингсом. В своих доказательствах он использовал некоторые результаты П. Делиня, Д. Мамфорда, И.Р. Шафаревича и других математиков.

Многие теоремы алгебраической геометрии имеют следующую особенность: соответствующие аналоги этих теорем, сформулированные для функциональных полей, доказываются существенно проще. Например, аналог теоремы Морделла для функциональных полей был доказан Ю.И. Маниным еще в 1963 г.

За доказательство гипотезы Морделла Фалтингс был награжден медалью Филдса в 1986 г. на Международном математическом конгрессе в Беркли.

Фалтингс наметил программу исследований алгебраических многообразий над числовыми полями (арифметические поверхности). Полученные им результаты уже используются в физике, в теории струн.

В 1985 г. Фалтингс был приглашен в Принстонский университет США. Он является лауреатом премии Хайнемана (1983), премии Лейбница (1996) и других престижных математических премий.

Сигефуми Мори

Японский математик Мори Сигефуми родился 23 февраля 1951 г. В 1973 г. окончил Киотский университет. Степень магистра Мори получил в 1975 г. Диссертацию на тему «Кольца эндоморфизмов некоторых абелевых многообразий» защитил в 1978 г. и получил степень доктора. До 1980 г. Мори работал ассистентом в Киотском университете, а затем переехал в Нагойо, где в 1988 г. стал профессором, но уже в 1990 г. вернулся в Киото.

Работу в японских университетах Мори совмещал с преподаванием в качестве приглашенного профессора в университетах США. В 1977–1980 гг. он работал в Гарварде, в 1980–1982 гг. – в Институте перспективных исследований в Принстоне, в 1987–1989 гг. и в 1991–1992 гг. – в Колумбийском университете в штате Юта.

Мори является продолжателем традиций знаменитой японской школы алгебраической геометрии. Наиболее заметные его достижения связаны с задачей классификации комплексных алгебраических многообразий размерности $n = 3$. Классификация одномерных комплексных алгебраических кривых эквивалентна классификации компактных римановых поверхностей. Классификация двумерных комплексных алгебраических поверхностей является задачей гораздо более сложной. Развить результаты Кодаиры казалось невозможным. Неожиданно для многих математиков в конце 70-х – начале 80-х годов XX в. Мори получил все канонические формы проективных трехмерных многообразий, введя новые идеи на основе перестроек Кодаиры. Его методы имеют различные приложения, позволяющие использовать полученные результаты в физике. Они являются образцом исследований в алгебраической геометрии, где алгебро-геометрические конструкции Гротендика гармонично сочетаются с геометрической интуицией и аналитической виртуозностью.

В 1990 г. на Международном математическом конгрессе в Киото Мори получил медаль Филдса за выдающиеся работы по алгебраической геометрии.

Работы Мори нашли применение в решении задач компактификации дополнительных степеней свободы в теории струн и установлении связи между интегрируемыми динамическими системами и проблемой модулей алгебраических многообразий.

Помимо медали Филдса, Мори удостоен нескольких национальных математических наград Японии и Америки.

В.А. Воеводский

Воеводский Владимир Александрович родился 4 июня 1966 г. в Москве. Его отец – физик, а мать – химик. После окончания школы он поступил на механико-математический факультет Московского университета. Воеводский серьезно интересовался алгебраической геометрией и считал посещение занятий в университете пустой тратой времени. Он был вынужден уйти в академический отпуск, а вскоре стал работать на учебно-производственном комбинате, где школьников обучали программированию. После возвращения в 1989 г. из академического отпуска Воеводский по-прежнему не ходил на занятия. Вместе с Михаилом Капрановым им было написано несколько статей по алгебраической геометрии. Капранов уехал в США и стал аспирантом. В Штатах он рассказал о работе с Воеводским. Вскоре Воеводскому предложили стать аспирантом Гарвардского университета. В 1992 г. он получил в Гарварде докторскую степень, не имея ни российского, ни американского диплома о высшем образовании.

Научные интересы Воеводского лежат в области алгебраической геометрии и алгебраической топологии. В 1998 г. на Международном математическом конгрессе в Берлине он выступил с пленарным докладом о гомо-

топической теории алгебраических многообразий. Многим это казалось соединением несоединимого. Гомотопии – это непрерывные деформации, а теория алгебраических многообразий стремилась избавиться от всего, что связано с непрерывностями.

Воеводскому удалось построить чисто алгебраическую теорию гомотопии (без непрерывности), которую можно применять как в случае обычных чисел (комплексных или даже вещественных), так и в теоретико-числовой ситуации, когда «числа» принимают конечное количество значений. Основная идея заключается в том, что траектории непрерывных движений можно заменить ломаными, состоящими из прямолинейных отрезков. Эта простая идея оказывается достаточной для построения мощной теории, приводящей к решению давно поставленных и глубоко нетривиальных задач, не поддававшихся другим методам. Были получены новые результаты, изумившие многих математиков [10].

Наличие некоторых пробелов не позволило Воеводскому стать претендентом на медаль Филдса в 1998 г. Эту медаль он получил через четыре года на Международном математическом конгрессе в Пекине. Из возможных четырех медалей были присуждены только две – Воеводскому и французскому математику Лорану Лаффоргу.

Медаль Филдса присуждается за результаты, полученные после проведения предыдущего конгресса. За 1998–2002 гг. Воеводскому удалось решить ряд новых задач. Поясним их суть. Понятие когомологии впервые возникло в топологии. Когомологические теории кодируют информацию о свойствах топологических объектов в терминах алгебраических объектов: групп, колец и т. д. Одной из таких теорий когомологии является K-теория, развитая Атьей, тесно связанная со стандартной теорией сингулярных когомологий. Однако изучаемые в алгебраической геометрии объекты обладают большей «жесткостью», чем топологические формы, поэтому стандартные методы теории когомологий, развитые в топологии, к ним не применимы. Гротендик считал, что введенная им теория мотивов является, так сказать, мостом между алгеброй и теорией чисел, с одной стороны, и геометрией и топологией, с другой. Идеи Гротендика вдохновляли целое поколение ученых, пришедших в математику вслед за ним, в том числе и Воеводского. Основываясь на идее Суслина, Воеводскому удалось построить теорию когомологий для алгебраических многообразий. Эта теория оказалась тесно связанной с построенной ранее алгебраической K-теорией. Одним из важнейших приложений теории, построенной Воеводским, явилось решение проблемы Милнора, которая оставалась наиболее трудной задачей в алгебраической K-теории в течение 30 лет [31].

В интервью, размещенном на одном из интернет-сайтов 7 января 2009 г., Воеводский рассказал о двух интересующих его направлениях в математике. Первое направление относится к наведению мостов между прикладной и абстрактной математиками. По его мнению, абстрактная математика за последние 50 лет совершила скачок и оторвалась от прикладной математики, в результате чего стала наукой несколько эзотерической, закрытой. Тем, кто не владеет профессиональным математическим языком, практически невозможно понять последние достижения абстрактной математики. Результаты,

полученные теоретиками, теперь необходимо связать с приложениями, т. е. сделать их доступными для прикладной математики.

Второе направление связано с тем, что исследуемые в математике структуры очень сложны даже для профессионалов, в связи с чем большие затруднения вызывает проверка математических результатов. Когда появляются работы такого уровня, как доказательство Уайлсом гипотезы Таниямы – Шимуры или доказательство Перельманом гипотезы Пуанкаре, возникает проблема проверки правильности этих доказательств. Используемый учеными математический аппарат крайне сложен. После освоения этого аппарата открываются возможности его широкого использования для исследования многих нерешенных проблем.

Ученые надеются, что разработка специальных языков программирования позволит использовать компьютеры для проверки новых математических результатов, а также для формулирования и доказательства еще не известных результатов. Если из разговорной речи выбрать контролируемую часть слов, подчиняющуюся строгим грамматическим правилам, то можно «научить» компьютер понимать этот язык. Это открыло бы огромные перспективы использования компьютеров в теоретических исследованиях. Построить материальный квантовый компьютер пока не удалось, но можно создать его математическую модель. На этой модели можно отрабатывать соответствующие квантовые языки программирования.

Одним из направлений исследований Воеводского является популяционная генетика. Анализируя генотипы людей, их численное и географическое распределение по земному шару, можно разработать математический аппарат, который поможет оценить численность населения в далеком прошлом. Используя данные об определенных хромосомах, передающихся только по мужской линии, можно ввести числовую характеристику, соответствующую генетическому «расстоянию» между любыми двумя мужчинами. С точки зрения математики, весь процесс сводится к отработке алгоритма, позволяющего по конечному множеству, в котором между любой парой элементов задано понятие расстояния, восстановить гипотетическую историю формирования параметров этого множества. Этот способ восстановления «биологической истории человечества» требует очень большого исходного объема данных. Попытка восстановить историю на основании «расстояния» между 10 тысячами индивидуумов – дело практически безнадежное. Для получения наиболее точной информации нужно замерить «расстояние» между несколькими десятками миллионов людей. Наличие такого объема генетических данных даст возможность получения интересных результатов. Это немного похоже на астрофизику, на создание телескопа, который будет смотреть в прошлое. Воеводский считает, что те модели, которыми пользуются биологи, очень примитивны, и стремится разработать более содержательную модель. Важно учитывать информацию о войнах, стихийных бедствиях или эпидемиях, в результате которых погибает большой процент населения.

В настоящее время Воеводский является профессором Принстонского университета. Его считают одним из крупнейших новаторов в алгебраической геометрии за последние десятилетия.

Глава 22

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Мечтатели, сибиллы и пророки,
Дорогами, запретными для мысли,
Проникли – вне сознания – далеко,
Туда, где светят царственные числа.

В.Я. Брюсов

Основные направления исследований

Теория чисел – наука о целых числах. Понятие целого числа, а также арифметических операций над числами известны с древних времен. Они являются одними из первых математических абстракций. Характерная черта теории чисел – это элементарная постановка многих задач и необычайная трудность их решения.

Элементарная теория чисел, изучающая свойства чисел элементарными методами, фактически стала уделом тех, кто не владеет современным математическим аппаратом и пытается решить задачи теории чисел доступными для них способами.

То, что задачи теории чисел решаются методами, заимствованными из других разделов математики, стало не исключением, а нормой. Начало аналитической теории чисел положил Л. Эйлер, применивший мнимые числа при доказательстве Великой теоремы Ферма для $n = 3$.

Распределение простых чисел. Все целые положительные (натуральные) числа больше единицы, распадаются на класс простых чисел, которые делятся только на себя и единицу, и класс составных чисел, имеющих другие целые делители. Свойства простых чисел изучались еще Евклидом. Первые задачи о простых числах были посвящены особенностям их расположения в натуральном ряду и вопросу о том, насколько далеко они отстоят друг от друга.

Известно, что относительная плотность простых чисел убывает с увеличением количества рассматриваемых чисел: в первом десятке их 40 %, в первой сотне – 25 %, в первой тысяче – около 17 %, в первом миллионе – примерно 8 %, однако их бесконечно много. Таблицы простых чисел показывают, что даже при неограниченном увеличении их встречаются так называемые близнецы, т. е. простые числа, разность между которыми равна двум, например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43, 71 и 73… 10 006 427 и 10 006 429 и т. д. Также легко можно показать, что в натуральном ряде существуют сколь угодно длинные интервалы, свободные от простых чисел. После того, как еще в XVIII в. было установлено, что обозримых закономерностей для расположения простых чисел на конечных участках не существует, стали искать асимптотические (т. е. выполняющиеся только в пределе) зако-

номерности их расположения. Проблема распределения простых чисел является одной из самых интересных и трудных задач аналитической теории чисел.

Эйлер был первым математиком, который разрабатывал общие методы теории чисел и использовал для решения ее задач математический анализ, в частности, метод производящих функций. Этот метод лег в основу кругового метода Харди – Литлвуда, развитием которого стал метод тригонометрических сумм Виноградова.

Доказывая теорему Евклида о бесконечности количества простых чисел, Эйлер в 1737 г. получил тождество $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, где $s > 1$ – произвольное действительное число, а произведение берется по всем простым числам p.

Дирихле и Чебышёв исследовали это соотношение при изучении закона распределения простых чисел.

Проблема Варинга. В 1770 г. английский математик Варинг сформулировал задачу, решение которой не поддавалось усилиям ученых почти 150 лет. Задача формулируется исключительно просто: доказать, что при любом целом положительном n всякое целое число N может быть представлено в виде суммы ограниченного числа n-х степеней целых чисел. Без всякого доказательства Варинг утверждал, что каждое целое число может быть представлено в виде суммы четырех квадратов, девяти кубов, девятнадцати четвертых степеней и т. д. Еще в XVIII в. для $n = 2$ Лагранж доказал, что Варинг оказался прав и всякое натуральное число представляется в виде суммы не более чем четырех квадратов. Например, число 69 можно представить в виде следующих сумм квадратов целых чисел:

$$69 = 8^2 + 2^2 + 1^2,$$

$$69 = 7^2 + 4^2 + 2^2.$$

Но прав ли Варинг для других n ? В XIX в. прогресс в решении проблемы Варинга был незначительным. Самое большое число слагаемых получится, если взять сумму из единиц в n-й степени. Каково наименьшее число слагаемых такого рода? Для больших чисел – трудно сказать. Позднее удалось доказать, что всякое число может быть представлено в виде суммы не более восьми кубов, и в виде суммы не более семнадцати четвертых степеней. Применением аналитических методов для решения проблемы занимался Гурвиц, но признал свое поражение. Используя его идеи, в конце 1908 г. Гильберт решил проблему Варинга, но доказательство было очень сложным и запутанным. Гильберт разработал метод, позволявший получить для каждого n оценку достаточного числа слагаемых. Хинчин отмечал, что доказательство Гильберта было «не только тяжеловесным в… оформлении, основанном на сложных аналитических теориях… но также не обладало прозрачностью в идейном отношении» [66]. В 1928 г. Харди и Литлвуд получили другое доказательство этой теоремы. Самый значительный результат при решении проблемы Варинга получен в 1934 г. И.М. Виноградовым. Элементарное доказательство проблемы дал в 1942 г. Ю.В. Линник. Особое

значение проблемы Варинга состоит в том, что при ее решении созданы мощные методы аналитической теории чисел.

Проблема Гольдбаха. В 1742 г. академик Гольдбах в письме к Эйлеру высказал предположение, что каждое целое число, большее трех, может быть разложено на сумму не более чем трех простых чисел. Например, 95 = 91 + + 3 + 1. Эйлер упростил формулировку проблемы, обнаружив, что для ее решения достаточно доказать, что каждое четное число является суммой двух простых чисел. Многочисленные попытки доказать гипотезу Гольдбаха заканчивались неудачей. Опровергающего контрпримера построить тоже не удалось. Один из лучших специалистов по теории чисел Э. Ландау в 1912 г. на Международном математическом конгрессе в Кембридже сказал, что проблема Гольдбаха не по силам современной математике.

Л.Г. Шнирельман в 1930 г. с помощью особого разработанного им приема строго доказал, что всякое целое число может быть представлено в виде суммы не более 800 000 простых чисел. После этого принципиального шага математики различными способами начали снижать число слагаемых, и к 1937 г. итальянский математик Ричи уменьшил его до 67. Но в том же году И.М. Виноградову, который усовершенствовал разработанный им метод тригонометрических сумм, удалось снизить число слагаемых до трех, т. е. решить проблему Гольдбаха. Задача о разбиении четного числа на сумму двух простых оказалась более сложной и пока не решена.

Гипотеза Римана. Наиболее важные свойства ряда были обнаружены Б. Риманом в 1859 г. Он ввел обозначение $\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ и назвал его дзета-функцией. Дзета-функция рассматривалась Риманом как аналитическая функция комплексного переменного $s = \sigma + it$. Ряд сходится абсолютно и равномерно при $\sigma > 1$. Наиболее интересным является поведение дзета-функции в полосе $1/2 \le \sigma \le 1$, т. е. за пределами представления рядом или произведением. Дзета-функция связана с важнейшими теоретико-числовыми функциями. Например, известно соотношение $\ln \varsigma(s) = s \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)}\, dx$, где $\pi(x)$ – число простых чисел $\le x$.

Исследуя дзета-функцию, Риман получил несколько важных результатов. Им, в частности, показано, что дзета-функция имеет простые нули в точках $s = 2n$, $n = 1, 2, 3\ldots$. Эти нули называют тривиальными. Главной проблемой в теории дзета-функций является проблема ее нетривиальных нулей и вообще значений в области $1/2 \le \sigma \le 1$.

Б. Риман сформулировал пять предположений (гипотез) о свойствах дзета-функции, которые сам не успел доказать. Вторая и третья гипотезы Римана были доказаны Ж. Адамаром в 1893 г., а первая и четвертая – Х. Мангольдтом в 1894 г. Последняя пятая гипотеза Римана не доказана и не опровергнута до сих пор. Она вошла в семь математических проблем тысячелетия, сформулированных в 2000 г. Институтом Клэя. Риман предположил, что все нетривиальные нули дзета-функции расположены на прямой $\sigma = 1/2$. То, что на этой прямой дзета-функция имеет бесконечно много нулей, доказал

Х. Харди в 1914 г. на основе формулы Ш. Рамануджана. Но то, что на этой прямой находятся все нетривиальные нули дзета-функции, пока ни доказать, ни опровергнуть не удалось.

Диофантовы уравнения. Целочисленными решениями уравнений различного вида интересовались еще в Древней Греции. Простейшим уравнением в целых числах является линейное уравнение, $ax + by = c$, где a, b и c – попарно взаимно простые целые числа. Оно решается применением алгоритма Евклида. Другим уравнением в целых числах является уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, все целочисленные решения которого изложены в «Началах» Евклида. Его решения x, y и z находятся по следующим формулам:

$$x = r^2 - q^2,\ y = 2rq,\ z = r^2 + q^2,$$

где r и q – целые числа.

Систематическое изложение теории известных к тому времени уравнений в целых числах дано Диофантом в «Арифметике». Эта книга сыграла важную роль в дальнейшем развитии той части теории чисел, которая занимается решением уравнений в целых числах, называемых теперь диофантовыми уравнениями. Обычно предполагается, что диофантовы уравнения имеют число неизвестных, превосходящее число уравнений, в связи с чем они называются также неопределенными уравнениями. Их исследование относится к теории чисел и алгебраической геометрии. Известной задачей теории диофантовых уравнений является доказательство Великой теоремы Ферма.

Теория алгебраических чисел. Изучение диофантовых уравнений, в первую очередь, уравнения Ферма, привело к созданию нового раздела теории чисел – теории алгебраических чисел. Э. Куммер при попытке доказать Великую теорему Ферма пришел к соотношению

$$x^n = z^n - y^n = \prod_{n=1}^{\infty} (z - \alpha_i y),$$

где α_i – корни n-й степени из единицы.

Одновременно с изучением свойств целых чисел возникло и стало развиваться новое направление теории чисел, изучающее арифметику числовой прямой. Ж. Лиувилль ввел понятия алгебраических и трансцендентных чисел. *Алгебраическими* называются числа, которые являются корнями алгебраического уравнения вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_0, \ldots, a_n$ – целые числа.

Числа, не являющиеся корнями алгебраических уравнений, называют *трансцендентными.* Доказательства алгебраичности или трансцендентности конкретных чисел очень трудны. Большим достижением считался результат Ш. Эрмита, доказавшего в 1873 г. трансцендентность числа e. Доказательство трансцендентности числа π, проведенное немецким математиком Фердинандом Линдеманом в 1882 г., было большим научным событием, поскольку из него следовала невозможность квадратуры круга.

В 1893 г. по поручению Немецкого математического общества Гильберт приступил в подготовке обзора по теории чисел. Он был поражен наличием

глубоких связей между теорией чисел и другими разделами математики и пришел к выводу, что теория чисел должна занять ведущую роль в алгебре и теории функций. Упростив существующие доказательства теорем и заполнив пробелы собственными результатами, он придал теории алгебраических чисел величественную унифицированную форму. В предисловии к обзору, завершенному в 1896 г., Гильберт писал: «Теория числовых полей представляет собой здание редкой красоты и гармонии. Самая же богатая идеями часть этого здания, как мне кажется, есть теория абелевых полей, возникшая из работы Куммера о высших законах взаимности и исследований Кронекера по комплексному умножению эллиптических функций. Глубокое проникновение в эту теорию, которое дают работы этих двух математиков, показывает в то же время, что несметные сокровища все еще лежат сокрытыми, маня богатым вознаграждением исследователя, знающего им цену и с любовью применяющего свое искусство, чтобы овладеть ими» [66].

Десятая проблема Гильберта. Десятая проблема сформулирована Гильбертом так: «Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах». В 1900 г., когда формулировались проблемы Гильберта, понятие алгорифма не существовало, поэтому не предполагалось, что общего метода решения диофантовых уравнений может не существовать. Подразумевалось, что способ существует, но пока не найден.

Многие математики пытались решить десятую проблему. Сделать это удалось в 1970 г. 22-летнему математику Юрию Владимировичу Матиясевичу. Он доказал алгоритмическую неразрешимость десятой проблемы Гильберта.

Большое количество проблем теории чисел еще не решено. К таким относятся проблемы простых близнецов, бесконечности простых чисел вида $n^2 + 1$, целых чисел в круге и под гиперболой, распределения нулей дзета-функций, трансцендентность постоянной Эйлера и числа $\pi + e$ и др.

Годфри Харди

Харди Годфри Харолд родился в 1877 г. в городке Кренли в семье учителя закрытой средней школы и преподавательницы педагогического колледжа. Уже в два года мальчик знал числа до миллиона. С ранних лет он страдал болезненной застенчивостью. Харди был привлекательным, но, возможно, не был доволен своей внешностью, поэтому не любил фотографироваться и не имел в квартире ни одного зеркала.

Годфри успешно учился в Кранли-Скул, мужской привилегированной частной средней школе графства Суррей, и в 12 лет получил стипендию в лучшей математической школе Англии, после окончания которой поступил в Тринити-колледж в Кембридже. В Тринити-колледже посещение церкви было обязательным, а поскольку Харди был атеистом, у него возникли сложности.

Как многие молодые англичане его круга, Харди увлекался спортом. Он был ловким и великолепно играл в любые игры с мячом. В возрасте 50 лет Годфри Харди легко обыгрывал молодых спортсменов в теннис и крикет.

В 1900 г. Харди успешно выдержал выпускной экзамен, что позволило ему остаться в университете для исследовательской работы. Основной целью в математике для Харди стало внесение точности в математический анализ. Его работы в период 1900–1911 гг. дали ему международное признание. В 1910 г. Харди был избран академиком, членом Королевского общества содействия успехам естествознания.

В 1911 г. возник творческий союз Харди с математиком Джоном Идензором Литлвудом, который просуществовал 35 лет. Их дуэт является самым плодотворным в истории математики. Они прекрасно дополняли друг друга, хотя работали в разных университетах. По словам учившегося у них Норберта Винера, оригинальность идей и ясность мысли шли от Харди, непреклонное упорство и неустанная энергия – от Литлвуда.

В 1913 г. Харди впервые услышал о неизвестном индийском гениальном самоучке Ш. Рамануджане. Благодаря его стараниям в 1914 г. Рамануджан приехал в Англию. Вскоре началась их совместная работа и обучение Рамануджана основным положениям математики.

Когда началась Первая мировая война, Харди записался в добровольцы, но врачи признали его негодным к службе. Литлвуд выполнял баллистические расчеты в королевской артиллерии. Его сотрудничество с Харди было затруднено, хотя и не прекратилось полностью. Зато успешно шла совместная работа Харди с Рамануджаном. Они опубликовали пять работ высочайшего класса по теории чисел, в которых прекрасно дополняли друг друга. Их совместное творчество прервалось в связи со смертью Рамануджана в 1920 г.

В 1919 г. Харди покинул Кембридж и получил предложение возглавить кафедру в Оксфорде. Начался период его самого плодотворного сотрудничества с Литлвудом. Сохранив идею Эйлера, использовавшего в теории чисел бесконечные ряды, они создали основной для современной аддитивной теории чисел метод решения задач и доказали в 1923 г., что при условии справедливости некоторых теорем относительно рядов Дирихле любое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел. Харди впервые установил, что $\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 1)$ имеет бесконечное число нулей на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. В соавторстве с Литлвудом он написал около сотни научных работ по абстрактной математике. В 1931 г. Харди вернулся в Кембридж, где продолжил работу.

В теории функций Харди занимался теорией тригонометрических и расходящихся рядов, исследованием неравенств, теорией интегральных уравнений. Его монографии «Курс чистой математики», «Ряды Фурье», «Расходящиеся ряды», «Неравенства» (соавторы Литлвуд и Полиа) и т. д. получили всемирное признание. Ему принадлежат также работы по генетике.

В 1939 г. Харди перенес тромбоз коронарных сосудов, в связи с чем резко снизилась его трудоспособность. Харди всегда был пацифистом, поэтому тяжело переживал события Второй мировой войны. Известно, что он преклонялся перед теорией чисел и пренебрежительно относился к прикладной математике. Рассказывают, что Харди однажды произнес тост: «За чистую математику! Да не найдет она никакого приложения!» В 1940 г. он писал в своей статье: «Считаю своим долгом заявить с самого начала, что под математикой я понимаю настоящую математику, математику Ферма и Эйлера, Гаусса и Абеля, а не то, что выдают за математику в инженерной лаборатории» [65].

Следует отметить, что желание Харди уклониться от занятий прикладными вопросами математики могло быть обусловлено этическими установками. Практически все достижения прикладной математики рано или поздно используются в военных целях. Приведенная выше цитата взята из статьи Харди, написанной в начале Второй мировой войны. Одну из своих вступительных лекций он начал с заявления о том, что его математика – наука бесполезная. «Я понимаю под этим, – продолжал он, – что она не может быть непосредственно использована ни для эксплуатации нам подобных, ни для их уничтожения» [73].

В начале лета 1947 г. Харди предпринял попытку самоубийства. В ноябре того же года Королевское общество удостоило Харди своей высшей награды – медали Копли.

1 декабря 1947 г. Харди нашли на городской свалке с пулей в брюшной полости. Предсмертная записка подтвердила версию о самоубийстве.

Шриниваса Рамануджан

Величайший индийский математик XX в. Рамануджан Шриниваса родился 22 декабря 1887 г. в семье бедного брахмана, работавшего бухгалтером в маленькой текстильной лавке в Мадрасской провинции на юге Индии. Он воспитывался в атмосфере враждебности ко всему европейскому, особенно английскому.

В 1897 г. Рамануджан окончил начальную школу и получил право дальнейшего обучения в средней школе за половинную плату. В четвертом классе средней школы он самостоятельно изучил полный курс тригонометрии по учебнику, взятому у знакомого студента.

В пятом классе им самостоятельно выведены формулы, связывающие синус и косинус с показательной функцией. Он не подозревал, что эти формулы были выведены еще Эйлером. В 1903 г. ему удалось получить доступ к книге Д.Ш. Карра по высшей математике, содержащей 6165 теорем и формул, лишь небольшая часть которых имела конспективные доказательства. Рамануджан выводил содержащиеся в книге формулы и доказывал теоремы. Поскольку он не мог пользоваться другими книгами, то каждая выведенная формула и найденное доказательство были его самостоятельными

исследованиями. Геометрия его разочаровала, а алгебра увлекла, причем, он стал получать новые формулы, которых не было в книге. С детства Шриниваса был очень верующим, и, по его словам, формулы ему во сне внушала одна из богинь. Все свои результаты Рамануджан заносил в записную книжку.

В 16 лет после окончания школы Шриниваса Рамануджан поступил в Мадрасский университет. Занимаясь математическими исследованиями, он не выполнял задания по другим предметам, пропускал занятия и был оставлен на первом курсе на повторное обучение. В его жизни началась череда неприятностей, длившаяся почти десять лет. В 1907 г. юный студент пытался сдать экзамены за первые два курса экстерном, но потерпел неудачу. В 1909 г. все наладилось, он женился и начал поиски работы. По счастливой случайности на Рамануджана обратил внимание один математик, который помог материально и устроил его на работу в управление почт Мадраса.

В 1911 г. была опубликована первая статья Рамануджана. К началу 1913 г. индийские математики настойчиво рекомендовали Рамануджану послать свои результаты в Кембриджский университет. Рамануджан написал Харди письмо, в котором привел полученные им формулы. Анализируя вместе с Литлвудом эти формулы, Харди понял, что автор письма – гений, равный Гауссу и Эйлеру. Харди предпринял шаги по обеспечению Рамануджана стипендией и пригласил его в Кембридж. Из-за кастовых предрассудков Рамануджан отказался покинуть Индию, особенно поездке противилась его мать. Один из учеников Харди уговаривал руководство Мадрасского университета повлиять на решение Рамануджана. Вопрос о поездке Рамануджана в Кембридж широко обсуждался в кругах мадрасской интеллигенции, и мать Рамануджана решила отпустить сына. В апреле 1914 г. Рамануджан был зачислен в Тринити-колледж. Кембриджские математики были поражены глубиной его познаний в одних вопросах и неосведомленностью в других.

Первые месяцы пребывания Рамануджана в Кембридже были посвящены устранению пробелов в знаниях. Обучение проводилось в виде собеседований и семинаров, на которых обсуждались нерешенные проблемы. Очень быстро Рамануджан усвоил теорию функций и аналитическую теорию чисел. Когда началась Первая мировая война, Литлвуд был мобилизован в армию, и обучение Рамануджана затянулось, так как, по словам Харди, одного учителя для такого ученика было недостаточно. Занятия Рамануджана с Харди проходили ежедневно. Они привели к совместным трудам по теории чисел. Виртуозное владение формальными выкладками Рамануджана дополняли эрудиция и оригинальность мышления Харди.

Основная часть опубликованных работ Рамануджана была написана им самостоятельно или в соавторстве с Годфри Харолдом Харди. Их работы отличались удивительной оригинальностью.

Однажды Харди нанял кэб и отправился навестить Рамануджана, когда тот гостил в Англии. На квартире Рамануджана Харди сказал, что приехал на кэбе, порядковый номер которого, равный 1729, является очень скучным числом. Рамануджан возразил, что это очень интересное число.

Это минимальное из всех чисел, которые можно двумя различными способами представить в виде суммы двух кубов. Действительно, $1729 = 9^3 + 10^3$ и $1729 = 12^3 + 1^3$.

Не имея возможности получить математическое образование, Рамануджан самостоятельно открыл целые математические миры, над созданием которых трудились поколения европейских ученых. В этих уже ставших классическими областях математики он нашел то, о чем не подозревали его предшественники и современники.

Рамануджан получил много замечательных результатов в теории чисел. Совместно с Харди им получены приближенные формулы для количества R_n всех возможных разбиений числа n. Простейшая из этих формул имеет вид

$$R_n = \frac{1}{4\sqrt{3n}}\, e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}}.$$

Шедевром в математике считают найденное Рамануджаном соотношение

$$a + b = \sqrt{\frac{\pi e}{2}},$$

где

$$a = 1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots, \quad b = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{}{1 + \ldots}}}}}.$$

Ни бесконечный ряд a, ни цепная дробь b по отдельности не выражаются через числа π и e, а в сумме они дают поразительную комбинацию.

Рамануджан занимался теорией распределения простых чисел в ряде натуральных чисел, в частности представлением чисел в виде суммы квадратов, теорией обобщенного гипергеометрического ряда, цепными дробями, суммированием расходящихся рядов, вычислением определенных интегралов, теорией эллиптических функций, проблемами аналитической теории чисел.

О таланте Рамануджана Литлвуд писал, что вряд ли существует область формул, за исключением формул классической теории чисел, которую бы он не обогатил и в которой не открыл бы новые, совершенно не подозревавшиеся ранее возможности, что красота его результатов, единственных в своем роде, совершенно поразительна.

Весной 1917 г. Рамануджан заболел и лечился в Кембриджском госпитале. Непривычный для Рамануджана сырой английский климат, условия военного и послевоенного времени, а также его недоверие к английским врачам и настойчивое соблюдение неподходящей диеты окончательно подорвали его здоровье. Рамануджан имел от рождения слабые легкие, и его болезнь перешла в открытую форму туберкулеза.

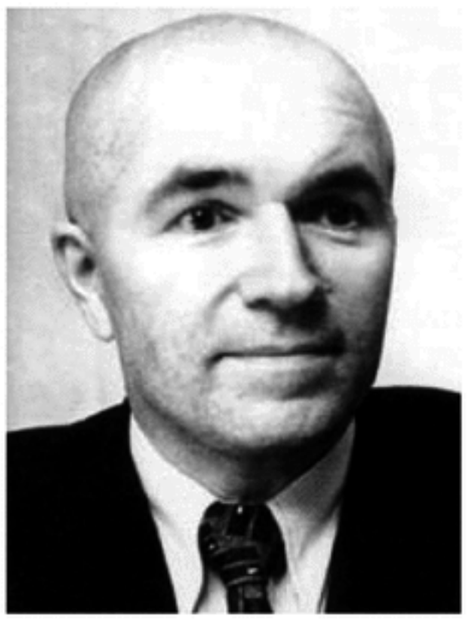
В 1918 г. вопреки традициям Раманудж ан стал членом Королевского общества Англии и был избран профессором Кембриджского университета.

В начале 1919 г. здоровье Раманудж ана улучшилось, врачи считали, что он вне опасности, и разрешили на время вернуться в Мадрас. После утомительной дороги Раманудж ан чувствовал себя очень плохо. Силы быстро угасали, лечиться он не хотел и много работал над своим последним исследованием по симулирующим тета-функциям.

26 апреля 1920 г. Раманудж ан умер в одном из предместий Мадраса. После смерти началась работа над его научным наследием. Принадлежавшие Раманудж ану записные книжки были переписаны друзьями и отправлены в Кембридж для исчерпывающего анализа. По словам Харди, Раманудж ан был чемпионом каждой игры, правила которой знал.

Оценка значимости результатов, полученных Раманудж аном, изменилась за прошедшие десятилетия. Друзья и коллеги, признавая удивительные способности индийского математика, считали, что выбор тем его исследований не был актуальным. В настоящее время интерес к творчеству Раманудж ана возрос. Его изумительные формулы становятся востребованными в новейших разделах математики и теоретической физики. Национальная академия наук Индии учредила медаль имени Раманудж ана за исключительные успехи в физике, химии и математике. Многие считают Раманудж ана одним из величайших математиков XX в.

И.М. Виноградов



Виноградов Иван Матвеевич родился в 1891 г. в селе Милолюб Великолукского уезда Псковской губернии в семье сельского священника. После окончания реального училища Иван Виноградов поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, который окончил в 1914 г. Будучи студентом, он пришел к профессору Я.В. Успенскому, взял тему по теории чисел и исчез. Через год Виноградов принес полное решение труднейшей задачи.

В 1915 г. Иваном Матвеевичем была написана первая научная работа о суммировании символов Лежандра, благодаря чему он был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. В разгар Гражданской войны, когда жить в Петрограде было очень сложно, Виноградов уехал в Пермь и в 1919–1920 гг. работал доцентом, а затем профессором Пермского университета.

В 1920 г. он защитил диссертацию и до 1934 г. работал профессором Ленинградского политехнического института и Ленинградского университета. С 1925 по 1934 г. Виноградов руководил в Ленинградском университете кафедрой теории чисел и теории вероятностей. В 1929 г. избран академиком АН СССР, в 1930–1933 гг. возглавлял Демографический институт. С 1932 г. работал директором Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

Практически всю жизнь Иван Матвеевич занимался теорией чисел, труднейшим разделом математики. От других этот раздел отличается тем, что постановка задач часто звучит обманчиво просто, а решение практически всех задач дается с трудом. Формулировку ряда ее теорем могут понять люди, знающие лишь начала высшей математики, а в некоторых случаях, знающие лишь элементарную математику, но для понимания содержания большинства теорем требуется большое напряжение ума. Доказательство даже простых теорем является чрезвычайно сложным. От постановки некоторых задач теории чисел часто проходят сотни лет, прежде чем эти задачи получают решение.

Иван Матвеевич открыл новые методы в аналитической теории чисел, оказавшие значительное влияние на ее развитие и, как выяснилось в дальнейшем, имеющие приложения за пределами теории чисел. Поскольку многие результаты, полученные Виноградовым, могут быть не понятны подавляющему большинству читателей, ограничимся лишь популярным изложением некоторых из них.

Виноградов нашел ряд чрезвычайно точных оценок тригонометрических сумм вида $\sum e^{2\pi i f(x)}$, где $f(x)$ – функция с теми или иными аналитическими свойствами, x принимает значения целых чисел некоторой последовательности. Оказывается, многие арифметические функции выражаются такими тригонометрическими полиномами.

Метод оценок тригонометрических сумм позволил Виноградову решить проблемы Варинга и Гольдбаха. Разработанный Виноградовым метод оказался настолько мощным, что не только проблема Варинга получила совершенно прозрачное решение, но и удалось указать весьма точную оценку для числа необходимых слагаемых. Методы И.М. Виноградова позволили получить в проблеме Варинга огромное снижение оценок числа слагаемых, при котором обеспечено представление всех достаточно больших чисел суммами степеней. Результатом работ этого цикла явились две монографии – «Новый метод в аналитической теории чисел» (1937) и «Метод тригонометрических сумм в теории чисел» (1947).

Зарубежными математиками результат Виноградова был признан блестящим проявлением человеческого гения в XX в. Виноградов был избран членом многих иностранных академий. Он – автор известного учебника «Основы теории чисел», выдержавшего большое число изданий на русском языке и переведенного на многие другие языки. Прекрасной школой для математиков, специализирующихся в области теории чисел, являются собранные в учебнике задачи.

Виноградов гордился своей необычайной физической силой не меньше, чем научными достижениями. Пелагея Яковлевна Кочина писала, что, по словам Виноградова, во время Международного конгресса математиков в Эдинбурге он на вокзале перенес через рельсы застрявшую тележку носильщика, нагруженную вещами членов делегации [47].

Автор свыше 140 оригинальных работ в аналитической теории чисел, Виноградов ввел в эту область математики новые методы, в которых мини-

мально используются средства анализа. Благодаря этим методам теория чисел не утратила своей сути и приобрела общие с другими аналитическими теориями свойства.

На посту директора Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР Виноградову, выдающемуся специалисту в теории чисел, приходилось организовывать работу и в других разделах математики. Только на два года во время войны Иван Матвеевич уступил руководство Математическим институтом С.Л. Соболеву. Деятельность Виноградова была высоко оценена. Иван Матвеевич – дважды Герой Социалистического Труда (1945, 1971), лауреат Ленинской премии (1972) и Государственных премий (1941, 1983). В 1971 г. Виноградов награжден золотой медалью им. Ломоносова АН СССР. Он стал главным редактором пятитомной «Математической энциклопедии».

Умер Иван Матвеевич Виноградов 20 марта 1983 г. в Москве.

Л.Г. Шнирельман

Шнирельман Лев Генрихович родился 2 января 1905 г. в городе Гомеле в семье учителя русского языка. Очень рано у мальчика обнаружились выдающиеся способности. Он рисовал, писал стихи, в 12 лет самостоятельно изучил курс элементарной математики. В 16 лет Шнирельман поступил в Московский университет, а окончил его уже через два с половиной года. Он был «лузитанцем» второго поколения. По воспоминаниям Л.А. Люстерника, Лузину, склонному к мистификациям, приснилось, что к нему придет юноша, который должен решить проблему континуума. Юноша из сна был очень похож на Льва Шнирельмана. Вскоре он стал учеником Лузина. Проблему континуума Шнирельман не решил, хотя и добился замечательных результатов в теории чисел, топологии и вариационном исчислении.

В 1924–1926 гг. Лев Шнирельман участвовал в работе научного семинара по аналитической теории чисел, организованного А.Я. Хинчиным. Три своих самых замечательных результата Шнирельман получил в течение 1929 и 1930 гг.

За время аспирантуры Шнирельман много и плодотворно работал в области геометрии и вариационного исчисления совместно с Л.А. Люстерником, который был старше на пять лет. Они создали новое направление в математике, характеризующееся внедрением топологических методов в классические области анализа, геометрии и вариационного исчисления. Ими разработан общий топологический метод оценки числа решений экстремальных задач «в целом», заключающий, в частности, общий метод оценки числа замкнутых геодезических на многообразиях. В 1929 г. Шнирельман и Люстерник решили неожиданным и новым способом знаменитую проблему Пуанкаре о трех геодезических кривых на поверхности, гомеоморфной двумерной сфере. Это стало мировой сенсацией. Результаты их исследований

были опубликованы в работе под названием «Топологические методы в вариационном исчислении», положившей начало советской школе вариационного исчисления.

После окончания аспирантуры в 1929 г. Шнирельману было присвоено ученое звание доктора физико-математических наук. Он уехал в Новочеркасск и до 1934 г. работал профессором Донского политехнического института.

В 1930 г. Шнирельман разработал новый метод решения задач аддитивной теории чисел, основанный на рассмотрении плотности числовых последовательностей.

Если $N(x)$ – числовая функция последовательности (количество ее чисел, не больших x), то $\inf \frac{N(x)}{x} = \alpha$ ($\alpha > 0$) называется ее плотностью. Шнирельман показал, что плотность суммы двух последовательностей с плотностями α и β будет не меньше $\alpha + \beta - \alpha\beta$. Отсюда следует, что последовательности положительной плотности образуют базис натуральных чисел. С помощью решета Эратосфена Шнирельман показал, что плотность последовательности простых чисел положительна и таким образом установил, что всякое целое число есть сумма ограниченного числа простых чисел (или единиц).

Этот оригинальный метод позволил Шнирельману сделать первый шаг к решению проблемы Гольдбаха, продвинуться и внести коррективы в решение проблемы Варинга и других задач, а также выдвинуть ряд важных гипотез, которые на долгие годы стали предметом исследований многих отечественных и зарубежных математиков.

В 1931 г. Шнирельман был командирован на три месяца в Гёттинген. Там ему предложили написать монографию о своих результатах для престижного немецкого издательства, но из-за прихода к власти фашистов задуманное не осуществилось.

В 1933 г. Шнирельмана избрали членом-корреспондентом АН СССР.

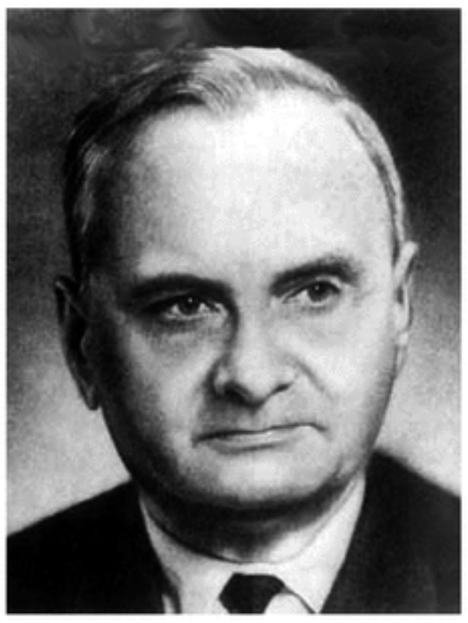
В 1934 г. Лев Генрихович начал работать в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР. Исследования его были весьма разнообразны. Особенно широко известен разработанный им метод решения проблемы Гольдбаха (в ослабленной постановке), основанный на введенном им понятии о плотности последовательности натуральных чисел.

На Втором Всесоюзном математическом съезде в 1934 г. Л.А. Люстерник и Л.Г. Шнирельман выступили с докладом на тему «Топологические методы в применении к экстремальным задачам в анализе».

Одним из первых Шнирельман начал проводить исследования по выпуклой геометрии. Его работа по приложению выпуклой геометрии к теории наилучшего приближения была опубликована посмертно.

Работы Шнирельмана относительно немногочисленны, так как он чрезвычайно строго относился к своим исследованиям. Каждая его работа была крупным событием в математическом мире. 24 сентября 1938 г. Шнирельман покончил с собой. Он закрылся в кухне, заложил все щели и пустил газ [78].

А.О. Гельфонд



Гельфонд Александр Осипович родился 24 октября 1906 г. в Петербурге в семье врача. В 1924 г. он поступил в Московский университет и в 1927 г. его окончил. Гельфонд активно участвовал в семинаре Хинчина по аналитической теории чисел и вскоре стал ведущим специалистом страны по этой тематике. Александр Осипович, обладал сильной волей и большим обаянием.

Научную и педагогическую деятельность Гельфонд начал в 1929 г. в МВТУ, а с 1931 г. работал в МГУ. Его исследования по теории чисел и теории функций комплексного переменного быстро приобрели известность. Им создано и под его руководством развивалось направление теории чисел, включающее теоретико-числовые задачи теории функций и теорию трансцендентных чисел. Исследование глубоких связей теории аналитических функций и теории целых чисел привело Гельфонда к разработке метода исследования трансцендентных чисел, который явился самым значительным вкладом в эту область со времени доказательства Линдеманом трансцендентности числа π. Еще в исследованиях 1929 г. Гельфонд указал весьма общий подход к выяснению арифметической природы значений аналитических функций при алгебраических значениях аргумента, если эти функции имеют алгебраические значения при аргументе, взятом из определенного алгебраического поля.

В 1929–1930 гг. Гельфонд работал над седьмой проблемой Гильберта, которую окончательно решил в 1934 г., создав новый метод. Он доказал, что если α – алгебраическое число, отличное от 0 и 1, а β – иррациональное алгебраическое число, то число α^{β} является трансцендентным. Это открытие получило широкую известность и привело к появлению многих работ. Как следствие была доказана теорема о трансцендентности логарифмов алгебраических чисел при алгебраическом основании, которую интуитивно сформулировал Л. Эйлер. В работах Гельфонда 1949 г. был создан новый метод доказательства трансцендентности чисел, обобщающий метод 1934 г., но более сильный. Этот метод позволил решить ряд проблем трансцендентности, ранее недоступных никаким другим методам. Используя его, Гельфонд доказал ряд важных теорем о приближениях алгебраическими числами.

Гельфонду принадлежит много работ в других разделах теории чисел. Эти работы посвящены в основном разработке элементарных методов в теории распределения простых чисел, распределению дробных долей, изучению разбиения натурального ряда на классы системой линейных подстановок и ряду других вопросов.

В конце 1920-х годов центральное место в теории мероморфных функций заняла теория распределения значений, основы которой были заложены Неванлинной. Первые важные результаты в этом направлении были получены в 1929 г. После возвращения к этой тематике в 1951 г. Гельфонд доказал, что

отношение любых двух асимптотических периодов целой функции конечного порядка является или рациональным, или трансцендентным числом.

Исследовал Гельфонд и вопросы истории математики. В 1930 г. вышла его работа «Очерк истории современного состояния теории трансцендентных чисел». Много времени он уделял руководству советом по истории точных наук при Институте истории естествознания и техники и руководству семинаром по методологии математики при Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР [64].

Теоретико-числовые исследования Гельфонда по функциям комплексного переменного первоначально касались теории целочисленных функций. В 1929 г. он исследовал условия, при которых целая функция является полиномом. В 1933 г. им был рассмотрен вопрос о функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии, а в 1934 г. – установлена связь между вопросами целочисленности функций и теорией простых чисел. Его работы привели к созданию теории интерполирования целых функций.

В 1931 г. Гельфонд стал профессором МГУ, а в 1933 г. начал работу в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР. Ученую степень доктора физико-математических наук он получил в 1934 г. без защиты диссертации. На Втором Всесоюзном математическом съезде в 1934 г. в Ленинграде им был прочитан доклад «Трансцендентные числа».

Одной из важнейших проблем теории целых функций является проблема связи между ростом целой функции и распределением ее корней. Эта проблема успешно исследовалась Гельфондом в 1934 г.

Занимался Гельфонд также интерполированием целыми функциями, используя интерполирование как аппарат для изучения арифметических свойств целых функций. Применяя этот метод к проблемам аналитической теории чисел, он получил свои известные результаты по трансцендентным числам. В 1937 г. в журнале «Успехи математических наук» была опубликована сыгравшая важную роль в развитии теории статья Гельфонда «Интерполяционные процессы и целые функции».

В 1938 г. вышла его работа по исследованию полноты систем аналитических функций, после появления которой эта проблема стала усиленно разрабатываться. В 1939 г. Гельфонд был избран членом-корреспондентом АН СССР.

В одной из работ 1940 г. Гельфонд применил свой метод к функциям p-адического переменного, что позволило ему доказать теорему о конечности решений одного из уравнений. В книге «Трансцендентные и алгебраические числа» (1952), он усиливает свой метод приемами, которые дают возможность решать задачи о взаимной алгебраической независимости чисел и находить новые классы трансцендентных чисел.

В годы Великой Отечественной войны Гельфонд был привлечен к работе при Главном штабе военно-морского флота.

Помимо теории чисел, Гельфонд активно занимался теорией аналитических функций и принимал активное участие в исследованиях по теории функций комплексного переменного. В 1952 г. вышла монография Гельфонда «Исчисление конечных разностей», отражавшая современное состояние теории интерполирования.

В 40–50-е годы XX в. Гельфонд работал в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР и руководил семинаром по теории чисел при Московском университете.

В 1960-е годы Гельфонд получил много важных результатов по теории диофантовых приближений. На основе аналитического метода Зигеля он обобщил известную теорему Минковского о решениях в целых числах одной из систем неравенств. Из этого результата Гельфонда следуют доказательство некоторых теорем Хинчина о диофантовых приближениях. Весьма общие теоремы получены Гельфондом в области теории распределения дробных долей системы функций.

Гельфонд ввел в теорию простых чисел новый интересный объект – цепочки линейных подстановок и для них аналоги дзета-функции. Он развил также новый элементарный метод в теории простых чисел.

В 1960-е годы Гельфонд вернулся к вопросу о целочисленности аналитических функций и на основании нового понятия нормальной целочисленности функций доказал справедливость результатов, полученных ранее им и другими математиками. В 1967 г. его избрали президентом Московского математического общества.

В теории функций комплексного переменного Гельфонду принадлежат работы по вопросам полноты систем функций, асимптотическому поведению собственных значений интегральных уравнений, интерполяции в комплексной области. Им установлены глубокие связи между аналитическими свойствами функций комплексного переменного и арифметикой.

Математический талант Гельфонда был особенным, своеобразным. Большинство математиков мыслит примерно одинаково, только кто-то чуть быстрее, кто-то чуть медленнее. Александр Осипович думал всегда по-своему, не похоже на других. Он находил необычные, оригинальные пути решения задач. Именно поэтому работы Гельфонда еще долго будут оставаться предметом внимательного изучения.

Умер А.О. Гельфонд 7 ноября 1968 г. в Москве.

Атле Сельберг

Норвежский математик Сельберг Атле родился 14 июня 1917 г. в Лангесунне в семье математиков. Его отец Оле Сельберг и братья Генрих, Людвиг и Зигмун – профессора математики. Интерес к математике проявился у Атле еще в школе. Его кумиром стал Рамануджан, биография и работы которого произвели на Атле сильное впечатление, поэтому основным научным направлением трудов Сельберга стала теория чисел.

Высшее образование он получил в университете в Осло, там же в 1942 г. стал научным сотрудником и через год защитил диссертацию и получил степень доктора.

В 1947 г. Сельберг женился и уехал в США. Год он проработал в Институте перспективных исследований в Принстоне, еще год – в универси-

тете в Сиракузах адъюнкт-профессором математики, после чего вернулся в Принстон.

Сельберг разработал чрезвычайно эффективный метод оценки для распределения простых чисел. Еще со времен Эратосфена для оценки количества простых чисел в заданном интервале применялся метод решета. В 1919 г. норвежский математик Вигго Брун предложил принципиальное усиление метода решета – метод двойного решета, т. е. оценки простых чисел сразу в двух последовательностях. Сельбергу удалось в 1949 г. получить более точные оценки в методе решета, а также важные результаты, связанные с нулями дзета-функции Римана.

В 1897 г. Адамар и Валле Пуссен доказали асимптотический закон распределения простых чисел $\pi(x) \sim x / \ln x$, опираясь на теорию функций комплексного переменного. Сельберг предложил «элементарное» доказательство этого закона в рамках теоретико-числовых оценок. Другой «элементарный» вариант доказательства этой формулы предложил П. Эрдёш. Это позволило продвинуться в решении целого ряда труднейших задач теории чисел.

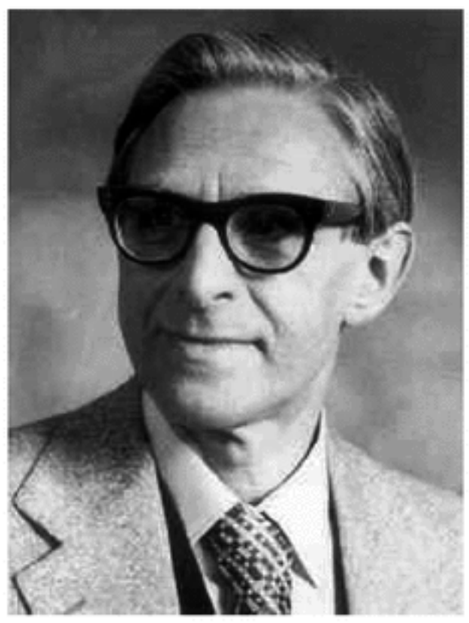
Атле Сельберг стал первым лауреатом медали Филдса, награжденным за работы в теории чисел. Награду он получил в 1950 г. на Международном математическом конгрессе в Кембридже.

В 1951 г. Сельберг стал профессором Института перспективных исследований в Принстоне. После работ по теории чисел, принесших ему мировую известность, Сельберг переключился на теорию дискретных групп, где им получены результаты первостепенного значения. Достаточно упомянуть знаменитую формулу следа Сельберга, позволяющую вычислить размерность пространства автоморфных форм, кратности представлений и многое другое [56].

Сельберг был удостоен многих международных математических наград, в том числе премии Вольфа. Он был членом Норвежской академии наук, Датской королевской академии наук, Американской академии наук и искусств.

Атле Сельберг скончался 6 августа 2007 г. от сердечной недостаточности.

Клаус Рот



Английский математик Рот Клаус Фридрих родился 29 октября 1925 г. в немецком городе Бреслау. Семья переехала в Лондон, когда Клаусу было 14 лет. С 1939 по 1943 г. он учился в школе св. Павла, а затем поступил в Кембридж и в 1945 г. получил степень бакалавра.

После окончания Кембриджа Рот был приглашен на должность ассистента в известную школу в Гордонстоун в Шотландии. В 1946 г. Рот вернулся в Лондон для продолжения исследований в университете. В 1948 г. он получил степень магистра, а в 1950 г. – степень доктора.

Основное научное направление работ Рота – теория чисел. Его интересовала важная задача аппроксимации алгебраических чисел рациональными.

В 1844 г. Лиувилль доказал теорему о приближении алгебраических чисел, в которой доказал, что алгебраические иррациональности не могут слишком хорошо приближаться рациональными числами. Он доказал, что если α – алгебраическое число степени $n \geq 2$, а p и $q > 0$ – любые целые рациональные числа, то имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n},$$

где c – положительная константа, зависящая только от α.

В 1909 г. норвежский математик Аксель Туэ и в 1921 г. немецкий математик Карл Зигель последовательно усилили результат Лиувилля.

В 1955 г. Рот доказал, что если α – алгебраическая иррациональность, $\delta > 0$ и сколь угодно мало, то существует лишь конечное число целых решений p и q (p и q взаимно просты) неравенства

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-2-\delta}.$$

Это неравенство стали называть теоремой Туэ – Зигеля – Рота. За ее доказательство в 1958 г. Клаус Рот на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге был награжден медалью Филдса.

В 1960 г. Рот был избран членом Лондонского королевского общества. В 1961 г. он стал профессором Университетского колледжа в Лондоне, а в 1966 г. – заведующим кафедрой математики Имперского колледжа в Лондоне. В этой должности он проработал до 1988 г. В 1996 г. Рот вернулся в Шотландию.

Алан Бейкер

Английский математик Бейкер Алан родился 19 августа 1939 г. в Лондоне. После учебы в Стрэтфордской гимназии Бейкер поступил в Университетский колледж Лондона и получил степень бакалавра. В Тринити-колледже Кембриджа он получил степень магистра, затем – доктора и в 1964 г. был избран членом этого учебного заведения.

Основным научным направлением работ Бейкера является диофантова геометрия – область математики, в которой методами алгебраической геометрии изучаются диофантовы уравнения, т. е. целочисленные и рациональные решения систем алгебраических уравнений. Он является продолжателем традиций кембриджской школы теории чисел – Харди, Литлвуда и Рамануджана. Им развит мощный метод доказательства трансцендентности чисел, задаваемых линейными формами от логарифмов алгебраических чисел. Работы Бейкера усилили ставшие классическими результаты Гельфонда, Зигеля и Шнайдера о трансцендентности чисел вида α^β (α – алгебраическое, β – квадратичное иррациональное число).

За работы в теории чисел А. Бейкер в 1970 г. был награжден медалью Филдса на Международном математическом конгрессе в Ницце. В 1970 г. он был приглашен в Институт перспективных исследований в Принстоне.

Методы Бейкера впервые позволили дать эффективную оценку числа решений диофантовых уравнений. Ранее был известен лишь сам факт конечности числа решений.

В 1972 г. Бейкера наградили премией Адамса, присуждавшейся Кембриджским университетом, в 1973 г. он был избран членом Лондонского королевского общества, в 1974 г. – стал профессором Стрэтфорского университета, а в 1980 г. – избран членом Индийской национальной академии наук.

Энрико Бомбьери

Итальянский математик Бомбьери Энрико родился 26 ноября 1940 г. в Милане. Он рано заинтересовался математикой и в 13 лет изучил учебник по теории чисел. Учился он в Милане, а затем в Тринити-колледже Кембриджского университета. В 1963 г. он получил звание доктора и начал исследования на кафедре Джона фон Неймана в Институте перспективных исследований в Принстоне. В 1966 г. Бомбьери стал профессором математики в Пизанском университете. Основные труды Бомбьери относятся к теории чисел, комплексному анализу и дифференциальным уравнениям.

Одной из классических проблем математики является задача Плато. Это задача нахождения минимальных поверхностей с заранее заданной границей. Впервые она была сформулирована Лагранжем в 1760 г., но после того, как бельгийский математик и физик Жозеф Плато в 1849 г. показал, что минимальные поверхности могут быть получены в виде мыльных пленок, натянутых на проволочные каркасы, она стала называться задачей Плато. В 1931 г. американский математик Джессе Дуглас решил задачу Плато для односвязной поверхности, за что в 1936 г. получил медаль Филдса. Он же поставил вопрос о существовании в n-мерном пространстве минимальной поверхности заданного топологического типа. Эту задачу решил Дж. Саймонс в 1968 г., но окончательное решение было получено в 1969 г. Э. Бомбьери совместно с Э. де Джорджи и Э. Джусти. Они также обобщили теорему С.Н. Бернштейна (1902) на многомерный случай.

Но решение задачи Плато – не самое важное математическое достижение Бомбьери. Он получил медаль Филдса в 1974 г. на Международном математическом конгрессе в Ванкувере за развитие метода большого решета, цикл работ по эффективизации метода Туэ – Зигеля – Рота, исследования в теории функций нескольких комплексных переменных и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Метод большого решета разработан Ю.В. Линником в 1941 г. при попытке решить проблемы, поставленные Виноградовым. Он позволяет высеивать последовательности с возрастающим числом выбрасываемых вычетов.

В 1965 г. Бомбьери усовершенствовал метод большого решета. Он ввел плотностный метод, что привело к доказательству теоремы Виноградова – Бомбьери – усредненного асимптотического закона распределения простых чисел в арифметических прогрессиях.

Бомбьери получил важнейшие результаты в теории чисел, алгебраической геометрии, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории конечных групп, теории функций многих комплексных переменных.

В настоящее время Энрико Бомбьери работает в Америке. В 1984 г. он избран иностранным членом Парижской академии наук, в 1996 г. – членом Национальной академии наук США. В 2010 г. Бомбьери и Теренс Тао получили Международную премию короля Фейсала.

Ю.В. Матиясевич

Матиясевич Юрий Владимирович родился 2 марта 1947 г. в Ленинграде. До 1963 г. он учился в ленинградских школах, а после – в московской физико-математической школе-интернате № 18 им. А.Н. Колмогорова. Юрий участвовал в ленинградских, московских и всероссийских олимпиадах по математике.

Как победитель IV Международной математической олимпиады Матиясевич в 1964 г. за год до окончания школы был без экзаменов зачислен на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. На втором курсе он выполнил две работы по математической логике, опубликованные в «Докладах Академии наук СССР», и выступил на Международном математическом конгрессе в Москве в 1966 г.

В 1969 г. Матиясевич окончил университет и стал аспирантом Ленинградского отделения Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Исследованием десятой проблемы Гильберта Матиясевич начал заниматься в декабре 1965 г.

В 1950-е годы группа американских математиков, которая занималась поисками доказательства гипотезы о диофантовости перечислимых множеств, сформулированной Мартином Дэвисом, получила ряд значительных результатов. Им удалось свести задачу к доказательству диофантовости отношения $y = z^n$. Джулия Робинсон, сестра создателя нестандартного анализа Абрахама Робинсона, показала, что для доказательства достаточно построить конкретное уравнение с определенными свойствами. В аспирантуре Матиясевич вплотную занялся построением такого уравнения, и по прошествии двух лет проблема была решена.

Для построения требуемого уравнения он придумал элементарную, но чрезвычайно остроумную и оригинальную конструкцию. Матиясевичу пришлось решать необычную для традиционной теории чисел задачу. Как правило, в теории чисел исследуются свойства решений заданного уравнения, а он искал уравнение по заданным свойствам его решений. Прямым следствием достигнутого результата является доказательство алгоритмической

неразрешимости десятой проблемы Гильберта. Матиясевич доказал, что не существует единого метода, которым за конечное число шагов можно узнать, имеется ли решение в целых числах у произвольного диофантова уравнения.

В 1970 г. Матиясевичу присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук. В том же году он становится научным сотрудником Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова АН СССР (ЛОМИ), ему присуждают премию «Молодому математику» Ленинградского математического общества. В 1972 г. он защитил докторскую диссертацию. С 1980 г. Матиясевич является заведующим лабораторией математической логики ЛОМИ, ныне Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Книга Ю.В. Матиясевича «Десятая проблема Гильберта», написанная в 1993 г., переведена на английский и французский языки. В 1995 г. Матиясевич становится профессором Санкт-Петербургского государственного университета сначала на кафедре математического обеспечения ЭВМ, а затем на кафедре алгебры. В 1997 г. он избран членом-корреспондентом РАН, в 2008 г. – действительным членом РАН.

Теренс Тао

Известный математик, профессор Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе, Тао Теренс Чи Шен родился в 1975 г. в Аделаиде (Австралия) в семье китайских эмигрантов. Его математические способности проявились очень рано. В 9 лет он производил вычисления на университетском уровне, в 11 лет стал бронзовым призером Международной математической олимпиады, в 12 – серебряным призером, а в 13 – победителем. В 14 лет Тао поступил в Институт научных исследований Массачусетского технологического института. В 17 лет он получил степени бакалавра и магистра, в 20 лет – степень доктора математики, в 24 года – должность профессора. Он является самым молодым из четырех лауреатов медали Филдса на Международном математическом конгрессе, состоявшемся в Мадриде в 2006 г. и первым лауреатом этой медали с «зеленого континента». В 2007 г. Теренс Тао был признан человеком года в Австралии.

Исследования на стыке разнородных разделов математики в творчестве Тао занимают особое место. По официальной формулировке он получил медаль Филдса «за вклад в теорию дифференциальных уравнений в частных производных, комбинаторику, гармонический анализ и аддитивную теорию чисел», но основным его достижением является теорема о существовании длинных арифметических прогрессий во множестве простых чисел.

Если выписывать подряд все простые числа, то в их последовательности встречаются «кусочки» арифметических прогрессий. Примером могут служить простые числа 3, 5, 7 (три члена арифметической прогрессии

с разностью 2) или 109, 219, 329, 439, 549 (пять членов арифметической прогрессии с разностью 110). Поскольку простых чисел бесконечно много, то возникает вопрос: можно ли найти в последовательности простых чисел арифметические прогрессии сколь угодно большой длины? Тао в соавторстве с Беном Грином на этот вопрос дал положительный ответ. Самое удивительное в том, что доказательство этой теоремы Тао основывал на эргодической теории, являющейся частью теории динамических систем, используя теорию вероятностей.

Теренс Тао умеет отлично работать в команде: в возрасте 31 года им написано около 80 статей в соавторстве более чем с 50 математиками, причем ведущая роль принадлежит Тао.

Одной из математических проблем, рассматриваемых Тао, является проблема, сформулированная в начале XX в. японским математиком Какейя. Предположим, что водителю большегрузного фургона нужно развернуться на 180 °. Пока он будет это делать, проекция машины на асфальт «заметет» определенную площадь. Насколько малой она может быть? Аналогичная задача в математической постановке рассматривает отрезок прямой, т. е. фургон, не имеющий ширины. В 1927 г. А. Безикович доказал, что отрезок может развернуться на площадке сколь угодно малой площади, но чем меньше площадь площадки, тем сложнее должна быть ее форма. Множества таких площадок часто оказываются фракталами и обладают дробной размерностью. В настоящее время проблема Какейя формулируется так: «Верно ли, что в n-мерном пространстве минимальное множество, на котором может развернуться отрезок прямой, обладает размерностью n?» Бельгийский математик Жан Бурген в конце 1990-х годов показал, что проблема Какейя может быть переформулирована в терминах арифметических прогрессий, которые исследует Тао. Оказалось, что при решении проблемы Какейя появится возможность доказывать различные результаты о гладкости волнового поля, являющегося решением определенного класса уравнений с частными производными. Это даст важную информацию о свойствах этих уравнений.

На делегатов Международного математического конгресса в Мадриде доклад Тао произвел впечатление не только глубиной проникновения в суть вопроса, но и ясностью изложения. После этого выступления в освещающих конгресс журналах Тао называли Моцартом современной математики.

Практически ежегодно Тао получает международные премии и почетные звания. Например, в 2007 г. он был избран членом Лондонского королевского общества, в 2008 г. – иностранным членом Национальной академии наук США, в 2009 г. – членом Американской академии искусств и наук, в 2010 г. – лауреатом Международной премии короля Фейсала. Многие считают Тао лучшим математиком начала XXI в. Математики соревнуются за внимание Тао к их проблемам, он становится чем-то вроде спасательного круга для исследователей. По мнению Чарльза Феффермана, ученому, застрявшему в сложной проблеме, для ее решения нужно заинтересовать этой проблемой Тао.

Глава 23

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

История Великой теоремы Ферма неразрывно связана с историей математики, так как затрагивает все основные темы теории чисел. Она открывает уникальную возможность понять, что движет математикой и что дает вдохновение математикам.

С. Сингх

Предыстория Великой теоремы Ферма

«Арифметика» Диофанта была настольной книгой Ферма. Она имела широкие поля, на которых Ферма иногда записывал ход своих рассуждений и свои комментарии.

История Великой теоремы Ферма такова. В задаче № 8 второй книги «Арифметики» Диофанта требуется представить a^2 в виде двух целых квадратов (т. е. найти пары типа $5^2 = 3^2 + 4^2$, $13^2 = 5^2 + 12^2$ и т. д.). На полях книги Диофанта напротив условия этой задачи Ферма написал: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

В современных обозначениях эта теорема может быть сформулирована так: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ для целых показателей при $n > 2$ неразрешимо в целых числах».

Из записи Ферма можно заключить, что он был доволен своим «поистине чудесным» доказательством, но не потрудился изложить его на бумаге. Теорема названа Великой не потому, что она очень важна для теории чисел в целом. Практическое ее значение невелико, но при попытках доказательства теоремы были получены важные побочные результаты. Запись на полях была сделана около 1637 г., в самом начале математической карьеры Ферма. После смерти (1665) его открытиям грозило полное забвение, так как при жизни Ферма находился фактически в полной изоляции от Парижской математической школы.

Старший сын Ферма Клеман-Самюэль пять лет изучал письма и неразборчивые записи отца на полях «Арифметики». В 1670 г. он издал в Тулузе книгу под названием «Диофантова арифметика, содержащая примечания Пьера де Ферма». Когда «Примечания» Ферма стали известны ученым, все поняли, что те письма, которые он ранее посылал своим коллегам, содержали не просто предположения, а теоремы. Пометки Ферма на полях либо были ли-

шены объяснений, либо содержали лишь наброски доказательств. Однако содержащиеся в них изящные логические ходы не оставляли сомнений, что Ферма располагал доказательствами многих теорем.

Все утверждения Ферма, оставленные им на полях «Арифметики» Диофанта, кроме Великой теоремы, были одно за другим доказаны. В том же экземпляре «Арифметики» Ферма при решении совсем другой задачи изложил в зашифрованном виде доказательство Великой теоремы для $n = 4$. Несмотря на отсутствие многих важных деталей, метод доказательства был понятен. Он получил название метода бесконечного спуска.

Суть метода заключается в том, что вначале для конкретного значения n предполагается, что решение в целых числах существует. Из рассмотренных Ферма свойств чисел следовало, что решение должно существовать и при числах меньших, чем те, при которых оно верно. Получалась целая лестница постепенно уменьшающихся решений. Но лестница не могла быть неограниченной, так как рассматриваются только целые числа. Отсюда первоначальное предположение о существовании решения является ложным.

Первый успешный шаг сделал Эйлер, обосновавший большую часть других теорем, оставленных Ферма без доказательств. Методом бесконечного спуска Эйлер в 1753 г. подтвердил теорему для $n = 3$. При доказательстве он использовал комплексные числа. Это было грандиозным достижением, но повторить успех для других значений n Эйлеру не удалось. Дальнейшие исследования математиков показали, что достаточно доказать теорему для простых n, так как она справедлива для всех чисел, кратных уже доказанным.

Француженка Софи Жермен смогла доказать, что если уравнение $x^n + y^n = z^n$ имеет решения для таких n, что $2n + 1$ также простое число, то либо x, либо y, либо z делится на n. В 1825 г., используя этот результат, Лежандр и Дирихле независимо друг от друга доказали теорему Ферма для $n = 5$. Через 14 лет французский математик и инженер Габриэль Ламе внес некоторые усовершенствования в метод Софи Жермен и доказал теорему для $n = 7$.

Французская академия наук учредила серию премий, для тех математиков, кто сумеет разгадать тайну Великой теоремы. 1 марта 1847 г. члены Академии собрались на заседании, посвященном подведению итогов решения теоремы.

Ламе заявил, что практически доказал теорему в общем виде, рассказал о своем методе и сообщил, что через несколько недель опубликует полное доказательство в журнале Академии. После него выступил Коши и сообщил, что уже давно работает над доказательством теоремы и также вскоре намеревается опубликовать полное доказательство. Спустя три недели в запечатанных конвертах Ламе и Коши передали свои доказательства в журнал для опубликования.

24 мая на заседании Академии первым выступил Жозеф Лиувилль. Он зачитал письмо немецкого математика, крупнейшего специалиста в теории чисел, Эрнста Куммера (1810–1893). Куммер писал, что, проанализировав

фрагменты доказательств Ламе и Коши, нашел некорректность в их методах. Ламе и Коши опирались на использование единственности разложения целых чисел на простые множители. Куммер обратил внимание на то, что, хотя теорема о единственности разложения на простые множители выполняется для целых чисел, при использовании мнимых чисел она не обязательно должна выполняться. Он показал, что полное доказательство теоремы Ферма находится за пределами возможностей существовавших тогда математических подходов. Это было ударом для целого поколению математиков, надеявшихся решить труднейшую проблему.

В 1857 г. в заключительном отчете Французской академии наук о доказательстве Великой теоремы Ферма Коши предложил присудить медаль Куммеру за исследования по комплексным числам. Куммер сумел доказать теорему Ферма для всех простых $n < 100$.

Известно, что немецкий математик Пауль Вольфскель, потерпев неудачу в личной жизни, решил свести счеты с жизнью и назначил для этого точную дату. Приводя свои дела в порядок, он стал просматривать математические журналы. Ему показалось, что он нашел ошибку в статье Куммера. Потратив много времени на проверку статьи, он убедился в ее правильности, но пропустил день, в который хотел уйти из жизни. Решив отложить это на неопределенный срок, Вольфскель написал завещание, в котором значительную часть своего состояния назначил в качестве премии тому, кто первым сумеет доказать теорему Ферма. После его естественной смерти в 1906 г. завещание, повергшее в шок семью Вольфскеля, было оглашено и опубликовано. Размер премии составлял 100 тыс. марок (более 1 млн фунтов стерлингов по современным меркам). Подробно были оговорены условия и сроки (до 13 сентября 2007 г.) присуждения премии. Премия была предназначена тому, кто первым докажет, что теорема верна. В случае опровержения теоремы автор не получил бы ничего.

Проценты с оставленной Вольфскелем суммы до вручения приза должны были тратиться по усмотрению комитета при Гёттингенском научном обществе, который долгое время возглавлял Гильберт. Из-за инфляции к окончанию Первой мировой войны премия была практически обесценена.

Профессиональные математики не стали заниматься доказательством теоремы. Когда Гильберта спросили, почему он никогда не пытался доказать Великую теорему, он ответил, что понадобилось бы затратить три года на предварительную подготовку, а у него нет столько времени на решение, которое может обернуться неудачей.

Многие молодые умы, не имевшие достаточного математического багажа знаний, жаждали решить неприступную головоломку, но в первой половине XX в. не было достигнуто серьезных успехов в доказательстве теоремы. Только в 1929 г. Гарри Вандивер получил в явном виде условия, позволяющие проверить истинность теоремы для любого простого показателя. С этого момента доказательство теоремы для конкретного значения n свелось к вычислениям, с которыми легко справлялись ЭВМ. К концу 70-х годов XX в. теорема была доказана для всех $n < 100\,000$.

Гипотеза Таниямы – Шимуры

Чтобы читателю стал немного понятнее путь к доказательству Великой теоремы Ферма, рассмотрим понятия вычета, эллиптической кривой, модулярной формы и гипотезу Таниямы – Шимуры.

Вычет. Наименьшим неотрицательным вычетом числа b по модулю m называется остаток r от деления числа b на m, т. е., $b = dm + r$, где b, d, m, r – целые числа.

Природные процессы идут в циклическом режиме, и мы постоянно пользуемся вычетами в обыденной жизни, особенно при измерении времени. Мы обычно не интересуемся вопросами типа: сколько часов прошло с начала Нового года или сколько дней прошло с последнего праздника Пасхи? На практике наша жизнь идет по недельному или суточному циклу, поэтому для нас являются важными вопросы: который час или какой сегодня день недели?

Ответ на первый из них является вычетом по модулю 24 числа часов с начала Нового года до момента, когда задан вопрос (остаток от деления числа часов на 24). Порядковый день недели – это вычет числа дней от Пасхи (Пасха всегда празднуется в воскресенье) до сегодняшнего дня по модулю семь.

Вычеты имеют большое применение не только в теории чисел. В приведенном в [59] алгоритме Гаусса вычисления даты Пасхи параметры A, B, C, D, E являются вычетами по модулям 19, 4, 7, 30.

В нумерологии часто используется вычет по модулю 9. Когда мы суммируем последовательность цифр и приводим ее к одной цифре, мы находим вычет по модулю 9 от числа, составленного этой последовательностью. Любопытно, что результат не зависит от любых перестановок цифр. Например, любое число, составленное из цифр 1, 4, 3 с использованием неограниченного числа нулей, имеет по модулю 9 вычет, равный 8. Поскольку $1 + 4 + 3 = 8$, то остаток от деления на 9 чисел 41 003, 130 400, 431 и любых других, в написании которых есть цифры 1, 3, 4 и нули, будет равен 8.

Эллиптическая кривая. Вычеты используются в теории эллиптических кривых, ставшей истоком алгебраической геометрии. Наиболее простой вид (в нормальной форме Вейерштрасса) уравнения эллиптической кривой $y^2 = x^3 + ax + b$.

Составление полного списка решений данного кубического уравнения в целых числах в зависимости от параметров a и b – практически невыполнимая задача. Информацию о свойствах конкретного уравнения дает число его решений на конечном числовом пространстве – пространстве арифметических вычетов. Для каждого подобного уравнения составляется последовательность E_1, E_2, …, E_n …, где E_n – число решений уравнения в арифметике вычетов по модулю n.

Полученную последовательность называют E-рядом эллиптической кривой и считают однозначной ее характеристикой, так сказать, своеобразным «паспортом».

Модулярная форма – сложный математический объект, открытый в XIX в. и привлекший внимание математиков необычайно высоким уровнем симметрии. В математике симметрия имеет особый смысл. Считается, что математический объект обладает симметрией, если после некоторых преобразований он не будет отличаться от исходного. Симметрией обладает, например, уравнение $x^2 + y^2 + 3xy - x - y = 0$, так как оно не изменится, если x и y поменять местами.

Модулярной формой одного комплексного переменного z называется определенная на верхней полуплоскости функция, удовлетворяющая при некотором фиксированном k, называемом весом модулярной формы, условию

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z), \text{ где } ad - bc = 1.$$

Эта функция может быть представлена в виде бесконечной суммы слагаемых специального вида $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n e^{2\pi inz}$, где M_n – в общем случае комплексное число. Последовательность M_1, M_2,... M_n... однозначно определяет модулярную форму, фактически является ее «паспортом». Назовем ее M-рядом.

Гипотеза. Ютака Танияма родился в 1927 г., Горо Шимура – в 1928 г. В детстве Танияма часто болел, из-за туберкулеза пропустил два года учебы в школе. В годы Второй мировой войны многие школы в Японии закрылись, поэтому Танияма и Шимура были вынуждены прервать учебу.

Математику Танияма и Шимура осваивали по учебникам самостоятельно. Познакомились и подружились они в 1954 г., когда учились в аспирантуре. В это время японская наука была в изоляции, поэтому молодые математики, интересовавшиеся модулярными функциями, не знали, что мода на эти исследования в Европе и Америке уже прошла. Наиболее продуктивным способом изучения математики аспиранты считали не консультации с уставшими, измученными войной профессорами, а взаимное обучение.

В их тандеме лидером был Танияма – живое воплощение рассеянного гения. Он был небрежен и в поведении, и в одежде. Танияма любил работать по ночам, а днем отсыпался, в отличие от Шимуры, поднимавшегося на рассвете и сразу приступавшего к работе. Танияма часто допускал ошибки, но они, как правило, были полезны, поскольку приводили к неожиданным результатам.

В 1955 г. Танияма выдвинул гипотезу о тесной связи между модулярными формами и эллиптическими кривыми. Согласно его догадкам, модулярной форме, имеющей данный M-ряд, однозначно соответствует эллиптическая кривая, имеющая E-ряд, совпадающий с этим M-рядом. Эллиптические кривые и модулярные формы – совершенно разные объекты математического мира, поэтому многие математики такую связь считали абсурдной. Вначале Танияму поддержал только его друг Шимура. Они стали вместе искать факты, подтверждающие гипотезу. В 1957 г. Шимура был приглашен на работу в США, в Институт перспективных исследований в Принстоне. Его

планам по поводу совместной работы с Таниямой после возвращения из США не суждено было сбыться. Ютака Танияма покончил жизнь самоубийством. Через несколько недель таким же образом ушла из жизни его невеста.

Горо Шимура в одиночку продолжил работу над исследованием связи между модулярными формами и эллиптическими кривыми, после чего гипотезу Таниямы стали называть гипотезой Таниямы – Шимуры. В 60-е годы XX в. ее проверяли многие математики. К изучению гипотезы активно подключился Андре Вейль, поэтому иногда ее называют гипотезой Вейля. Она обладает весьма важной особенностью: соображения, основанные лишь на интуиции модулярных формах при переходе в эллиптический мир преобразуются в глубокие истины, и наоборот, очевидные результаты в эллиптическом мире соответствуют труднодостижимым результатам в модулярных формах. Если бы гипотеза Таниямы – Шимуры оказалась верной, то это позволило бы математикам подходить к решению эллиптических проблем, остававшихся нерешенными на протяжении столетий, с позиций модулярного мира.

Не дожидаясь доказательства гипотезы Таниямы – Шимуры, многие математики, предположив, что она верна, стали использовать ее в своих исследованиях. В итоге было получено много новых результатов. Статьи с этими результатами обычно начинались словами: «Предположим, что гипотеза Таниямы – Шимуры верна». Понятно, что ценность этих результатов была мала, пока гипотеза не была доказана, и неизмеримо возросла после ее доказательства.

Особый случай гипотезы Таниямы – Шимуры (случай полустабильных эллиптических кривых) доказал в 1995 г. Эндрю Уайлс.

Полностью теорема Таниямы – Шимуры была подтверждена в 1998 г. Брюэлем, Конрадом, Даймондом и Тейлором. Основываясь на работе Уайлса, они доказали оставшиеся случаи. Гипотеза Таниямы – Шимуры о связи теории модулярных форм и эллиптических кривых поразила воображение математиков.

Программа Ленглендса. Установление связи между различными направлениями науки всегда было мечтой ученых, стремившихся к созданию всеобъемлющего учения. Подобно тому как физики стремятся создать единую теорию поля, связывающую все известные взаимодействия, математики стремятся показать, что все основные разделы математики связаны между собой.

В 1960-е годы Роберт Ленглендс из Института перспективных исследований в Принстоне, поверивший в истинность гипотезы Таниямы – Шимуры, решил искать другие связи между разделами математики и выдвинул несколько гипотез. Он мечтал о том, что одна за другой эти гипотезы будут доказаны и возникнет единая математика. Ленглендс охотно обсуждал с коллегами свой план построения математики будущего и привлекал их к сотрудничеству. Этот план стали называть программой Ленглендса. Его осуществление очень перспективно. При наличии множества таких

связей, как в гипотезе Таниямы – Шимуры, любую неразрешимую задачу в одной области математики можно трансформировать в аналогичную задачу в другой области, где для ее решения уже имеются разработанные ранее методы.

Гипотеза Таниямы – Шимуры была первой внесена в программу Ленглендса по унификации математических гипотез о связях между разделами математики. Постепенно поиски таких связей стали приносить результаты.

Важность программы Ленглендса объясняется нарастанием темпов развития математики и ее дроблением на все новые и новые разделы. Только в журнале «The Mathematical Intelligencer» с 1939 по 1957 г. было опубликовано 57 тыс. статей. По оценке С. Улама, в 1970-е годы в мире доказывалось около 200 тыс. теорем в год. В это время в математике существовало около 3 тыс. разделов различной степени общности, в каждом из которых профессионально работали (т. е. получали результаты) от 50 до 100 математиков.

Завершающие атаки на Великую теорему Ферма

Осенью 1984 г. на симпозиуме специалистов по теории чисел в Обервольфахе немецкий математик из Саарбрюкена Герхард Фрей указал на связь Великой теоремы Ферма с гипотезой Таниямы – Шимуры.

Фрей предположил, что теорема Ферма неверна, и существуют решения в целых числах уравнения $x^n + y^n = z^n$, т. е. для некоторых A, B и C выполняется равенство

$$A^n + B^n = C^n.$$

Он преобразовал исходное уравнение вместе с гипотетическими решениями в кубическое

$$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^nB^n.$$

Следовательно, если решение уравнения Ферма существует, то оно равносильно полученному кубическому уравнению и, соответственно, некоторой эллиптической кривой, имеющей свой E-ряд. Но согласно гипотезе Таниямы – Шимуры, должна существовать модулярная форма с M-рядом, совпадающим с полученным E-рядом. Оказалось, что эллиптическая кривая, соответствующая возможным решениям уравнения Ферма, такова, что модулярной формы с таким M-рядом быть не может.

Из этого следовал сенсационный вывод, что доказательство гипотезы Таниямы – Шимуры автоматически доказывает Великую теорему Ферма. Оказалось, что теорема Ферма, значение которой не очень велико, связана с одной из самых важных математических проблем XX в. – гипотезой Таниямы – Шимуры. К тому времени доказать эту гипотезу пытались уже почти 30 лет.

В тайне ото всех над доказательством гипотезы Таниямы – Шимуры, а, следовательно, и Великой теоремы Ферма, трудился профессор Принстонского университета Эндрю Уайлс, английский математик, проживающий

в США. В доказательстве гипотезы Таниямы – Шимуры Уайлс использовал метод математической индукции.

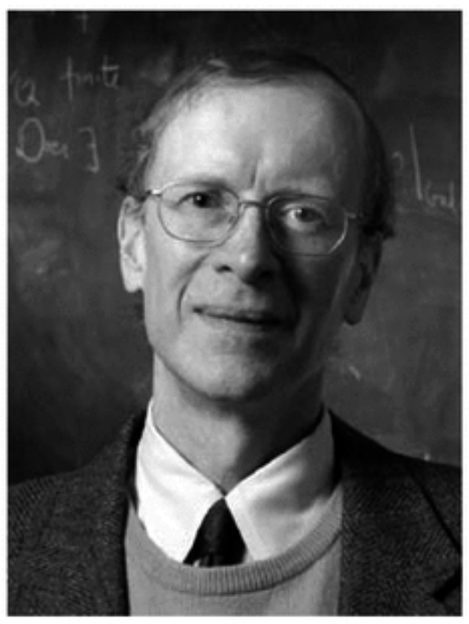
После семи лет самостоятельной работы Уайлс завершил доказательство гипотезы Таниямы – Шимуры. В июне 1993 г. в Институте сэра Исаака Ньютона состоялся симпозиум по теории чисел под названием «L-функции и арифметика». Уайлс на симпозиуме читал три лекции под общим названием «Модулярные формы, эллиптические кривые и представления Галуа». В конце третьей лекции, подводя итог, Уайлс написал на доске формулировку Великой теоремы.

В начале декабря 1993 г., за несколько дней до того, как рукопись работы Уайлса должна была поступить в печать, в его доказательстве обнаружились пробелы, которые были устранены только 19 сентября 1994 г. Текст с доказательством гипотезы Таниямы – Шимуры вышел в свет летом 1995 г.

Хотя для решения загадки XVII в. Уайлсу пришлось прибегнуть к методам XX в., тем не менее, найденное им доказательство Великой теоремы Ферма удовлетворяло всем требованиям, установленным комиссией Вольфскеля. 27 июня 1997 г. Эндрю Уайлс получил премию Вольфскеля в размере 50 тыс. долл.

Доказательство Уайлса занимает 100 страниц убористого математического текста и его невозможно разместить на полях «Арифметики» Диофанта, к тому же в нем используются те методы, которых не существовало в XVII в. Есть и сейчас математики, которые стремятся получить доказательство только с помощью методов, доступных Ферма.

Эндрю Уайлс



Эндрю Уайлс родился 11 апреля 1953 г. в Кембридже в семье профессора богословия. Как многие математически одаренные школьники, он интересовался более сложными задачами, чем те, которые были помещены в школьных учебниках. Узнав, что Великая теорема Ферма еще не доказана, он решил посвятить этому свою жизнь.

1971 г. Уайлс поступил в Оксфордский колледж Мертон и в 1974 г. окончил его со степенью бакалавра. В следующем году он поступил в аспирантуру Кембриджского университета. Научным руководителем Уайлса стал австралиец Джон Коутс, профессор из колледжа Эммануэля в Новом Южном Уэльсе. Он рекомендовал Уайлсу заняться исследованием эллиптических кривых. Эти кривые, задаваемые уравнением

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – некоторые числа, называются эллиптическими потому, что некоторые функции, тесно связанные с этими кривыми, потребовались для

вычисления длин эллипсов. Целью исследования эллиптических кривых является нахождение целочисленных решений и определение их числа, если решения существуют.

С 1977 по 1980 г. Уайлс работал младшим научным сотрудником в Кембриджском колледже Клер, а также ассистентом в Гарвардском университете. В 1980 г. он получил степень доктора и уехал в командировку в Центр исследований проблем теоретической математики (Бонн). В конце 1981 г. Уайлс вернулся в США и в звании профессора остался в Принстоне. В течение следующего года он также работал приезжающим профессором в Париже.

Узнав о выводе Герхарда Фрея, что доказательство гипотезы Таниямы – Шимуры доказывает Великую теорему Ферма, Уайлс оставляет все свои исследования и с 1986 г. сосредотачивается на гипотезе.

Получив много важных результатов, Уайлс решил опубликовать их только после завершения всей работы. Об этой тайне знала лишь его жена Нада. Чтобы не вызывать подозрений, Уайлс по кусочкам, по одной статье каждые полгода, публиковал полученные им ранее результаты исследования одного конкретного вида эллиптической кривой.

За основу доказательства Уайлс выбрал метод индукции и теорию групп Галуа. Убедившись в том, что все описанные в литературе методы и подходы, до того используемые для доказательства гипотезы Таниямы – Шимуры, не ведут к цели, он решил применить теорию Ивасавы и метод Колывагина – Флаха. Прежде всего, ему необходимо было доказать, что первый элемент E-ряда можно привести в соответствие с первым элементом некоторого M-ряда. На преодоление этого этапа Уайлсу понадобилось два года.

8 марта 1988 г. Уайлс испытал шок, увидев на первых полосах газет сообщение о том, что 38-летний Иончи Мияока из токийского Метрополитен университета доказал Великую теорему, о чем сообщил на семинаре в Институте Макса Планка в Бонне. Мияока подошел к решению проблемы с алгебраической и геометрической точек зрения. Как и другие математики, он надеялся, что нерешенные проблемы теории чисел удастся преодолеть, изучая соответствующие нерешенные проблемы геометрии. Подход Мияоки был схож с подходом Уайлса в том, что оба они пытались доказать Великую теорему Ферма, связывая ее с фундаментальной гипотезой в другой области математики. У Мияоки это была алгебраическая геометрия, у Уайлса – эллиптические кривые и модулярные формы.

Через две недели после выступления в Бонне Иончи Мияока опубликовал пять страниц вычислений, составлявших суть его доказательства. По прошествии нескольких дней математики обнаружили в работе противоречие, которое означало, что доказательство не состоялось.

Семь лет понадобилось Уайлсу, чтобы получить необходимые результаты. Сенсационное сообщение он решил сделать в Кембридже на симпозиуме по теории чисел в Институте сэра Исаака Ньютона. Уайлс получил право читать лекции, не объявляя заранее их содержание.

Официальное название лекций «Модулярные формы, эллиптические кривые и представления Галуа». Первые две из них подготавливали к атаке на гипотезу Таниямы – Шимуры. Слухи о том, что на последней, третьей лекции, 23 июня 1993 г., будет доказана Великая теорема Ферма, уже расползлись, поэтому аудитория была переполнена. Уайлс вспоминал, что к концу выступления многие принялись фотографировать его, и появился директор института с бутылкой шампанского в руках. Особая почтительная тишина наступила в аудитории, когда он окончил доклад и, повернувшись к доске, написал формулировку Великой теоремы Ферма.

В начале декабря 1993 г., за несколько дней до того, как рукопись Уайлса должна была пойти в печать, в его работе были обнаружены пробелы. В августе 1994 г. на очередном Международном конгрессе в Цюрихе Уайлс вынужден был сообщить, что пока не обладает полным доказательством, но уже в сентябре 1994 г. ликвидировал имеющиеся пробелы. На завершающем этапе ему помогал профессор Оксфордского университета Ричард Тейлор.

За восемь лет упорного труда Уайлс, по существу, свел воедино все достижения теории чисел XX в., выстроив из них одно мощное доказательство. Преследуя главную цель, Уайлс попутно получал важные результаты и использовал их в новых сочетаниях с традиционными методами. Таким образом, он способствовал появлению новых атак на другие проблемы. По словам Кена Рибета, доказательство Уайлса представляет собой идеальный синтез современной математики.

Однако Уайлс исследовал только ту часть гипотезы Таниямы – Шимуры, которая была необходима для доказательства теоремы Ферма. Полное исследование было проведено в 2000 г. коллективом зарубежных математиков, включая Тейлора. Следствием работы Уайлса явилось то, что теперь математики стали смелее браться за решение проблем, которые прежде казались неразрешимыми.

Доказательство Уайлса представляет исключительно благоприятный материал для изучения огромного пласта современной фундаментальной математики. Оно адаптируется, его фрагменты включаются в учебные пособия, становясь более доступными для многих математиков. Американский математик Серж Ленг, пропагандирующий результаты работы Уайлса, включил некоторые наиболее важные конструкции доказательства в третье издание своего университетского учебника «Алгебра».

В 1994 г. Уайлс стал профессором математики в Принстоне. Его статья «Модулярные эллиптические кривые и Последняя теорема Ферма» была опубликована в «Анналах Математики» летом 1995 г. После этого Уайлс начал получать награды за свою выдающуюся работу. Он стал лауреатом премии Шока по математике, которую присуждает Шведская королевская академия наук, и премии Ферма, учрежденной Университетом Поля Саббатье в Париже. В 1996 г. Уайлс был избран иностранным членом Национальной академии наук США и получил математическую премию этой Академии. Однако медаль Филдса ему так и не вручили,

поскольку на момент признания доказательства безошибочным Уайлсу уже было более 40 лет.

В 2000 г. Уайлс был награжден Орденом Британской империи и стал именоваться сэром. С тех пор он получил еще несколько международных премий, в том числе и премию Шоу в 2005 г.

Роберт Ленглендс

Ленглендс Роберт Фелан родился 6 октября 1936 г. в Нью-Вестминстере (Британская Колумбия, Канада). В Университете Британской Колумбии он получил степень бакалавра (1957) и магистра (1958). Для повышения квалификации поступил в Йельский университет и в 1960 г. получил степень доктора философии. Он преподавал математику в Принстонском университете с 1960 по 1967 г., а затем в Йельском университете (1967–1972). В 1972 г. он стал профессором Института перспективных исследований в Принстоне и работал там до пенсии в течение 35 лет, после чего ему было присвоено звание заслуженного профессора.

Гипотеза Таниямы – Шимуры поразила воображение Ленглендса. Он был уверен, что гипотеза верна и что два раздела математики – теория эллиптических функций и теория модулярных форм – на самом деле тесно взаимосвязаны. В 1960-х годах Ленглендс начал исследования в области теории представлений, адаптируя методы индийского математика Харишь-Чандры к теории автоморфных форм. Теория представлений исследует группы с помощью матриц или преобразований линейного пространства. Смысл использования представлений групп заключается в том, что задачи теории групп сводятся к более наглядным задачам линейной алгебры. Этим объясняется большая роль теории представлений в различных вопросах алгебры и других разделов математики. Затем Ленглендс исследовал ряды Эйзенштейна – специальные простые примеры модулярных форм, названных в честь немецкого математика Фердинанда Эйзенштейна.

Полученные в теории автоморфных форм результаты привели Ленглендса зимой 1966/1967 гг. к идее о возможности существования неизвестных еще связей между разделами математики. У него возник план построения математики будущего, в соответствии с которым все основные разделы математики должны быть взаимосвязаны. Свои идеи Ленглендс изложил в январе 1967 г. в письме, адресованном Андре Вейлю и получившем большую известность. Он выдвинул множество гипотез о существовании таких связей, приступил к их установлению сам и пытался привлечь других ученых к участию в доказательстве этих гипотез. План построения математики будущего стали называть программой Ленглендса. В узком смысле, программа Ленглендса относится, прежде всего, к установлению связей между теорией представлений алгебраических групп, теорией модулярных форм и теорией Галуа глобальных полей.

К 1970-м годам для некоторых ученых программа Ленглендса стала своего рода планом развития математики. Никаких путей, ведущих к цели, не было видно, но перспективы в случае удачи были заманчивыми. Любую неразрешимую проблему в одной области математики можно было бы трансформировать в аналогичную проблему в другой области, где для ее решения имелся бы целый новый арсенал методов. В случае неудачи проблема переносится в следующую область математики, и так далее – до тех пор, пока не будет решена.

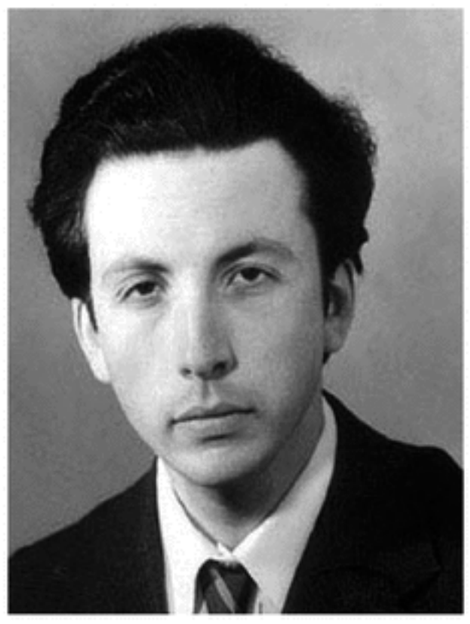
Через несколько лет поиски Ленглендса стали приносить первые результаты. Другие гипотезы о связях разных разделов математики были гораздо слабее и рискованнее, чем гипотеза Таниямы–Шимуры, но все они сплетались в одну тонкую сеть. В 1979 г. Ленглендсу удалось доказать теорему, соединяющую теорию чисел и теорию групп. После успеха, достигнутого Уайлсом в доказательстве гипотезы Таниямы – Шимуры, когда был построен «мост» между теорией эллиптических функций и модулярными формами, появилась надежда, что таких «мостов» может быть построено много.

В 1980 г. Ленглендс стал лауреатом премии Стила, а в 1981 г. его избрали членом Лондонского Королевского общества. В марте 1996 г. Ленглендсу и Уайлсу была присуждена премия Вольфа. В 2005 г. он стал лауреатом премии Стила, в 2006 г. – премии Неммерса, а в 2007 г. – премии Шоу. Эти награды подтверждают значимость программы Ленгдендса.

В реализации программы Ленглендса, рассчитанной на много поколений математиков, к 2010 г. значительных успехов добились французский математик Жерар Лаумон, лауреаты медали Филдса Лоран Лаффорг, Владимир Дринфельд, Андрей Окуньков, Бао Чау Нго.

Актуальность программы Ленгленлса, направленной на объединение алгебры, геометрии и теории чисел, возрастает. В реализации этой программы участвуют специалисты во всем мире, и от ее выполнения зависит не только дальнейшее развитие математики. Успех программы Ленглендса может оказать большое влияние на развитие естествознания, прикладных наук и тех разделов техники, где для решения проблем требуются громоздкие математические расчеты. В некоторых разделах физики и техники сложность вычислений столь высока, что служит серьезнейшим препятствием на пути к прогрессу. Если математики смогут доказать гипотезы Ленглендса, то будут получены ответы на абстрактные математические вопросы и решены многие практические задачи.

В.Г. Дринфельд



Дринфельд Владимир Гершонович родился в 1954 г. в Харькове в семье профессора математики Харьковского университета. В 1969 г. он стал абсолютным победителем Международной математической олимпиады школьников в Бухаресте и поступил на первый курс механико-математического факультета Московского государственного университета. В 1974 г. после окончания университета он стал аспирантом Ю.И. Манина.

В 1977 г. Дринфельд окончил аспирантуру и через год в МГУ защитил кандидатскую диссертацию. В 1978 г. он стал преподавателем математики Башкирского университета в Уфе. С 1981 г. он работает в Физико-техническом институте низких температур НАН Украины в Харькове. В 1988 г. защитил докторскую диссертацию в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР.

Основные научные труды Дринфельда относятся к исследованиям по программе Ленглендса в области алгебраической геометрии, теории чисел, теоретической физики. Медаль Филдса Дринфельд получил в 1990 г. на Международном математическом конгрессе в Киото за исследования в некоммутативной теории полей классов – центральной теме современной алгебраической теории чисел. Эта теория является естественным обобщением классической теории полей классов – теории абелевых расширений глобальных и локальных полей. Он получил фундаментальные результаты в теории модулей Дринфельда и F-пучков – новых понятий, разработанных им для доказательства гипотез Ленглендса и широко используемых в теории алгебраических поверхностей. Модули Дринфельда были впервые рассмотрены в 1973 г., а F-пучки являются их обобщением.

С 1990 г. Дринфельд работает с геометрическими ленглендсовскими программами. Основные его достижения после получения медали Филдса связаны с доказательством гипотез Ленглендса и теорией квантовых групп.

Используя методы алгебраической геометрии, Дринфельд исследует инстантоны. Инстантон – это локализованное во времени (в отличие от солитона, локализованного в пространстве) решение нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными движения, сформулированного во мнимом времени. Он является особым видом колебаний вакуума, при котором спонтанно вспыхивает и гаснет сильное глюонное поле.

Дринфельд разрабатывает алгебро-геометрическую классификацию инстантонов, используемых в конформной теории поля. Наиболее известны его работы по исследованию квантовых групп. При интегрировании модельных уравнений квантовой теории поля и статистической физики Дринфельд обнаружил тесную связь R-матричных уравнений и квантовых групп.

В 1992 г. Дринфельда избрали членом-корреспондентом Академии наук Украины. В Харькове он жил до 1998 г., затем уехал в США и был назначен профессором Чикагского университета. В 2008 г. Дринфельд был избран членом Американской академии искусств и наук.

Лоран Лаффорг

Французский математик Лаффорг Лоран родился 6 ноября 1966 г. на окраине Парижа в семье инженеров. В детстве он увлекался литературой.

В 1984 г. Лоран стал бакалавром и получил серебряную медаль на Международной математической олимпиаде. Этот успех он повторил в следующем году. В 1984–1986 гг. он в лицее Луи-ле-Гран в Париже готовился к поступлению в университет. Лаффорг поступил в Высшую нормальную школу в Париже в 1986 г. и после завершения образования стал научным сотрудником в Национальном центре научных исследований. Отслужив в армии в 1991–1992 гг., он вернулся к научной работе. Диссертация по теории чисел и алгебраической геометрии защищена им в 1994 г. под руководством Жерара Лаумона.

Основным направлением научных исследований Лаффорга является выполнение программы Ленглендса. Лаффорг искал связь между теорией чисел, теорией представлений групп и анализом. Его работы обобщают и развивают исследования Дринфельда. Результат, полученный Дринфельдом для случая двух переменных, Лаффорг обобщил для любого числа переменных. В результате шести лет непрерывного труда им был разработан новый геометрический метод исследования, который может быть применен для решения других проблем. В 1998 г. Лаффорг выступил с докладом о своих результатах на пленарном заседании Международного математического конгресса в Берлине. Их значимость была отмечена в 2000 г. премией Клэя, в 2001 г. – премией Французской академии наук.

В 2002 г. Лаффорг за исследования по программе Ленглендса был награжден медалью Филдса на Международном математическом конгрессе в Пекине, в 2003 г. – орденом Почетного легиона и избран во Французскую академию наук. В 2004 г. Нго Бао Чау, ставшего лауреатом медали Филдса в 2010 г., пригласили в Париж в несколько университетов. Он выбрал Парижский университет в Орсэ, чтобы работать вместе с Лораном Лаффоргом.

С 2004 г. Лаффорг активно занялся проблемами образования в целом и математического образования в частности. Указом президента Франции Жака Ширака Лаффорг был введен в Верховный комитет по образованию. В соавторстве с Аленом Конном и другими учеными он изложил свои взгляды на преподавание математики и французского языка в начальной школе. Он выступил с резкой критикой политики правительства по вопросам образования, и его попросили подать в отставку и выйти из комитета. Это вызвало большой резонанс в обществе. По мнению Лаффорга, политика правительства Франции ведет к резкому снижению уровня образования.

Два брата Лаффорга также окончили Высшую нормальную школу в Париже и также являются профессиональными математиками. Лоран Лаффорг является директором Национального центра научных исследований (GNRS) и профессором Института высших исследований в Бюр-сюр-Иветт.

А.Ю. Окуньков

Окуньков Андрей Юрьевич родился в 1969 г. в Москве. В отличие от многих лауреатов медали Филдса, А.Ю. Окуньков не был вундеркиндом. На механико-математический факультет МГУ он поступил после службы в армии, и по уровню знаний отставал от выпускников элитных математических школ. Свое отставание Андрей Юрьевич быстро ликвидировал, успешно окончил университет и поступил в аспирантуру. Кандидатскую диссертацию он защитил в 1995 г.

Как многие талантливые российские математики в 1990-х годах Окуньков оказался в США, где сначала работал ассистент-профессором (доцентом) в Калифорнийском университете в Беркли, а с 2002 г. – профессором Принстонского университета.

Научные интересы Окунькова относятся к различным разделам математики. Согласно официальной формулировке Международного математического союза, Окуньков получил в 2006 г. на Международном математическом конгрессе в Мадриде медаль Филдса «за вклад, устанавливающий связи между теорией вероятностей, теорией представлений и алгебраической геометрией». Это свидетельствует о том, что Филдсовский комитет принял во внимание не одну, а несколько его работ. Наибольшие его успехи связаны с теорией представлений групп и ее приложениями в других разделах математики.

Одним из наиболее важных результатов Окунькова является вклад в теорию спектров случайных матриц. Эта теория возникла при решении конкретной задачи математической физики по описанию спектров энергетических уровней тяжелых ядер. Окуньков заметил, что собственные значения случайной матрицы большого порядка при их выписывании в порядке убывания имеют такую же статистику, как длины возрастающих подпоследовательностей в случайной перестановке чисел от 1 до N. Связи случайных матриц со случайными перестановками позволяют геометризовать решаемую задачу.

Другие исследования Окунькова, проведенные в соавторстве с Ричардом Кенионом, связаны с геометрией трехмерных диаграмм Юнга – фигур, составленных из кубиков, заполняющих трехгранный угол. Для получения результатов, лежащих на стыке математической физики и теории представлений, Окуньков использовал и теорию вероятностей, и современную комбинаторику.

Больших успехов добился Окуньков в исследованиях по статистической физике. Он изучал формы поверхностей кристаллов. С помощью алгебраической геометрии ему удалось обнаружить наличие плоских участков границы и вычислить их количество.

В последние годы Окуньков занимается теорией струн – самой модной областью теоретической физики. Он сотрудничает с Р. Пандарипанда (Принстон) и Н. Некрасовым (Институт высших научных исследований, Париж). Выполненный ими в соавторстве цикл работ относится к передовым достижениям в этой области.

В 2004 г. Андрей Юрьевич был удостоен престижной премии Европейского математического общества.

Бао Чау Нго

Вьетнамский математик Нго Бао Чау родился 28 июня 1972 г. в Ханое. Его отец – профессор физики Национального института механики, мать – врач. В 15 лет он был принят в специализированный математический класс Вьетнамского национального университета. Он принимал участие в 29-й (Канберра, Австралия, 1988) и 30-й (Брауншвейг, Германия, 1989) Международных математических олимпиадах и был первым вьетнамцем – победителем олимпиад. Нго Бао Чау учился в Будапеште. После падения Берлинской стены в 1989 г. правительство Венгрии перестало выдавать стипендии вьетнамским студентам, и Нго, получивший стипендию французского правительства, переехал в Париж. Он учился сначала в Парижском университете VI, а затем в Высшей нормальной школе. Ученую степень он получил в 1997 г. в Парижском университете в Орсэ.

Научные интересы Нго составляют исследования по программе Ленглендса. В 2004 г. Нго и его научный руководитель Жерар Лаумон получили премию Клэя, присуждаемую за достижения в реализации программы Ленглендса. Они в форме предварительной публикации представили на 100 страницах в Интернете доказательство основной леммы для унитарных групп. Эта лемма 30 лет занимала умы многих математиков, так как лежала в основе многих теорем, хотя была еще не доказана. Если бы она оказалась неверной, то доказательства этих теорем были бы бесполезны.

В 2005 г. Нго стал профессором Парижского университета в Орсэ и профессором Института математики в Ханое, самым молодым профессором во Вьетнаме. В 2008 г. Нго представил дополнительные материалы по основной лемме, использующие новые, разработанные им, методы алгебраической геометрии. Этот результат не менее важен, чем материалы 2004 г. После рецензирования эта работа вошла в десятку лучших научных открытий 2009 г. Достижения Нго были отмечены медалью Филдса на Международном математическом конгрессе 2010 г. в Хайдарабаде. Согласно формулировке Филдсовского комитета, награда вручена «за доказательство основной леммы в теории автоморфных форм за счет внедрения новых алгебро-геометрических методов». Кроме того, Нго Бао Чау выступил с докладом о своих достижениях на пленарном заседании Конгресса.

Результаты Нго получены введением в рассмотрение новых геометрических идей, устанавливают связь между алгебраической геометрией, теорией групп и автоморфными формами и являются значительным вкладом в выполнение программы Ленглендса. Они могут использоваться в физике высоких энергий, информатике и криптографии.

Чау имеет вьетнамское и французское гражданство. В 2007 г. он получил премию «Обервольфах» для молодых европейских математиков и премию Софи Жермен, а в 2008 г. – премию Французской академии наук. В 2008 г. Чау был принят на должность профессора Института перспективных исследований в Принстоне. С сентября 2010 г. Чау является профессором Чикагского университета.

Часть V

РАЗВИТИЕ НОВЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ ПОСЛЕ ВТОРОЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ

Математические таланты бывают очень разные – геометрически-интуитивные и алгебраически-вычислительные, логически-дедуктивные и индуктивно-естествоиспытательные. И все нужны.

В.И. Арнольд

В XX в. представления людей об окружающем мире значительно расширились. Были подвергнуты сомнению многие основополагающие философские концепции. Если раньше считалось, что мир полностью предсказуем, то в XX в. более распространенной стала точка зрения о господстве хаоса во Вселенной.

После выхода в свет работы А.Н. Колмогорова, в которой было введено понятие энтропии динамической системы и представлено новое осмысление явления детерминированного хаоса, связи между неустойчивостью динамики и стохастическими свойствами соответствующих динамических систем. Позже были раскрыты и другие грани непредсказуемого, связанные с динамическими системами. Например, установлено, что такие системы могут создавать узоры необыкновенной красоты, названные фракталами. Вскоре появилась фрактальная геометрия, которая изучает математические объекты, считающиеся хаотическими, с точки зрения евклидовой геометрии.

Ученые также подвергли сомнению идею «безграничных возможностей человека». В 1940-е годы А. Тьюрингом и Н. Винером была продекларирована идея моделирования человеческого сознания. И вот уже машина выигрывает в шахматы у чемпиона мира. С помощью электронной техники решают не только вычислительные задачи, но и доказывают математические теоремы. Создание электронных вычислительных машин и интенсивное развитие привели кибернетику к триумфу в начале второй половины XX в. В настоящее время термин «кибернетика» практически не используется в науке. Его заменил термин «информатика», под которым понимают науку о способах получения, накопления, хранения, преобразования, передачи и использования информации.

В годы Второй мировой войны оформился метод исследования операций – научный метод выработки математических количественно обоснованных решений во всех областях целенапрвленной деятельности. В современном научном знании чаще используют термин «теория оптимального управления». Задачей этой теории является проектирование системы, обеспечивающей для заданного объекта управления или процесса закон управления или управляющую последовательность воздействий, в свою очередь, обеспечивающих максимум или минимум заданной совокупности критериев

качества системы. Наиболее широко при проектировании систем управления применяются методы вариационного исчисления, принцип максимума Понтрягина и динамическое программирование.

Через три с половиной века после возникновения математического анализа впервые предприняты попытки возвращения (на новом уровне) к его первоистокам и предложены нестандартные методы формирования основных идей.

Созданный в 1960-е годы нестандартный анализ не дает такой «экономии мышления», какую дало в свое время дифференциальное и интегральное исчисление, однако и та «экономия», которую он дает, может оказаться существенной при решении сложных задач теории сингулярных возмущений нелинейных уравнений, а также в других задачах.

Глава 24

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ, КИБЕРНЕТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Я дух механики. Я вещества
Во тьме блюду слепые равновесья.
Я полюс сфер – небес и поднебесья.
Я гений числ. Я счетчик. Я глава.
Мне важны формулы, а не слова.

М. Волошин

Из предыстории вычислительной техники

Попытки создания общего метода, позволяющего автоматически вывести заключение из исходных высказываний, предпринимались учеными со времен Аристотеля. Выдающийся математик и философ Готфрид Лейбниц пытался найти универсальный язык, позволяющий вывести единый для всех наук метод познания мира. Он считал, что в таком языке логические рассуждения можно заменять вычислениями, проводимыми над словами-символами. Хотя поиски такого языка оказались неудачными, Лейбниц в попытках найти его изобрел символическую логику.

Проект первой универсальной программируемой вычислительной машины разработал профессор кафедры математики Кембриджского университета англичанин Чарльз Бэббидж. В 1822 г. он построил машину, названную им «разностной», и приступил к созданию большой разностной машины, предназначенной для расчета навигационных и астрономических таблиц. Однако данная работа по разным причинам не была завершена, и Бэббидж начал разрабатывать проект первой универсальной программируемой вычислительной машины, названной им «аналитической». Она должна была автоматически решать все вычислительные задачи, с которыми сталкивались инженеры и математики.

Этот проект, разработанный детально, настолько опередил свое время, что на практике не оказалось средств для его реализации. Предвосхищая архитектуру современных компьютеров, проект содержал все их основные структурные компоненты, т. е. имел следующие устройства: ввода начальной информации, запоминающее, арифметическое, управления, вывода обработанной информации. Но эта машина была механической, приводимая в действие паровым двигателем. Работать она должна была на перфокартах. Бэббидж придумал команду, которую теперь называют командой условного перехода (ветвления), позволяющую автоматически определять дальнейшую последовательность операций в зависимости от результата, полученного на

определенном этапе работы. Машина должна была производить вычисления с точностью до двадцатого знака. В 1823 г. была выплачена первая субсидия на постройку этого первого компьютера. Строительство продолжалось десять лет, конструкция машины все более усложнялась. Необходимо было появление нового направления в науке – программирования. Это направление было создано Адой Лавлейс.

Составленные Адой Лавлейс комментарии к описанию машины Бэббиджа, по сути, являются первой в истории программой универсальных вычислительных машин.

В материалах Бэббиджа и комментариях Ады Лавлейс намечены такие понятия, как подпрограмма и библиотека подпрограмм, модификация команд и индексный регистр, которые вошли в обиход только в 1950-е годы. Термин «библиотека» был введен Бэббиджем, а термины «рабочая ячейка» и «цикл» предложила Ада Лавлейс. Ее работы в этой области были опубликованы в 1843 г. Однако в середине XIX в. считалось неприличным для женщины издавать свои сочинения под полным именем, и Лавлейс поставила на титуле только свои инициалы. Поэтому ее математические труды, как и работы многих других женщин-ученых, считали принадлежащими неизвестному автору.

Технологии меняются, однако нередко идеи, возникшие давно, остаются по-прежнему актуальными. Как ни удивительно, первая компьютерная программа написана более полутора веков назад, когда не существовало даже слова «компьютер». Еще удивительнее, что первым программистом стала женщина.

Теория алгоритмов

Алгоритмом называют систему правил, сформулированную на понятном исполнителю языке, определяющую процесс перехода от допустимых исходных данных к некоторому результату и обладающую свойствами массовости, конечности, определенности, детерминированности.

Слово «алгоритм» происходит от имени великого среднеазиатского ученого VIII–IX вв. Аль-Хорезми (Хорезм – историческая область на территории современного Узбекистана). В 1684 г. Готфрид Лейбниц впервые использовал слово «алгоритм» в значении систематического способа решения проблем дифференциального исчисления. Пользовался этим термином и Леонард Эйлер, одна из работ которого называется «Использование нового алгоритма для решения проблемы Пелля». Понимание Эйлером алгоритма как синонима способа решения задачи уже близко к современному.

В начале XX в. слово «алгоритм» означало для математиков любой арифметический или алгебраический процесс, выполняемый по строго определенным правилам. Впервые алгоритм в качестве самостоятельного понятия встречается лишь в 1912 г. в трудах великого французского математика Эмиля Бореля. В 1920-х годах задача точного определения понятия алгоритма стала одной из центральных проблем математики. В то время существовало две точки зрения на математические проблемы: 1) все проблемы алгоритмичес-

ки разрешимы, но для некоторых алгоритм еще не найден, поскольку еще не развиты соответствующие разделы математики; 2) есть проблемы, для которых алгоритм вообще не может существовать.

Идея о существовании алгоритмически неразрешимых проблем оказалась верной, но для того, чтобы ее обосновать, необходимо было дать точное определение алгоритма. Попытки выработать такое определение привели к возникновению теории алгоритмов, основоположниками которой являются многие известные математики – К. Гёдель, А. Чёрч, С. Клини, А. Тьюринг, Э. Пост, А.А. Марков-мл., А.Н. Колмогоров и другие.

Проблема нахождения единообразной формы записи алгоритмов, решающих различные задачи, является одной из основных в теории алгоритмов. Предполагается, что каждый шаг алгоритма таков, что его может выполнить достаточно простое устройство (машина). Желательно, чтобы это устройство было универсальным, т. е. чтобы на нем можно было выполнить любой алгоритм. Механизм работы машины должен быть максимально простым по логической структуре, но настолько точным, чтобы эта структура могла служить предметом математического исследования. Впервые проблема единообразной формы записи алгоритмов была решена американским математиком Эмилем Постом и практически одновременно английским математиком Аланом Тьюрингом.

В 1935 г. Пост опубликовал в «Журнале символической логики» статью «Финитные комбинаторные процессы, формулировка 1». В этой статье и одновременно в статье Тьюринга «О вычислимых числах с приложением к проблеме решения», опубликованной в «Трудах Лондонского математического общества» были даны первые уточнения понятия «алгоритм». Постом был предложен простейший способ преобразования информации и доказано, что он обладает алгоритмической полнотой. В 1967 г. профессор В.А. Успенский интерпретировал эти статьи по-новому и ввел термин «машина Поста», которая представляет собой абстрактную машину, созданную для уточнения понятия «алгоритм».

В 1936 г. независимо друг от друга Алонзо Чёрч и Алан Тьюринг предложили математические уточнения понятия алгоритма, на основе которых были рассмотрены примеры массовых проблем, неразрешимых алгоритмически, в том числе и знаменитая «проблема разрешения», считавшаяся главной проблемой математической логики. Машина Поста отличается от машины Тьюринга большей простотой, однако обе они эквивалентны и созданы для решения одной и той же задачи.

В 1936–1939 гг. Тьюринг, Пост, Чёрч в своих исследованиях определили центральное понятие теории алгоритмов – понятие вычислимой функции – а через него и понятие разрешимого множества и перечислимого пространства. Различные уточнения понятия алгоритма приводят к соответствующим уточнениям понятия вычислимой функции. Все они эквивалентны между собой, а в случае, когда аргументы и значения вычислимой функции являются натуральными числами, эквивалентны понятию рекурсивной функции. Общепринятой является гипотеза о том, что всякая числовая вычислимая функция есть рекурсивная функция.

К концу 1930-х годов был сформулирован и общепризнан тезис Чёрча: класс вычислимых функций в точности охватывает все те арифметические функции, которые в интуитивном смысле эффективно вычислимы.

Появление электронных вычислительных машин с программным управлением обусловило возникновение нового прикладного раздела современной теории алгоритмов – программирования. Программа для компьютера есть не что иное, как запись какого-либо алгоритма на языке программирования. Программирование оформилось в науку, изучающую решения задач самого различного характера, в частности, средства общения человека с вычислительными машинами, сфера применения которых с каждым днем расширяется и охватывает все новые и новые области деятельности.

Понятия «алгоритм» и «программа» принадлежат к фундаментальным понятиям современной математики. Они не определяются через более простые понятия, а описываются с помощью примеров. Под программой, так же как и под алгоритмом, понимают точное предписание о выделении в определенной последовательности некоторых правил для решения всех задач данного класса. Это нестрогое математическое определение, так как в нем не уточнен смысл таких понятий, как «точное предписание», «правила», «задачи данного класса». Тем не менее такое толкование термина «программа» длительное время считалось удовлетворительным. Впоследствии потребовалось уточнение этих общих понятий и более глубокое их изучение в связи с развитием вычислительной техники и использованием математической логики в вопросах обоснования математики.

Ученые, основываясь на разных способах формализации задач и их решений, выработали несколько определений понятия алгоритма: рекурсивные функции, финитные комбинаторные процессы Поста, машины Тьюринга, нормальные алгорифмы Маркова-мл., алгоритмическая система Колмогорова – Успенского и др. Впоследствии выяснилось, что все эти уточнения равнозначны.

Появление первых проектов вычислительных машин стимулировало исследование возможностей практического применения алгоритмов, использование которых ввиду их трудоемкости было ранее недоступно. Дальнейший процесс развития вычислительной техники определил развитие теоретических и прикладных аспектов изучения алгоритмов.

Слово «алгоритм» стали употреблять для обозначения совокупности действий, составляющих некоторый процесс. В наши дни оно известно каждому и настолько вошло в обиходную, что нередко на страницах газет, в выступлениях политиков встречаются выражения «алгоритм поведения», «алгоритм успеха» и т. д.

Абстрактные алгоритмические системы были детально исследованы российскими и зарубежными учеными.

В годы Великой Отечественной войны российские математики занимались в основном решением оборонных проблем. Только в послевоенное время начались исследования по проблемам теории алгоритмов и рекурсивных функций, и произошло размежевание интересов математиков, занимавшихся проблемами обоснования. Проблемы, возникшие в теории алгоритмов, оказались сходны с проблемами, которые ранее были рассмотрены в дескриптивной

теории множеств. Поэтому после исследований московской школы теории функций Лузина появились предпосылки для творческого развития теории алгоритмов. Ее развивали в Москве под руководством П.С. Новикова и А.Н. Колмогорова и Ленинграде под руководством А.А. Маркова-мл. Образовались коллективы московской и ленинградской школ алгоритмов.

Разница заключалась в том, что в Ленинграде внедрялись исключительно методы конструктивной математики, основанные на конструктивной логике, а в Москве, где сильны традиции лузинской школы, допускались любые теоретико-множественные методы. Различия наблюдались в оценках постановок задач и результатов и даже в терминологии: в Москве разрабатывали теорию алгоритмов, а в Ленинграде – теорию алгорифмов.

После переезда в 1957 г. А.А. Маркова-мл. в Москву исследованиями в Ленинграде руководил Н.А. Шанин, ревностно оберегавший марковские традиции конструктивизма.

Отличительная черта того конструктивного направления, основоположником которого в нашей стране является А.А. Марков-мл., – последовательность в проведении программы исключения из математики актуальной бесконечности и неконструктивных приемов рассуждения. На основании анализа средств конструктивного доказательства Марков-мл. пришел к выводу, что для получения конструктивно-содержательных математических результатов необходимо постулировать следующий принцип («ленинградский принцип»): если имеется алгоритм, выясняющий для каждого натурального числа n, обладает ли n свойством C, и если опровергнуто предположение о несуществовании натурального числа со свойством C, то существует натуральное число со свойством C.

Первые публикации по теории алгоритмов (1947) в СССР принадлежат А.А. Маркову-мл., установившему алгоритмическую неразрешимость ряда проблем алгебры. Ему и американскому математику Э. Посту, получившему аналогичные результаты независимо от Маркова-мл., принадлежит приоритет в применении теории алгоритмов к решению проблем, возникших в традиционных разделах математики.

В работах «Теория автоматов и формальные образования микропрограмм» (1965) и «К вопросу о минимизации микропрограмм и схем алгоритмов» (1966) В.М. Глушковым предложен формальный аппарат, являющийся абстрактным выражением существенных связей теории алгоритмов, теории автоматов и современной абстрактной алгебры.

Кибернетика

Кибернетика является междисциплинарной наукой. Она возникла на стыке математики, логики, семиотики, физиологии, биологии, социологии и других наук. Кибернетика анализирует и выявляет общие принципы в процессе научного познания. Развитие кибернетики было предопределено развитием технических средств управления и преобразования информации.

В XIX столетии, веке пара и электричества, начали разрабатывать автоматические регуляторы, программно управляемые устройства. Наряду

с механическими блоками, в них постепенно стали применять электромеханические блоки. Важную роль в развитии теории и практики автоматического регулирования в начале XX в. сыграло изобретение дифференциальных анализаторов, способных моделировать и решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это способствовало быстрому развитию аналоговых вычислительных машин и их широкому практическому применению.

В 30-е годы XX в. влияние на становление кибернетики оказало развитие теории дискретных преобразователей информации. Два основных источника идей и проблем направляли развитие этой теории: построение оснований математики и совершенствование реальных дискретных преобразователей информации. Курт Гёдель в 1934 г. показал ограниченность возможностей замкнутых познающих систем. Для нужд автоматических телефонных станций создавались сложные релейно-контактные устройства. В 1938 г. Клод Шеннон показал возможность использования для синтеза и анализа релейно-контактных схем аппарата математической логики. Тем самым было положено начало современной теории автоматов.

Концепция кибернетики родилась из идеи синтеза многих научных направлений. В ее основе лежит единый подход к описанию и анализу действий живых организмов и вычислительных машин или иных автоматов, устанавливающая аналогию между поведением сообществ живых организмов и человеческого общества, дает возможность их описания методами общей теории управления. С точки зрения математики, кибернетика является синтезом теории передачи информации и статистической физики, что дает возможность связать энтропию системы с количеством информации в ней.

На становление кибернетики заметное влияние оказало появление электронных вычислительных машин (ЭВМ). Решающий шаг по объединению накопленных знаний и созданию новой науки был сделан Норбертом Винером, опубликовавшим в 1948 г. книгу «Кибернетика». Развитие кибернетики в теоретических и практических аспектах связано с прогрессом электронной вычислительной техники. В СССР кибернетика была объявлена лженаукой, что привело к отставанию нашей страны в вычислительной технике и смежных областях.

К началу 70-х годов XX в. кибернетика оформилась как самостоятельная наука. Предметом ее исследования стали кибернетические системы, представляющие собой абстракцию сложных систем, которые изучают естественные, технические и социальные науки. К кибернетическим системам могут быть отнесены логические сети и сети абстрактных автоматов, механические динамические системы, различного рода электромеханические и электронные устройства (включая ЭВМ), биологические организмы и их подсистемы (например, нервная система), экологические, экономические и социальные системы. Применение математических и кибернетических методов в языкознании привело к возникновению математической лингвистики, имеющей непосредственное отношение к языковым проблемам искусственного интеллекта.

Общие аспекты различных по своей природе систем кибернетика изучает с помощью метода машинного эксперимента, который сочетает в себе

элементы классического дедуктивного и экспериментального методов. Кибернетический аспект рассмотрения систем является информационным аспектом. Вследствие этого кибернетика может быть использована другими науками как аппарат исследования так же, как используют математику. Спектр проблем, доступных исследованию кибернетическими методами, гораздо шире, чем спектр проблем, доступных исследованию аналитическими математическими методами.

Для кибернетических систем важное значение имеют задачи их анализа и синтеза. Задача анализа системы состоит в нахождении различного рода свойств задаваемого системой преобразования информации. Задача синтеза системы противоположна задаче анализа: необходимо по описанию, осуществляемого системой преобразования, построить систему, фактически выполняющую это преобразование. При этом должен быть предварительно определен класс элементов, из которых будет строиться система.

Важное место в теории кибернетических систем занимают задачи обеспечения надежности их функционирования. Основное внимание уделяется не столько повышению надежности элементов системы, сколько вопросам организации самой системы таким образом, чтобы можно было построить надежную систему из ненадежных элементов.

Для достаточно простых систем большая часть перечисленных задач может быть решена в рамках классической математики, путем тривиального перебора вариантов. Для сложных систем, с которыми приходится иметь дело на практике, такой подход не дает удовлетворительного результата. Сложность систем определяется не только количеством элементов и связей между ними, но принципиально более сложными способами их взаимодействия, большим разнообразием и нерегулярностью связей между элементами, что не допускает простого описания. Эффективное исследование таких систем классическими дедуктивными методами оказывается практически невозможным. Классический экспериментальный метод исследования также может быть применен лишь в некоторых случаях.

В качестве основного метода исследования систем кибернетика использует метод машинного эксперимента, преобразовавшийся в универсальный метод научного познания в результате появления быстродействующих универсальных ЭВМ. Метод машинного эксперимента основан на использовании имитационных моделей. Такие модели по существу являются простым переложением на машинный язык описаний моделируемых систем.

При проведении машинного эксперимента во многих системах имитационное моделирование дополняется возможностями использования аналитического аппарата таких разделов математики, как теория массового обслуживания. Широко используются современные вычислительные, в основном, оптимизационные методы: линейное программирование, динамическое программирование, градиентные методы, стохастическое программирование.

Взаимоотношения кибернетики и математики не ограничиваются одним лишь использованием математических методов в кибернетике. Эти науки имеют общие объекты исследования, например, алгоритмы. Это при-

водит к необходимости разработки проблемно ориентированных алгоритмических языков.

Особый интерес, с точки зрения взаимоотношения кибернетики и математики, представляют их подходы к аппарату классической математической логики. Автоматизация дедуктивных построений представляет собой одну из наиболее важных частей раздела кибернетики, получившего наименование «искусственный интеллект». Человеческий интеллект – одна из наиболее интересных и сложных кибернетических систем. Вопрос о том, как человек мыслит, был и продолжает оставаться одним из самых увлекательных научных вопросов. В отличие от математики, для кибернетики характерен конструктивный подход к изучаемым объектам, т. е. возможность фактического вычисления с определенной степенью точности значений всех рассматриваемых функций.

На какую же операцию больше всего времени расходуют ЭВМ? Около 20 % приходится на решение научных задач. Еще больше тратится на разного рода упорядочивания! Растет объем вычислений, связанных с обработкой сигналов, изображений и символов. Наибольшая часть вычислительных мощностей расходуется на организацию информационных массивов и поиск данных, относящихся к деловой активности. Вычисления такого характера представляют собой предмет вычислительной математики и кибернетики. К основным проблемам процессов вычисления относят проблемы, в разрешении которых математика могла бы играть еще более значительную роль – алгоритмическая сложность, моделирование операционных систем и структурирование данных.

Каковы пределы возможностей обработки информации с помощью электронных устройств? Опираясь на физические соображения, Ландор, Марков-мл. и другие исследователи, заметив, что количество энергии, необходимое для перехода из одного состояния в другое, равно $kT\ln 2$, установили, что всей массе Вселенной соответствует информация порядка 10^{93} бит. Максимальная скорость, с которой эта информация могла бы обрабатываться, составляет, как показал Бремерманн, около 10^{47} бит/(с·г). Очевидно, что эти числа определяют предел потребностей в области вычислительных ресурсов.

В последнее время интенсивно развивается информатика. Эта наука, объектом изучения которой являются технологии (технологические процессы сбора, хранения и преобразования информации) и проблемы их встраивания в социальную среду. Информатика связана с философией через учение об информации как общенаучной категории и теорию познания; с математикой – через понятие математической модели, математическую логику и теорию алгоритмов; с лингвистикой – через учение о формальном языке и о знаковых системах. Термин «кибернетика» употребляется все реже, вместо него чаще стали говорить «информатика».

За выдающиеся достижения в области информатики и кибернетики на международных математических конгрессах награждают медалью Неванлинны.

Математика и вычислительная техника

Более полувека назад кибернетику, победно шествовавшую по миру, в Советском Союзе перестали считать лженаукой. Математики, инженеры, медики, биологи, лингвисты, экономисты были охвачены идеей внедрения вычислительной техники в науку и быт. Ученые предполагали, что машины научатся «мыслить», сочинять музыку, заменят переводчиков.

Многие прогнозы оправдались: школьники разучились складывать и перемножать числа «в столбик», а с помощью электронной техники сегодня решают сложнейшие вычислительные задачи.

Компьютерная алгебра позволяет быстро производить безнадежно долгие в иных случаях вычисления, необходимые во многих областях знания. Статистическая физика, изучающая динамику поведения макросистем, состоящих из огромного набора хаотически движущихся частиц, не могла бы достичь современного уровня развития без возможности проведения колоссального количества числовых экспериментов. Создание компьютеров сделало возможным современное развитие качественной теории сложных нелинейных систем, создание фрактальной геометрии, лучшее понимание соотношения гармонии и хаоса в природе.

Компьютеры вторглись во все сферы человеческой деятельности, в том числе и в науку. Предложенная в 1852 г. студентом Френсисом Гатри задача о возможности раскрашивания любой географической карты на сфере четырьмя красками была в 1976 г. решена К. Аппелем и В. Хакеном с помощью компьютера. У многих математиков возникло сомнение в том, насколько можно доверять подобным доказательствам, ведь их нельзя полностью проверить «вручную». Хотя впоследствии были предложены более компактные алгоритмы и скорректирован ряд ошибок, алгоритм первых доказательств занимал 741 страницу. Долгое время велись оживленные дискуссии о возможности формального доказательства корректности работы компьютерных программ и тем самым внесения ясности в процедуру экспертизы доказательств с использованием компьютеров. Никакой ясности в проблему внести не удалось. Программы писались без учета возможной необходимости в экспертной оценке их формальной математической корректности. Это недостаток любых попыток использования численных методов и компьютерного моделирования в математических доказательствах.

Тем не менее в последние десятилетия появляется все больше теорем, доказательства которых не подвластно человеческому разуму, если не прибегнуть к помощи компьютера. В 1998 г. американский математик Томас Хейлс представил решение задачи Кеплера о наиболее плотной упаковке шаров, которое наряду с геометрическими рассуждениями включало результаты обширных компьютерных расчетов. Группа из 20 экспертов, начавшая анализировать доказательство, окончательно распалась в 2004 г., так и не придя к окончательному выводу о правильности доказательства.

Ада Лавлейс

Английский математик Августа Ада Кинг (урожденная Байрон), графиня Лавлейс, родилась 10 декабря 1815 г. в Лондоне. Она – единственный законнорожденный ребенок английского поэта Джорджа Гордона Байрона и Анны Изабеллы (Анабеллы) Байрон. Анна Изабелла Байрон за свое увлечение математикой получила от мужа прозвище Королевы параллелограммов. В единственный и последний раз Байрон видел свою дочь через месяц после рождения. 21 апреля 1816 г. он подписал официальный развод и навсегда покинул Англию.

Девочка получила первое имя Огаста (Августа) в честь сводной сестры Байрона, с которой у него, по слухам, был роман. После развода ее мать и родители матери никогда не называли ее этим именем, а называли Адой. Более того, из семейной библиотеки были изъяты все книги ее отца.

В раннем детстве Ада заболела корью. Лечить этот тяжелый недуг в начале XIX в. еще не умели, девушка стала инвалидом и провела в постели целых три года. Мать Ады пригласила для обучения дочери своего бывшего учителя – шотландского математика и логика Огастеса де Моргана и самых лучших преподавателей Лондона. В 1933 г. 18-летняя Ада познакомилась с Чарльзом Бэббиджем и заинтересовалась его проектом.

В 1835 г. Ада вышла замуж за 29-летнего Уильяма Кинга, 8-го барона Кинга, вскоре унаследовавшего титул лорда Лавлейса. Забота о муже, детях не помешали Аде с упоением заниматься тем, что она считала своим призванием, – участвовать в строительстве «аналитической машины Бэббиджа», хотя финансирование проекта в 1833 г. было прекращено.

В 1842 г. итальянский математик Луис Менебреа, преподаватель баллистики Туринской артиллеристской академии, опубликовал на французском языке фундаментальный труд о вычислительной машине Бэббиджа. Бэббидж обратился к Аде с просьбой перевести описание машины на английский язык. Позже Бэббидж предложил Аде снабдить текст подробными комментариями. Именно эти комментарии, занимающие 52 страницы, дают основание называть Аду Лавлейс первым программистом планеты. Она также составила программу решения уравнения Бернулли о законе сохранения энергии движущейся жидкости.

Ада Лавлейс скончалась 27 ноября 1852 г. от онкологического заболевания и была похоронена в фамильном склепе Байронов рядом со своим отцом, которого никогда не знала при жизни.

В 1975 г. Министерство обороны США приняло решение о начале разработки универсального языка программирования. 10 декабря 1980 г. стандарт этого языка, названного «Ада», был утвержден. У программистов всего мира появился профессиональный праздник. День программиста отмечают 10 декабря, в день рождения Ады Лавлейс.

Норберт Винер

Винер Норберт родился 26 ноября 1894 г. в городе Колумбии, штат Миссури, в семье профессора современных языков Миссурийского университета, еврейского эмигранта, выходца из России. Отец Винера знал около 40 языков и за два года перевел на английский язык 24-томное собрание сочинений Л.Н. Толстого. По семейному преданию, род Винеров берет свое начало от Моисея Маймонида из Кордовы, лейб-медика султана Саладина Египетского, известного ученого и богослова. Спустя несколько лет после рождения Норберта семья Винеров переехала в Кембридж.

Под руководством отца Норберт в 7 лет читал произведения Дарвина и Данте, в 11 – окончил среднюю школу, в 14 – Тафтс-колледж и получил степень бакалавра искусств. Затем Винер учился в Гарвардском и Корнельском университетах. В 17 лет он стал магистром искусств, в 18 лет – доктором философии в Гарварде. Гарвардский университет выделил Винеру стипендию для обучения в Кембридже и Гёттингене, благодаря чему Винер имел возможность слушать лекции Б. Рассела, Г. Харди, Э. Ландау, Д. Гильберта.

В начале Первой мировой войны Винер вернулся в Америку и опубликовал работы по топологии и алгебре. Он составлял таблицы артиллерийских стрельб, но по близорукости его уволили из армии. С 1919 г. Винер – преподаватель Массачусетского технологического института, с 1932 г. – профессор этого института. В 1920–1925 гг. Винер занимается решением физических и технических задач и находит новые закономерности в теории броуновского движения, теории потенциала и гармоническом анализе. Предмет его исследований составляли основания математики, математический анализ, теория вероятностей, теория относительности и квантовая теория, теория электрических цепей, эргодические теоремы.

По мнению окружающих, Винер обладал «внешностью великого ученого», ученого из анекдотов: борода клинышком, очки с толстыми стеклами, невероятная неуклюжесть, путаная и бессвязная речь, необыкновенная рассеянность.

Совместно с Э. Хопфом Н. Винер вывел уравнения о радиационном равновесии звезд, получившие название «уравнения Винера – Хопфа». Применение математического аппарата уравнений Винера – Хопфа связано с решением задач, описывающих различные физические режимы, резко разделенные границей. Винер указывал, что это может быть как атомная бомба, где имеется поверхность, отделяющая область с одними физическими условиями от области с другими условиями, так и вселенная, при возникновении которой физические условия в определенный момент резко менялись [25]. Параллельно с Банахом он разработал начала теории нормированных пространств. В 1934 г. Винер читал курс лекций по электротехнике в Пекине, а во время длительного плавания написал роман «Искуситель», опубликованный в 1959 г.

Во время Второй мировой войны Винер занимался электрическими сетями, вычислительной техникой, работал над математическим аппаратом для систем наведения зенитного огня. Несколько позже, чем Колмогоров, но независимо от него, Винер развил теорию интерполяции и экстраполяции стационарных случайных процессов. Для этих процессов он разработал теорию «фильтрации», получившую широкое применение в технике. Он заложил основы теории марковских случайных процессов, общая теория которых построена А.Н. Колмогоровым. Вклад Колмогорова и Винера в теорию марковских случайных процессов воссоединяет теорию теплоты Фурье, центральную предельную теорему Лапласа и теорию броуновского движения Эйнштейна и Смолуховского [57].

В 1945–1947 гг. Винер работал в кардиологическом институте в Мехико. Заметное влияние на определение направления научной деятельности Винера оказало знакомство с мексиканским физиологом Артуром Розенблютом. Сопоставив знания из области медицины, физиологии и математики, Винер пришел к идее создания единой науки, изучающей процессы хранения и переработки информации, управления и контроля. Эту науку, описывающую управление и связи в машинах и живых организмах, Винер в 1947 г. предложил назвать кибернетикой. Термин «кибернетика» происходит от греческого слова *kybernetike*, что означает «кормчий», буквально – «искусство управления рулем». Следует отметить, что еще Платон использовал это слово для обозначения управления в общем смысле, а Ампер в 1834 г. предлагал его для обозначения управления человеческим обществом. Винер ввел в обиход не только термин «кибернетика», но и такие понятия как «ЭВМ», «обратная связь», «бит».

Не менее важную роль, чем Винер, в формировании этой науки сыграл, например, американский математик и инженер Клод Элвуд Шеннон. Но Винеру принадлежит, несомненно, первое место в пропаганде значения кибернетики для всей системы человеческих знаний. Появление в 1948 г. книги Винера «Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине» сделало его фигурой общественно значимой.

После выхода в свет «Кибернетики» Винер пропагандировал изложенные в ней идеи. В 1950 г. вышло продолжение этой книги – «Человеческое использование человеческих существ», в 1958 г. – «Нелинейные задачи в теории случайных процессов», в 1961 г. – второе издание «Кибернетики», в 1963 г. – «Акционерное общество “Бог и Голем”». Винер опубликовал две книги о своей жизни и творчестве – «Бывший вундеркинд» (1951) и «Я – математик» (1956).

В 1960 г. Винер посетил Советский Союз. Он встретился с учеными, выступил с лекцией о мозговых волнах в Политехническом музее, дал интервью.

Необходимо отметить высказывания Винера о моральной ответственности ученых в деле сохранения мира.

В последние годы жизни Винер занимался биологией, электроэнцефалографией, генетикой.

Скончался Норберт Винер 19 марта 1964 г. в Стокгольме.

Алан Тьюринг

Тьюринг Алан Матисон родился 23 июня 1912 г. в Лондоне в аристократической семье, принадлежавшей к высшему среднему классу английского общества. В детстве Алан и его старший брат Джон редко видели своих родителей, так как отец служил в Индии, а дети оставались в Англии и жили на попечении в частных домах, получая строгое английское воспитание. Такое воспитание не предусматривало изучения основ естественных наук. Поступив в престижную Шербонскую школу, Алан ленился, учился практически по всем предметам плохо, кроме математики. В 15 лет он самостоятельно изучал теорию относительности, но ему могли не выдать школьный аттестат из-за отставания по другим предметам.

В 1929 г. Тьюринг поступал в Кембриджский университет, но не сдал экзамены. Это ему удалось со второй попытки в 1931 г. В Кембриджском университете, который имел особые привилегии, дарованные английскими монархами, всегда царил дух свободомыслия. Здесь Тьюринг смог с головой погрузиться в науку.

Алан Тьюринг блестяще окончил четырехлетний курс обучения. Одна из его работ, посвященная теории вероятностей, была удостоена специальной премии. Тогда же Тьюринга избрали в научное общество Королевского колледжа – нечто среднее между аспирантурой и преподавательским корпусом.

В 1934 г. Тьюринг получил степень магистра, через год стал членом Совета колледжа, а в 1936 г. получил премию Смита за работу по теории относительности.

В 1936 г. Тьюринг создал теорию логических вычисляющих машин, благодаря которой его имя навсегда останется в истории науки. Одновременно были опубликованы результаты исследований в этой области американского логика Алонзо Чёрча. В своих трудах он основывался исключительно на математических предположениях и был поддержан логиками Принстонского университета.

Подход Тьюринга оказался более реальным, для практического осуществления, но некоторыми учеными воспринимался как работа дилетанта. Оригинальность его идей была признана значительно позже. Его теория вошла во все учебники по логике, основаниям математики и теории вычислений. Изучение «машин Тьюринга» стало обязательной частью учебных программ для будущих математиков и программистов.

Тьюринг изобрел простое устройство, обладающее всеми основными характеристиками современной вычислительной машины: завершенной программой, большим объемом памяти данных, пошаговым методом выполнения математических операций.

Компьютеров в современном смысле слова тогда не существовало. Только девять лет спустя электронные технологии дошли до уровня, необходимого

для создания вычислительной машины на практике, и «машина Тьюринга» стала теоретической основой для ЭВМ. В настоящее время «машина Тьюринга» является базовой темой в теории автоматов.

1936–1938 гг. Тьюринг провел в Принстонском университете в качестве аспиранта. Его интересовала алгебра, теория чисел, порядковая логика, криптография.

С 1939 по 1943 г. Тьюринг по заданию британского военного ведомства занимался кодами немецкой шифровальной машины «Энигма», которые считались не поддающимися расшифровке. Он пригласил в свой отдел нескольких друзей-шахматистов. Вместе с Велчманом Тьюринг разработал «Бомбу» – устройство, которое с 1940 г. позволяло расшифровывать все сообщения немецких военно-морского флота и авиации. Это во многом предопределило успех боевых действий британского флота.

В конце войны Тьюринга пригласили в Лондон в Национальную физическую лабораторию для исследований по разработке компьютера. В 1946 г. он представил новый проект британской ЭВМ, построенной в 1951 г. В то время эта машина имела самый большой объем памяти.

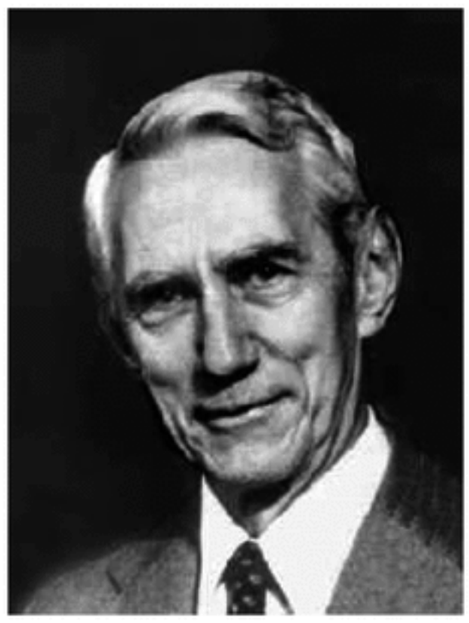
В 1948 г. Нейман предложил Тьюрингу читать лекции в Манчестерском университете. В 1950 г. Тьюринг издал книгу «Вычислительные машины и интеллект», где утверждал, что можно создать компьютер, «думающий» не хуже человека. Статьи на эту тему признаны фундаментальными в разработке искусственного интеллекта. В 1951 г. Тьюрингом была разработана первая шахматная программа для ЭВМ. Он был избран членом Королевского научного общества и занимался расшифровкой сообщений советской резидентуры в Англии. Последняя тема его научных трудов – применение математической теории к биологическим формам.

В 1952 г. квартиру Алана Тьюринга обокрали. В ходе расследования выяснилось, что преступление совершил один из друзей сексуального партнера Тьюринга. Таким образом вскрылись факты «непристойного поведения» и ученого уволили из Департамента кодов. Суд, состоявшийся 31 марта 1953 г., поставил Тьюринга перед выбором: тюремное заключение или лечение гормональными препаратами. Он выбрал последнее.

Умер Тьюринг 7 июня 1954 г. в своей домашней лаборатории от отравления цианидом. Цианид был обнаружен в половинке яблока, лежавшего перед ученым. Был ли это несчастный случай, самоубийство или убийство, осталось тайной.

Признание работы Тьюринга получили через много лет после его смерти.

Клод Шеннон



Шеннон Клод Элвуд родился 30 апреля 1916 г. в Петоски, штат Мичиган в семье бизнесмена и учительницы. В школе, которую он окончил в 1932 г., любимыми предметами были математика и физика, а любимым занятием – конструирование моделей самолетов и радиоуправляемых корабликов. Для связи с другом Клод смастерил самодельный телеграф из колючей проволоки, огораживающей местное пастбище. Деньги на эти занятия он зарабатывал сам: разносил почту и ремонтировал радиоаппаратуру.

В 1932 г. Шеннон поступил в Мичиганский университет, а в 1936 г. стал бакалавром и математики, и электротехники. Должность лаборанта в Массачусетском технологическом институте на отделении электротехники дала Шеннону возможность продолжить обучение. На аналоговой вычислительной машине он решал дифференциальные уравнения до шестого порядка включительно. Для каждого уравнения нужно было составлять соответствующую цепочку блоков. Электрическая схема состояла из сотен реле, и Шеннон стал заниматься теорией релейно-контактных схем. Он понял, что для описания работы схем необходимо пользоваться алгеброй логики. Свои идеи Шеннон развил в Лабораториях Белла в Нью-Йорке, а затем и в Массачусетсе (1937).

Клод Шеннон был первым, кто сумел связать булеву алгебру с техникой. Для этого нужно было отказаться от десятичной системы счисления и перейти на двоичную. Это позволило работу вычислительной машины (неважно, механической или электронной) описать совокупностью алгебраических формул. Поскольку между булевой алгеброй и двоичной арифметикой существует однозначное соответствие, то логическая машина одновременно является и вычислительной. Применив достижения Джорджа Буля в математической теории логики в технической практике, Шеннон стал основоположником теории информации.

В 1938 г. Шеннон перешел с отделения электротехники на отделение математики. Одновременно он работал над магистерской диссертацией по электротехнике и докторской – по математике. В магистерской диссертации Шеннон доказал, что работу релейно-контактных схем можно описать символами булевой алгебры. Позже Шеннон говорил, что ему просто повезло, поскольку он оказался единственным, кто хорошо знал и электротехнику, и математическую логику. Эта работа привлекла внимание специалистов и была выдвинута на премию Альфреда Нобеля, присуждаемую Объединением инженерных обществ США.

Ванневэр Буш, президент Института Карнеги в Вашингтоне, посоветовал Шеннону заняться исследованием проблемы применения алгебры логики в генетике и писать диссертацию на тему «Алгебра в теоретической генетике». Обе диссертации Шеннон защитил весной 1940 г.

Параллельно Шеннон занимался исследованиями в области вычислительной техники и систем связи. Летом 1940 г. в Лабораториях Белла он разработал новый метод проектирования коммутирующих электрических цепей, позволивший существенно сократить число контактов в цепях. Результаты были опубликованы в статье «Разработка двухконтактных коммутирующих цепей». Затем он провел год в Принстоне, где занимался исследованиями в области теории информации и систем связи. Во время войны Шеннон в Лабораториях Белла разрабатывал устройства для обнаружения самолетов и ракет противника и управления зенитным огнем. Занимался он и криптографией, что помогло ему открыть методы кодирования с коррекцией ошибок. В теории информации Шеннона интересовали проблемы оптимальной передачи информации по телефонным и телеграфным линиям.

В Лабораториях Белла Шеннон работал 15 лет, занимаясь исследованиями различных проблем, но, прежде всего, теорией информации. Его статью «Математическая теория связи» (1948) считают весомым вкладом в науку и часто называют «Великой хартией информационной эры». В работах 1948–1949 гг. Шеннон ввел «бит» в качестве единицы информации и определил количество информации через энтропию. Им разработана теория пропускной способности каналов связи, теория резервирования систем при построении надежной системы из ненадежных элементов.

Фундаментальным положением теории информации является теорема кодирования Шеннона о пропускной способности каналов связи при наличии помех в виде шума. Информация в канале связи искажается, если превысить некоторый предел скорости ее передачи. Приблизиться снизу к этому пределу можно сколь угодно близко и обеспечить сколь угодно малую вероятность ошибки при любой зашумленности канала. В настоящее время эти идеи используют везде, где хранится, обрабатывается и передается информация. Они позволяют конструировать надежные каналы связи. В статье «Теория защищенной связи» Шеннон рассматривал аналогию проблем криптографии с проблемами передачи информации по каналу с шумами. Его назначили консультантом правительства США по вопросам криптографии.

Шеннон интересовался не только наукой. Он играл на кларнете, любил музыку и поэзию. Еще в 1940-е годы его можно было увидеть в коридорах лаборатории, катающимся на одноколесном велосипеде и одновременно жонглирующим мячиками. Он любил заниматься конструированием забавных устройств: калькуляторов, работающих с римскими числами; черепашек, умеющих преодолевать препятствия; жонглирующих аппаратов. Одна из его статей 1950 г. называлась «Программирование компьютера для игры в шахматы», на идеи которой опираются современные аналогичные программы.

В 1956 г. Шеннон ушел из Лабораторий Белла и с 1957 г. стал профессором Массачусетского технологического института. В 1960-е годы он практически перестал заниматься наукой. В 1978 г. Шеннон ушел на пенсию.

Последние годы жизни он боролся с болезнью Альцгеймера, скончался 24 февраля 2001 г. в возрасте 84 лет.

В.М. Глушков

Глушков Виктор Михайлович родился 24 августа 1923 г. в Ростове-на-Дону в семье горного инженера. Семья вскоре переехала в город Шахты. В школе Виктор увлекался сначала биологией, затем минералогией, геологией, радиотехникой, радиоуправляемыми моделями, математикой. К 8 классу он знал математику в объеме программы технического вуза. Школу он закончил в 1941 г. с золотой медалью. Из-за сильной близорукости Виктор Михайлович не попал на фронт и на оккупированной территории помогал матери работать в подполье. Осенью 1941 г. его мать была расстреляна фашистами. После освобождения города Шахты В.М. Глушков был мобилизован и участвовал в восстановлении угольных шахт Донбасса.

Осенью 1943 г. был объявлен прием студентов в Новочеркасский индустриальный институт, и Глушков стал студентом теплотехнического факультета этого института. На четвертом курсе он понял, что ошибся в выборе профессии, и перевелся на математический факультет Ростовского университета. Сдав экстерном экзамены за четыре года университетского курса математики и физики, он стал студентом пятого курса. В дипломной работе он развил методы вычисления таблиц несобственных интегралов, обнаружив неточности в таблицах, выдержавших до того 10–12 изданий. За месяц до окончания университета Виктор Михайлович женился. После защиты диплома в 1948 г. Глушков по распределению был направлен на Урал в одно из учреждений, связанных с атомной промышленностью. Прибыв на место, В.М. Глушков обнаружил, что Министерство высшего образования изменило назначение и направило его в Новочеркасский индустриальный институт. Однако вернуться он с женой уже не мог из-за отсутствия средств.

С октября 1948 г. Глушков стал преподавателем Уральского лесотехнического института в Свердловске (ныне Екатеринбург) и занялся научно-исследовательской деятельностью. Он заинтересовался теорией групп и в 1949 г. стал аспирантом заочной формы обучения Свердловского университета. В октябре 1951 г. Глушков защитил кандидатскую диссертацию на тему «Теория локально-нильпотентных групп без кручения с условием обрыва некоторых цепей подгруппы» и был назначен на должность доцента.

В 1952 г. внимание В.М. Глушкова привлекла 5-я проблема Гильберта, связанная с теорией топологических групп. К этому времени проблему уже решили американские математики, и была сформулирована обобщенная 5-я проблема Гильберта. За ее решение взялся Глушков. Над основной теоремой по обобщенной 5-й проблеме Гильберта он работал непрерывно в течение трех лет. Доказав ее, Глушков получил результат более сильный, чем американские ученые, причем с помощью более простого метода, который также подходит для исследования обычной (не обобщенной) 5-й проблемы Гильберта. Исследования обобщенной 5-й проблемы Гильберта легли в основу его докторской диссертации на тему «Топологические локально-нильпотентные

группы», которая была защищена в 1955 г. в Московском университете. Глушков стал одним из ведущих алгебраистов Советского Союза, его исследования в области алгебры были продолжены многими российскими и зарубежными учеными. В 1955 г. он был избран членом Московского математического общества.

Глушков изменил направление своей деятельности, обратившись к кибернетике, вычислительной технике и прикладной математике с августа 1956 г. Его интересовала проблема моделирования психических функций на ЭВМ. По приглашению академика Украинской академии наук Б.В. Гнеденко он переехал в Киев и начал работать в Институте математики АН УССР заведующим лабораторией вычислительной техники и математики.

С этого времени деятельность Глушкова неразрывно связана с Академией наук Украинской ССР. В декабре 1957 г. лаборатория, которой он руководил, была преобразована в Вычислительный центр Академии наук Украины (ВЦ АН УССР), который имел права научно-исследовательского института. Глушков стал директором центра и проводил исследования в области теории автоматов и проектирования вычислительных машин. В ноябре 1958 г. его избирают членом-корреспондентом АН УССР по специальности «Алгебра». В начале 1960-х годов Глушковым фактически была создана новая научная дисциплина – теория цифровых автоматов, имевшая первостепенное значение для синтеза кибернетических систем и электронных вычислительных машин. В рамках этой теории цифровые автоматы рассматривают как устройства для преобразования дискретной информации, исследуют их свойства и методы усовершенствования.

В 1961 г. вышла в свет знаменитая монография В.М. Глушкова «Синтез цифровых автоматов», переведенная позже на английский язык и изданная в США и других странах. Еще одна важнейшая теоретическая работа В.М. Глушкова «Абстрактная теория автоматов» опубликована в 1961 г. в журнале «Успехи математических наук». Она легла в основу работ по теории автоматов с привлечением алгебраических методов.

В декабре 1962 г. на базе ВЦ АН УССР был организован Институт кибернетики АН Украинской ССР под руководством Глушкова. В 1962 г. вышла в свет его монография «Синтез цифровых автоматов», в которой был разработан математический аппарат, давший возможность эффективного применения алгебраических методов для решения задач проектирования устройств вычислительной техники. В монографии, содержащей глубокие теоретические обобщения, предложена строгая методология построения кибернетических устройств.

Монография Глушкова «Введение в кибернетику», сыгравшая важную роль в привлечении внимания исследователей к проблемам кибернетики и вычислительной техники, вышла в свет в 1964 г. В том же году за цикл работ в области теории автоматов и теоретической кибернетики Глушкову присуждена Ленинская премия. Тогда же, в 1964 г., его избрали действительным членом Академии наук СССР.

В 1965 г. начал издаваться Всесоюзный научно-теоретический журнал «Кибернетика», создателем и главным редактором которого до конца жизни

являлся Глушков. Его избрали членом Программного комитета Международной федерации по переработке информации, где он возглавлял направление «Применение ЭВМ в естественных науках, технике, лингвистике и библиотечных науках. Искусственный интеллект». С 1966 г. он руководит кафедрой теоретической кибернетики Киевского университета, а уже с 1967 г. – кафедрой теоретической кибернетики и методов оптимального управления Московского физико-технического института, организованной при Институте кибернетики АН УССР.

В 1969 г. за достижения в развитии науки и подготовке научных кадров Институт кибернетики АН УССР награжден орденом Ленина, а Глушкову было присвоено звание Героя Социалистического Труда. По инициативе Глушкова была издана первая в мире «Энциклопедия кибернетики». В 1974 г. была опубликована монография В.М. Глушкова, Г.Е. Цейтлина и Е.Л. Ющенко «Алгебра, языки, программирование», содержащая введение в теорию универсальных алгебр с учетом применения этого аппарата в теоретическом программировании.

Всего Глушков опубликовал более 800 печатных работ. Из них более 500 написаны им лично, а остальные – в соавторстве. Широкую известность получили его труды в области социальных и философских проблем кибернетики, управления научно-техническим прогрессом.

Глушков умер 30 января 1982 г. Он похоронен в Киеве на Байковом кладбище. При жизни Глушков щедро делился своими знаниями, идеями и опытом с окружающими. Его знания основывались на самых современных методах научного познания, а при поддержке многочисленных учеников и соратников позволяли ставить и успешно решать разнообразные научные и технические проблемы – от управления экономикой до новых методов в теории искусственного интеллекта.

Глава 25

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

> Быстрое развитие и усложнение техники, увеличение масштабов и стоимость проводимых мероприятий, широкое внедрение автоматизации в сферу управления – все это приводит к необходимости научного анализа сложных целенаправленных процессов под углом зрения их структуры и организации.
>
> *Е.С. Вентцель*

Исследование операций и круг рассматриваемых задач

Исследованием операций называется научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию оптимальных решений. Как научное направление оно возникло в 1935–1938 гг. в Англии при разработке математических методов обеспечения согласованности действий всех участников боевых операций. Предположительно, во время Второй мировой войны общее количество ученых, практически занятых исследованием операций в Англии, Америке и Канаде, превышало 700 человек.

Первые публикации были секретными. Первым учебником была книга Черчмена, Акоффа и Арнофа «Введение в исследование операций». Затем появились «Введение в теорию игр» Дж. Маккинси, «Современный стратег» Дж. Вильямса, «Динамическое программирование» Р. Беллмана, «Математические методы исследования операций» Т. Саати и другие работы. Первые работы были посвящены исследованию военных задач, а более поздние – экономических и народно-хозяйственных задач.

Под операцией обычно понимают любое мероприятие (или совокупность действий), объединенное общим замыслом и направленное на достижение определенной цели.

Операция всегда управляема, т. е. исследователь имеет возможность выбрать параметры, характеризующие способ ее организации.

Выбор определенных параметров исследователем называют решением. Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными. Оптимальными называют решения, которые, по тем или иным соображениям, предпочтительнее других.

Основная задача исследования операций – предварительное количественное обоснование оптимальных решений. Само принятие решения выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица, которому предоставлено право окончательного выбора. Ответственные за выбор лица могут принимать во внимание наряду с рекомендациями,

вытекающими из математического расчета, другие соображения, которые не были учтены расчетом.

Таким образом, исследование операций не ставит задачу автоматического принятия решений. Задача исследования операций – подготовка количественных данных и рекомендаций, облегчающих принятие решения для исследователя.

Для применения количественных методов исследования в любой области необходимо построение математической модели явления, тогда явление схематизируется, из него можно выделить важнейшие факторы. Взаимная связь явления и факторов описывается с помощью того или иного математического аппарата. Устанавливаются количественные связи между условиями операции, параметрами решения и показателями эффективности операции.

Общих способов построения математических моделей не существует. В каждом конкретном случае модель строится исходя из целевой направленности операции и задачи научного исследования с учетом точности решения и точности исходных данных.

Требования к модели противоречивы. С одной стороны, она должна быть достаточно полной (в ней должны быть учтены все важные факторы), с другой стороны – достаточно простой, чтобы можно было установить зависимости между входящими в нее параметрами.

Специфика экономических задач в связи с исследованием операций. Применение математики в экономике имеет ряд особенностей.

1. Многомерность, так как это задачи с большим числом неизвестных, имеющих различные динамические связи и взаимоотношения.

2. Задачи имеют множество гипотетических решений. Определенную продукцию можно получить различными способами в зависимости от: выбора сырья, оборудования, технологии и организации производственного процесса. Для управления требуется найти, по возможности, минимальное число желательно наилучших вариантов. Это приводит к *экстремальной постановке* экономических задач, что предполагает наличие целевой функции, а иногда нескольких целевых функций и, следовательно, компромисса между ними.

3. Входными величинами производственных систем служат ресурсы (природные, трудовые, капиталовложения, информационные). Из этого следует, что наличие ограничений на ресурсы, а значит и на экономические задачи, содержат неравенства.

4. Случайный характер факторов, влияющих на экономическую систему, предполагает вероятностный характер технико-экономических параметров и коэффициентов целевой функции.

5. Нередко бывает, что зависимости в целевой функции или между различными факторами нелинейны, тогда имеет место дискретность технико-экономических показателей (не может быть дробным число предприятий, рабочих и т. д.) и неотрицательность их значений.

Применение математики в производстве приводит к поразительным результатам. Однажды королева Англии пригласила к себе Ньютона и попросила сходить на Монетный двор, чтобы он подсчитал, сколько дополнительных помещений, станков и рабочих потребуется для чеканки монет в 1,5 раза

больше прежнего. Ньютон провел полдня на Монетном дворе, вникая в суть производства. Столько же времени он занимался расчетами, а утром предложил решение: можно без дополнительных помещений, станков и рабочей силы, увеличить выпуск монет в 2 раза. Для этого достаточно изменить последовательность операций, переставить и по-иному использовать станки и перераспределить работу.

Задачи, подобные той, которую решил Ньютон, сейчас имеют массовый характер: максимально рационально организовать перевозку грузов; раскроить материал, чтобы было меньше отходов; получить максимальную прибыль из данного производства и т. д. За разработку общего метода решения подобных задач – линейного программирования – академик Леонид Витальевич Канторович был удостоен Нобелевской премии.

Приведем краткую информацию о некоторых разделах математики, обычно включаемых в исследование операций. Необходимо отметить, что эти разделы могут рассматриваться и как самостоятельные.

Линейное программирование. Пусть совокупность условий деятельности управляемого объекта записывается в виде системы уравнений и неравенств. Эта система определяет множество допустимых вариантов его дальнейшего развития. Выбор оптимального варианта осуществляется путем использования так называемой целевой функции. Например, мы стремимся получить максимум дохода от реализации произведенной продукции, причем цены на нее известны. Решив задачу, найдем оптимальный план развития данного предприятия. Перебрать все варианты практически невозможно, а аналитическое решение, как правило, отсутствует. Тогда рассматривают целенаправленный перебор ограниченного числа вариантов по специальным правилам. Такой перебор вариантов лежит, в частности, в основе симплекс-метода. Если система ограничений и целевая функция являются уравнениями и неравенствами первой степени, то соответствующий математический аппарат называется линейным программированием. Следует отметить, что в общепринятых названиях «линейное программирование» и «динамическое программирование» слово «программирование» неудачно заимствовано из зарубежной литературы и в действительности означает «планирование».

Назовем некоторые задачи линейного программирования.

1. *Планирование производства*. Предприятие имеет определенное количество ресурсов разного рода (сырье, оборудование и т. д.). Известно, сколько единиц каждого ресурса требуется для производства одной единицы конкретного вида продукции и доход от реализации каждой единицы производимой продукции. Требуется составить план выпуска продукции, который принесет максимальный доход предприятию.

2. *Задача на смеси*. Пусть один или более продуктов получается путем смешивания некоторого числа компонентов. При этом существуют ограничения на количество имеющихся в наличии видов сырья, ограничения на количество и качество производимых продуктов. Обычно можно бесконечным числом способов смешивать виды сырья, чтобы получить конечные продукты, удовлетворяющие разным ограничениям. Смесь составляется таким образом, чтобы оптимизировать заданную целевую функцию.

3. *Транспортная задача* подразумевает составление такого плана перевозок, при котором все заявки были бы выполнены, а общая стоимость всех перевозок была минимальна.

Несмотря на широкое применение метода линейного программирования, он учитывает лишь три особенности экономических задач: большое число переменных, ограниченность ресурсов и необходимость целевой функции.

Теория игр и статистических решений. Во многих задачах исследования операций приходится сталкиваться с проблемой принятия решений в условиях неопределенности. Неопределенными могут быть как условия выполнения операции, так и сознательные действия противников или других лиц, от которых зависит успех операции. Математический аппарат принятия решений в условиях неопределенности разрабатывает теория игр и статистических решений, т. е. математическая теория конфликтных ситуаций. Ее задачей является выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта.

Строится упрощенная, схематизированная модель ситуации, называемая игрой. От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным правилам. Совокупность правил, определяющих выбор действий игрока, называют стратегией. Оптимальной называют такую стратегию, которая при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш). Рассуждения основываются на предположении, что противник, по меньшей мере, так же разумен и делает все для того, чтобы выиграть.

Теорией игр в начале 1920-х годов занимался Ф. Борель. Основной вклад в развитие этой теории внес Джон фон Нейман, доказавший в 1928 г. теорему о минимаксе, используя идею о неподвижной точке. В 1935 г. Нейман обобщил теорему о минимаксе, связав ее с теорией цен. В 1938 г. Ж. Вилль обнаружил связь теоремы о минимаксе с выпуклыми множествами. Далее теорию игр развивали многие математики.

На новый уровень теория игр была поднята благодаря работам Джона Форбса Нэша-мл.

Теория массового обслуживания. При исследовании операций часто приходится сталкиваться с анализом работы своеобразных систем, называемых системами массового обслуживания. Примерами таких систем могут служить телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, магазины и т. п. Предмет теории массового обслуживания – установление зависимости между характером заявок, числом каналов, их производительностью, правилами работы и эффективностью обслуживания.

Случайный характер потока заявок и времени обслуживания каждой заявки создают случайный процесс в системе массового обслуживания. Чтобы дать рекомендации по рациональной организации этого процесса его необходимо описать математически. Этим и занимается теория массового обслуживания.

Стохастическое моделирование считают перспективным методом исследования в экономике. Его роль возрастает по мере совершенствования

ЭВМ, которые позволяют перерабатывать большие объемы статистической информации и выявлять более глубокие вероятностные закономерности экономических явлений. Развитие таких специфических вычислительных систем, как самообучающиеся системы или системы искусственного интеллекта, даст возможность широко использовать моделирование экономических взаимоотношений с помощью деловых компьютерных игр. Играя, самообучающиеся системы будут приобретать опыт принятия оптимальных решений в самых сложных ситуациях, не теряя при этом преимуществ вычислительной техники перед мозгом человека (большой объем памяти, прямой доступ к ней, быстродействие).

Развитие систем компьютерной обработки, накопления и хранения информации создает новую, весьма обширную информационную базу, которая, возможно, послужит толчком к созданию новых, ранее неизвестных математических методов поиска и принятия решений.

Оптимальное управление – раздел математики, изучающий неклассические вариационные задачи.

Технические объекты обычно снабжены рулями – с их помощью человек управляет движением. Математически поведение такого объекта описывается некоторыми уравнениями, куда входят и управляющие параметры, характеризующие положение рулей. Естественно, возникает вопрос об отыскании наилучшего (оптимального) в том или ином смысле управления движением. Этот вопрос является задачей вариационного исчисления. В отличие от классических вариационных задач, где управляющие параметры меняются в некоторой открытой области (без границы), теория оптимального управления охватывает и тот случай, когда управляющие параметры могут принимать и граничные значения. С практической точки зрения, это существенно, поскольку при управлении техническим объектом именно положение руля «на упоре» часто обеспечивает оптимальное управление.

Основополагающим результатом теории оптимального управления является принцип максимума Понтрягина, который дает общее необходимое условие оптимальности управления. Этот результат и связанные с ним исследования, проведенные в начале 50-х годов XX в. Л.С. Понтрягиным и его коллегами, послужили исходным пунктом разработки теоретических, вычислительных и прикладных аспектов теории оптимального управления. При решении ряда задач оптимального управления с успехом используются методы динамического программирования, основы которого разработаны Р. Беллманом и его коллегами.

Динамическое программирование представляет собой особый математический метод оптимизации решений, специально приспособленный к многошаговым (или многоэтапным) операциям.

Часто исследуемые операции представляют собой процесс, развивающийся во времени и распадающийся на ряд шагов или этапов. Некоторые операции расчленяются на шаги естественно, например, при планировании хозяйственной деятельности группы предприятий естественным шагом является хозяйственный год. В других операциях разделение на шаги приходится вводить искусственно, например, процесс вывода ракеты на космическую

орбиту можно условно разбить на этапы, каждый из которых занимает какой-то временной отрезок. Рассматриваются управляемые процессы, т. е. на каждом шаге принимается какое-то решение, от которого зависит успех данного шага и операции в целом.

Приведем пример типичной задачи динамического программирования: «Как нужно в начале каждого года распределять имеющиеся средства между предприятиями, чтобы суммарный доход от всей системы предприятий за весь рассматриваемый период был максимальным?»

В основе динамического программирования лежит принцип выбора оптимальной стратегии, а не перебор всех возможных вариантов. Этот принцип указан американским математиком Ричардом Эрнестом Беллманом в 50-е годы XX в. и назван им принципом оптимальности. Каковы бы ни были начальное состояние и первое решение, последующие решения составляют оптимальную политику по отношению к начальному состоянию, полученному в результате первого решения. Формализация принципа оптимальности приводит к специфическим функциональным уравнениям. Поэтому иногда динамическое программирование называют методом функциональных уравнений динамического программирования. Строгое обоснование этого метода было дано Понтрягиным и его учениками.

Агнер Эрланг

Родился Эрланг Агнер 1 января 1878 г. в деревушке Лонборге в семье школьного учителя. У Агнера был старший брат и две младшие сестры. Начальное образование Эрланг получил в семье: любимым предметом была астрономия. С 14 до 16 лет Эрланг преподавал в школе, в которой работал его отец, и изучал французский язык и латынь.

В 1894 г. Эрланг поступил в Копенгагенский университет и получил право на стипендию. В 1901 г. он стал магистром математики. Следующие семь лет он работал преподавателем в различных школах и проводил исследования в области математики и телефонии.

В 1908 г. Эрланг поступил на работу в Копенгагенскую телефонную компанию. Сначала он был научным сотрудником, а затем заведующим лабораторией. Эрланг решил применить теорию вероятностей для решения проблем телефонной связи. В 1909 г. он опубликовал свою первую работу «Теория вероятностей и разговоры по телефону», в которой показал, что телефонные звонки подчиняются распределению Пуассона. Важнейшие математические результаты, полученные Эрлангом, опубликованы в его статье 1917 г. В работах 1920-х годов Эрланг решал задачи, возникающие при организации работы телефонных сетей.

Поясним вклад Эрланга в теорию массового обслуживания. При рассмотрении случайных процессов, протекающих в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, часто целесообразно представлять процесс так, будто изменения состояний системы происходят под действием

каких-то потоков событий (потока вызовов, посетителей, неисправностей, заявок на обслуживание и т. д.).

Регулярным называют поток событий, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. Поток может быть стационарным (однородным по времени), без последействия, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой (или другие, если рассматривается больше двух участков) и ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий, характеризующийся стационарностью, отсутствием последействий, ординарностью, называют простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком. Эрланг ввел в рассмотрение потоки, образующиеся в результате «просеивания» простейших потоков. Потоком Эрланга k-го порядка называют поток, в котором сохраняют каждую $(k+1)$ точку, а остальные удаляют.

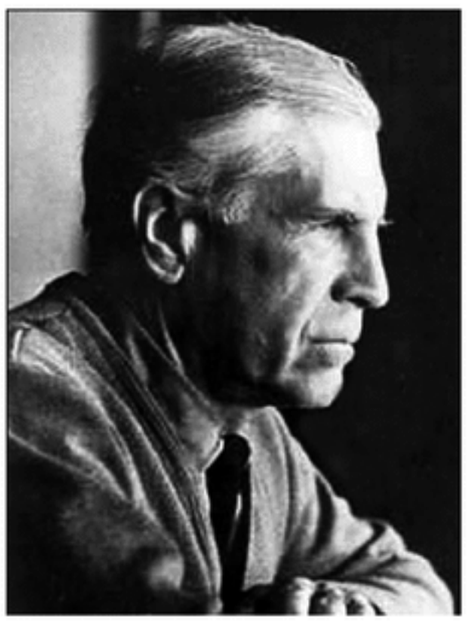
Промежуток времени между «соседними» событиями в потоке Эрланга подчиняется закону распределения вероятностей, который называют его именем.

В 1940-х годах единицу объема информации, передаваемую через телекоммутационные системы, стали называть «эрланг». Формулы Эрланга до сих пор используются при расчетах пропускной способности современных телекоммутационных сетей.

Эрланг Агнер умер 3 февраля 1929 г.

При жизни датского математика Эрланга Агнера не существовало таких разделов математики, как исследование операций и теория массового обслуживания. Но его работы послужили основой для их формирования в дальнейшем.

Л.С. Понтрягин



Понтрягин Лев Семенович родился 21 августа 1908 г. в Москве в семье мелкого служащего и портнихи. В годы Первой мировой войны отец Понтрягина был в немецком плену. В 1916 г. Лев поступил в городскую школу для бедных. Деньги, собранные родителями на его учебу, обесценились в революцию.

В 14 лет на глазах у матери в руках Льва взорвался примус, который он пытался починить. Пять месяцев мальчик пробыл в больнице, тяжелые ожоги и неудачное лечение привели к полной потере зрения. После этой трагедии его отец тяжело заболел, постепенно стал терять работоспособность и в 1927 г. умер от инсульта. Накоплению знаний и развитию интересов ослепшего Понтрягина способствовала самоотверженная любовь и помощь матери, на долгие годы ставшей секретарем своего талантливого сына. Со временем материнская любовь гипертрофировалась и приобрела черты эгоизма.

Понтрягин отказался считать себя инвалидом, жить неполноценной жизнью и жалеть себя. Его жизнь была очень активной, полной борьбы и побед. Лев Семенович никогда не пользовался приспособлениями, предназначенными для слепых, во всем стремился к независимости и самостоятельности. Он научился кататься на коньках и лыжах, плавал на байдарке.

До поступления в университет Понтрягин занимался математикой и музыкой. Он выбрал математику, особый интерес к которой вызвала статья профессора А.К. Лахтина, посвященная этой науке. Позже Понтрягин писал, что поступление в Московский университет в те времена было связано с большими сложностями. Тот социальный слой, к которому он принадлежал, т. е. дети мелких служащих, был в очень трудном положении. Школа рекомендовала его и хлопотала о зачислении, но получила отказ в районо, сотрудники которого решили, что слепой Понтрягин не сможет учиться математике в университете. Помогло то, что его крестный отец имел связи в Наркомпросе. В 1925 г. Лев стал студентом физико-математического факультета Московского государственного университета.

Студенту Понтрягину, уже сделавшему значительные научные открытия, не платили стипендию на том основании, что он не вел общественную работу. Льву Семеновичу назначили минимальную стипендию в 35 рублей только после смерти отца. Понтрягин рассказывал, что потерял сон в 20 лет. Он запоминал все лекции, которые доводилось прослушивать в университете, а всю ночь курил и восстанавливал их в памяти. Учиться на физико-математическом факультете МГУ, а вскоре самостоятельно заниматься наукой Льву Семеновичу помогли чуткость и педагогический талант П.С. Александрова. Каждая из четырех студенческих работ Понтрягина, выполненных под руководством Александрова, соответствовала требованиям кандидатской диссертации.

Первые научные работы Льва Семеновича посвящены топологии. В 1927 г., в возрасте 19 лет, Понтрягин получает выдающийся результат. Используя введенный ранее Брауэром коэффициент зацепления, он усиливает теорему двойственности Александера, придавая ей более алгебраический характер. Московский университет Понтрягин окончил в 1929 г., сразу поступил в аспирантуру и уже с 1930 г. работал в МГУ доцентом на кафедре алгебры. Применение коэффициентов зацепления для доказательства теоремы двойственности оказалось необычайно удачной находкой, которая стала началом первого большого цикла топологических работ Понтрягина. Цикл завершился доказательством в 1932 г. классического результата, связывающего группы гомологий любого ограниченного замкнутого множества, лежащего в евклидовом пространстве, с группами гомологий его дополнения. Параллельно с исследованиями топологической двойственности Понтрягин занимался теорией размерности. Он построил примеры размерностно неполноценных континуумов (понтрягинские поверхности), опровергающих гипотезу о сложении размерностей при топологическом перемножении компактов. Эти примеры подтвердили целесообразность гомологического подхода к размерности и открыли путь для дальнейших исследований в этой области.

В сборнике «Математика в СССР за 15 лет», изданном в 1932 г., имя Понтрягина, которому было тогда 24 года, упоминается 23 раза (больше него упоминается только М.А. Лаврентьев – 24 раза). Этот факт свидетельствует о выдающемся вкладе Понтрягина в российскую науку уже на заре своей творческой деятельности. В 1932 г. у Понтрягина появилась возможность поехать на год в США по приглашению С.А. Лефшеца. Вместо матери, обычно сопровождавшей его в поездках, Понтрягину предложили ехать с другим человеком. Он отказался, в результате чего на 25 лет стал невыездным [35].

В 1934 г. Понтрягин был принят на должность старшего научного сотрудника в отдел топологии и геометрии Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, а в 1935 г. без защиты диссертации ему присуждена ученая степень доктора физико-математических наук и присвоено ученое звание профессора по специальности «математика». Понтрягин вспоминал, как он с небольшой группой товарищей изучал в своей квартире работы классиков математики. В 1937 г. они прекратили подобные занятия, так как это стало опасным.

По результатам исследований Понтрягина в области топологической алгебры в 1938 г. опубликована книга «Непрерывные группы», многократно переиздававшаяся и переведенная на многие языки. В 1941 г. за эту книгу ему присуждена Государственная премия. В 1939 г. Лев Семенович был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

В период с 1935 г. до конца 1940-х годов Понтрягин создает свои основные труды по гомотопической теории и теории косых произведений. Им получены основополагающие результаты, наиболее важными из которых являются методы исследования, широко применяемые до настоящего времени в алгебраической топологии.

В годы войны Понтрягин эвакуировался в Казань вместе с Математическим институтом им. В.А. Стеклова АН СССР. Лев Семенович не читал лекций, практически все время занимался топологическими задачами теории гомопотий и новыми для него вопросами анализа. Он исследовал нули квазиполиномов и эрмитовы операторы в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой.

Понтрягин внес заметный вклад во многие разделы математики: теорию дифференциальных уравнений, теорию оптимального управления, топологическую алгебру, геометрию, теорию групп Ли, но, прежде всего, в топологию, с которой начинал. Он, безусловно, принадлежит к числу великих русских математиков и величайших топологов XX в.

В начале 1950-х годов Лев Семенович изменил направление своей научной работы. После публикации первых книг по исследованию операций выявилось отставание СССР в этой области науки. На предложение М.В. Келдыша ликвидировать это отставание откликнулся Понтрягин. Он начал практически с нуля заниматься прикладными вопросами, связанными с теорией колебаний и регулирования. Несколько лет было потрачено на беседы с физиками и специалистами в области техники. Нужно было понять математический смысл технических проблем и предложить принципиально новые концепции их решения. И в этом, новом, деле Понтрягин стал ученым мирового уровня.

Первым направлением работ Понтрягина, в котором получены важные и интересные в математическом плане результаты, были исследования дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Вторым – стала разработка математической теории дифференциальных игр.

Основные усилия Понтрягина были направлены на разработку теории оптимального управления. Она была создана для задач неклассического типа, решение которых недоступно классическому вариационному исчислению. Среди допустимых вариантов управления процессом при заданных условиях (часто противоречивых) нужно выбрать тот, который обеспечивает достижение цели наилучшим образом. Это может быть минимальное время, наибольший экономический эффект, максимальная точность и т. п.

Основополагающим в математической теории оптимального управления является принцип максимума, сформулированный Понтрягиным, который называют принципом максимума Понтрягина. Этот результат был изложен Львом Семеновичем в пленарном докладе на Международном конгрессе математиков в Эдинбурге в 1958 г. На конгресс Понтрягина пригласили в качестве тополога, но по его предложению, намеченный доклад по топологии был заменен докладом по теории оптимального управления. Результаты исследований были изложены в книге «Математическая теория оптимальных процессов», написанной в соавторстве с В.Г. Болтянским, Р.В. Гамкрелидзе и Е.Ф. Мищенко.

В 1958 г. Понтрягин был избран действительным членом АН СССР. В 1962 г. за цикл работ по обыкновенным дифференциальным уравнениям и их приложениям к теории оптимального управления и теории колебаний ему присуждена Ленинская премия, в 1969 г. – присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Отношение Понтрягина к работе характеризует следующее его признание. В 1970 г. он читал лекции в Станфордском университете США. Вернувшись домой, Лев Семенович понял, что в одну из задач в лекциях вкралась ошибка. Это было для него потрясением. Через три месяца он нашел новый подход к решению задачи, что принесло ему огромное облегчение [35].

Большое внимание Понтрягин уделял вопросам преподавания математики в школе. В 70-е годы XX в. в стране сложился новый стиль преподавания математики, заимствованный из западных стран, преимущественно из Франции. Основными принципами этого стиля стали отказ от интуитивного мышления и крайняя формализация изложения материала.

Борьбу с насаждением формализма в школьной математике вели многие ученые, а возглавлял эту борьбу Понтрягин. Последние шесть лет своей жизни Лев Семенович руководил Комиссией по школьному математическому образованию Отделения математики АН СССР.

Понтрягин не обошел вниманием и вопрос о переброске части стока северных рек на юг. В открытом письме, адресованном М.С. Горбачёву, он высказался против подобных идей и на конкретных примерах показал те негативные последствия, к которым привели подобные необдуманные решения.

Лев Семенович Понтрягин скончался в Москве 3 мая 1988 г.

Ричард Беллман

Беллман Ричард Эрнест родился 26 августа 1920 г. в Бруклине (Нью-Йорк) в еврейской семье. Родители отца эмигрировали из России, а семья матери – из Польши. Отец Беллмана разорился в годы Великой депрессии, но Ричарду все же удалось получить хорошее образование. Он занимал призовые места по математике среди школьников Нью-Йорка. В 1937 г. Беллман поступил в Нью-Йоркский колледж на отделение физики, а в 1938 г. перевелся в Бруклинский колледж на отделение математики. В 1941 г. после окончания колледжа он поступил в аспирантуру университета Джона Хопкинса в Балтиморе.

С начала 1942 г. Беллман работал инструктором по военной электронике в университете штата Висконсин. Одновременно он продолжал заниматься математикой и получил в 1943 г. степень магистра. Он перевелся в Принстонский университет и преподавал специальные курсы. В декабре 1944 г. Беллман был призван в армию и привлечен к участию в Манхэттенском проекте по разработке атомной бомбы. Там он работал над проблемами в области теоретической физики до увольнения в 1946 г.

Беллман вернулся в Принстон и под руководством Лефшеца защитил диссертацию, посвященную устойчивости решения дифференциальных уравнений, и получил степень доктора. До 1948 г. Беллман был помощником профессора в Принстонском университете, а затем перешел на должность адъюнкт-профессора в Станфордский университет.

В 1952 г. Беллман начал работу в корпорации «РЭНД», научно-исследовательском центре в калифорнийском городе Санта-Моника. В то время этот центр занимался решением задач под эгидой военно-воздушных сил США.

Беллман всегда считал себя математиком, но американские ученые, занимавшиеся абстрактной математикой, не принимали его в свои ряды. Он создавал новые методы решения задач и применял их на практике без достаточного обоснования. С точки зрения коллег, математические теоремы Беллмана были доказаны не очень аккуратно. Книги он писал быстро, иногда не доводя их до кондиции. Эти книги раскупались, переводились на многие языки, но читались не математиками, а инженерами, физиками и экономистами. В СССР он был более популярен, чем в США. Известность Беллману в нашей стране принесло создание динамического программирования. В этом разделе исследования операций разрабатываются многоступенчатые процессы принятия решений.

Первая публикация по динамическому программированию появилась в 1952 г., а книга «Введение в теорию динамического программирования» была опубликована в корпорации «РЭНД» в 1953 г.

Беллман получил многочисленные результаты, связанные с применением динамического программирования в разных областях математики (вариационное исчисление, автоматическое регулирование, теория аппроксимации,

исследование операций и др.). В вариационном исчислении важную роль играет функциональное уравнение Беллмана. В математических методах оптимального управления известны Беллмана функция и уравнение. Р. Беллман опубликовал 619 статей и 39 книг. Многие его работы переведены на русский язык.

В 1965 г. Беллман начал работать в должности профессора математики, электротехники и медицины в университете Южной Калифорнии, оставаясь сотрудником корпорации «РЭНД». Он занимался внедрением компьютеров в математические исследования. В 1973 г. у Беллмана обнаружили опухоль мозга. Операция по удалению опухоли прошла успешно, но послеоперационные осложнения сделали его калекой. Он был вынужден уйти из корпорации и остался работать в университете Южной Калифорнии. Болезнь оказалась неизлечимой – Беллману делали операцию за операцией, но все было бесполезно. Несмотря на то, что он уже не мог работать, университет сохранил ему полную зарплату. Но ее не хватало для того, чтобы покрыть все траты на лечение. В прошлом богатая семья оказалась в очень трудном материальном положении. Им пришлось продать дом и жить крайне скромно. Особенно тяжелым был последний год. Несмотря на физические проблемы, Беллман активно продолжал математические исследования и за последние 10 лет жизни опубликовал около 100 статей. В эти же годы им написаны книги «Аналитическая теория чисел» (1980), «Математические методы в медицине» (1983), и «Преобразование Лапласа» (1984).

Беллман стал лауреатом многих премий и членом различных научных обществ, в том числе членом Национальной академии наук США.

Умер Ричард Беллман 19 марта 1984 г. в Лос-Анджелесе.

Л.В. Канторович

Канторович Леонид Витальевич родился 6 января 1912 г. в Петербурге в семье врача. В детстве он проявлял интерес к математике, а уже в 14 лет поступил на физико-математический факультет Ленинградского университета (ЛГУ), который окончил в 1930 г. В 18 лет Канторович стал преподавателем математики в Ленинградском институте инженеров промышленного строительства (ЛИИПС). В 20 лет он уже был доцентом ЛГУ и профессором, заведующим кафедрой математики ЛИИПС, а в 22 – профессором ЛГУ. Когда на базе ЛИИПС было образовано Высшее военно-инженерное техническое училище, рядовому Канторовичу присвоили звание майора.

Исследования Канторовича 1930-х годов связаны с задачами функционального анализа и их применением к вопросам рационализации некоторых областей производства. Они относятся к теории дифференциальных уравнений, общей теории функций, теории конформных отображений. Канторович предложил новые методы сопряженных тригонометрических рядов для конформного отображения и вариационный метод решения предельных задач

эллиптического типа. В 1933 г. им разработан метод понижения размерности вариационной задачи, предназначенный специально для решения дифференциальных уравнений в частных производных и приводяший к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1934 г. он предложил также метод понижения размерности дифференциальной задачи, не связанный с вариационной проблемой.

Одной из первых в СССР была работа 1934 г. Л.В. Канторовича и Г.М. Фихтенгольца о пространствах ограниченных измеримых функций. В 1935 г. Канторович разработал развернутую аксиоматику полуупорядоченных пространств. Фундаментальные результаты его исследований легли в основу последующих многочисленных работ советских и зарубежных математиков. Теория пространств Канторовича, названных К-пространствами, содержит важные результаты, полученные им самим и его учениками. Классической стала книга Канторовича 1936 г. «Методы приближенного решения уравнений в частных производных» и дополненный в 1941 г. вариант этой книги «Приближенные методы высшего анализа».

После образования в 1939 г. Ленинградского отделения Математического института (ЛОМИ) им. В.А. Стеклова АН СССР Канторович принимал активное участие в его работе.

С Военным училищем Леонид Витальевич в 1941 г. был эвакуирован в Ярославль, где написал курс теории вероятностей на военную тематику, изданный в 1946 г. В эвакуации он занимался иссследованием некоторых вопросов вариационного исчисления и дифференциальных уравнений.

Во время войны Канторович начал цикл работ по применению функционального анализа в вычислительной математике. Он исследовал некоторые вопросы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений, выполнял работы прикладного значения, в частности о методах рационального раскроя металла и применения теории вероятностей к некоторым задачам оборонного значения.

В 1945–1947 гг. Канторович предложил один из градиентных методов решения операторных уравнений – метод наискорейшего спуска. Впоследствии были построены различные варианты этих методов, предложены и исследованы методы, близкие к методам Ньютона и наискорейшего спуска.

Градиентным методам решения задач линейной алгебры посвящены работы Л.В. Канторовича 1947–1948 гг.

Важной частью нелинейного анализа является общая теория приближенных методов, созданная Л.В. Канторовичем. Этой теории посвящена его работа 1948 г. «Функциональный анализ и прикладная математика». За данную статью Канторович в 1949 г. получил Государственную премию. В 1948 г. ему поручили заведовать новым Вычислительным отделом ЛОМИ, выполнявшим некоторые расчеты для атомного проекта. Его организаторские способности и новаторские идеи параллельного счета позволили выполнить работу в срок, и год спустя он получил Правительственную премию за участие в атомном проекте.

Значительное влияние на развитие приближенных методов решения интегральных уравнений оказала книга Л.В. Канторовича и В.И. Крылова

«Приближенные методы высшего анализа» (1962). В книге указаны оценки ошибок методов механических квадратур и вырожденного ядра применительно к задаче о решении неоднородного уравнения, расширена область применения метода последовательных приближений, метод механических квадратур дополнен приемом выделения особенности. Вопросы сходимости и оценки ошибки методов механических квадратур, вырожденного ядра, моментов, интерполяционного метода Канторович рассматривал ранее (1948) в качестве примера применения общей теории приближенных методов.

Рассмотрим подробнее вклад Канторовича в разработку математических проблем экономики. Экономическими задачами он начал заниматься в конце 30-х годов XX в. В 1938 г. к Леониду Витальевичу обратились за консультацией сотрудники Ленинградского фанерного треста. Требовалось рационально распределить пять видов работ по станкам восьми типов. Он не только решил эту конкретную задачу, но и разработал общие принципы оптимального производственного планирования.

Об этих результатах Канторович доложил в 1939 г. в ЛГУ и ЛИИПС. Дополненная стенограмма этих докладов, изданная отдельной брошюрой под названием «Математические методы организации производства», была первой работой по математической экономике, из нее вырос новый раздел анализа, позже названный линейным программированием. Идеи Канторовича не встретили понимания. Брошюра, разосланная во многие министерства, осталась незамеченной.

Рукопись работы, написанной в 1942 г. в Ярославле, «Экономический расчет, обеспечивающий наиболее целесообразное распределение ресурсов», была передана в Госплан, но встречена там более чем прохладно. Идеи этой работы противоречили принятой в то время централизации принятия решений и для принимающих решения выглядели подозрительно. В 1942 г. Канторович написал статью «О перемещении масс», в которой рассматривал транспортную задачу и которую также не смог опубликовать.

Отношение к идеям Канторовича начало меняться только в конце 1950-х годов. В 1957 г. Канторович заново редактирует свою работу 1942 г., но опубликована она только в 1959 г. после того, как появились переводы первых экономических работ Канторовича в США и после избрания его в 1958 г. членом-корреспондентом АН СССР по экономическому отделению. Книга была переведена на английский, французский, японский, румынский, словацкий, польский, сербский, испанский языки. В США тех же взглядов на экономику придерживался Т. Купманс, с которым Канторович переписывался с 1956 г. На экономическом факультете Ленинградского университета в 1958/59 учебном году для лучших выпускников и других слушателей был организован курс по изучению дополнительных глав математики, линейного программирования и его применению в экономике. С тех пор линейное программирование постепенно включали в программы технических вузов.

В работах Канторовича по линейному пограммированию был усовершенствован аппарат исследования и решения задач оптимизации линейного фун-

кционала при линейных ограничениях. Позднее был сформулирован принцип двойственности и дана его экономическая трактовка, показана необходимость алгоритмических подходов при построении методов их решения, произведена оценка сложности решения в зависимости от размерности задач.

В 60-е годы XX в. развернулась дискуссия о математических методах в экономике. Академик Василий Сергеевич Немчинов выделял пять базовых методов исследования при планировании: балансовый, математического моделирования, векторно-матричный, экономико-математических множителей (оптимальных общественных оценок), последовательного приближения.

В то же время Л.В. Канторович объединял математические методы в четыре группы:

– макроэкономические модели, куда относил балансовый метод и модели спроса;

– модели взаимодействия экономических подразделений (на основе теории игр);

– линейное моделирование, включая ряд задач, несколько отличающихся от классического линейного программирования;

– модели оптимизации, выходящие за пределы линейного программирования (динамическое, нелинейное, целочисленное, стохастическое программирование).

С точки зрения применения математических методов в реальных процессах планирования, наиболее предпочтительным является метод линейной оптимизации, разработанный Канторовичем в 30-е годы XX в. Чаще всего задача линейного программирования применяется при моделировании организации производства. Метод линейной оптимизации с того момента, как он был разработан Канторовичем, развивался и продолжает развиваться. Основываясь на объективных оценках, американский математик Дж. Данцигом разработал симплекс-метод решения задач линейного программирования.

До 1964 г. Канторович работал профессором Ленинградского университета, а после – в Сибирском отделении АН СССР и Новосибрском университете, где занимался теорией функций и функциональным анализом. Он возглавлял Математико-экономическим отделением Института математики СО АН СССР. Под руководством Канторовича проводились работы по линейному программированию и его применению к оптимальному планированию народного хозяйства.

В 1964 г. Канторович был избран действительным членом АН СССР по Сибирскому отделению. В 1965 г. за разработку линейного программирования Л.В. Канторовичу, В.В. Новожилову и В.С. Немчинову была присуждена Ленинская премия.

Математико-экономический отдел под руководством Канторовича решал самые разнообразные народно-хозяйственные задачи, например задачу разработки оросительных систем для полей, имеющих неоднородный рельеф.

В начале 1970-х годов Канторович переехал в Москву.

В 1975 г. Канторовичу и американскому экономисту Т. Купмансу была присуждена Нобелевская премия по экономике со следующей формулировкой: «За вклад в теорию оптимального использования ресурсов» [3].

Умер Леонид Витальевич 7 апреля 1986 г.

Н.Н. Моисеев

Моисеев Никита Николаевич родился 23 августа 1917 г. в семье потомственных русских интеллигентов. Его дед занимал крупный пост в Министерстве железных дорог, а отец, Николай Сергеевич, был приват-доцентом Московского университета. Мать, Елена Николаевна, рано умерла, оставив двух маленьких сыновей на попечении отца, деда и бабушки. Несмотря на сложные условия жизни в послереволюционной России, семья Моисеевых не покинула страну даже тогда, когда поступили предложения из заграницы.

Детство Никиты закончилось в 1928 г., когда арестовали сначала деда, а затем отца, который погиб в заключении. Еще в школе Моисеев проявлял интерес к математике и занимался в математическом кружке, организованном И.М. Гельфандом, доцентом механико-математического факультета МГУ. Весной 1935 г. участники этого кружка: Н.Н. Моисеев, Ю.Б. Гермейер и Б.В. Шабат стали лауреатами математической олимпиады школьников. Это давало им право не сдавать математику при поступлении на механико-математический факультет МГУ. Хотя Моисеев успешно сдал и другие вступительные экзамены, в МГУ его не приняли. Стать студентом помешали дворянское происхождение и сведения о репрессированном отце. Годом позже Моисеева все-таки зачислили в МГУ благодаря помощи И.М. Гельфанда и декана мехмата Л.А. Тумаркина.

В 1941 г. Моисеев окончил мехмат МГУ по специальности «Функциональный анализ» и в том же году после призыва в армию был направлен на учебу в Военно-воздушную академию им. Н.Е. Жуковского. В 1942 г., получив диплом инженера, Моисеев был отправлен на Волховский фронт старшим техником по обслуживанию самолетов. К моменту окончания войны он служил в должности инженера дивизии по вооружению.

Случайно ознакомившись с немецкой книгой по баллистике, Моисеев изложил на десяти страницах свои взгляды по вопросам управляемости ракет и послал их в Военно-воздушную академию им. Н.Е. Жуковского своему бывшему преподавателю. Оказалось, что эта его работа была одним из первых критических обзоров немецких трофейных документов.

Демобилизовался Моисеев в 1948 г. в звании капитана. В 1949 г. он защитил кандидатскую диссертацию. В 1948–1950 гг. Никита Николаевич преподавал в МВТУ им. Н.Э. Баумана. Одновременно он работал в НИИ-2 Министерства авиационной промышленности, где выполнял научные исследования, связанные с задачей расчета рассеяния и обработки результатов стендовых испытаний реактивных снарядов.

В 1949 г. арестована мачеха Моисеева, а сам он вынужден был уехать в Ростов-на-Дону, где преподавал в университете теоретическую механику. Там же он начал заниматься исследованием движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. В 1955 г. Моисеев защитил докторскую диссертацию, вернулся в Москву и был назначен деканом аэромеханического факультета Московского физико-технического института (МФТИ). В конце 1960-х годов Никита Николаевич организовал в МФТИ факультет управления и прикладной математики и был его первым деканом.

В 1950–1960 гг. актуальными были задачи расчета траекторий космических аппаратов. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина при наличии фазовых ограничений было связано со многими трудностями. Моисеев предложил прямой метод вариации фазового пространства, что значительно упростило поиск оптимальных траекторий.

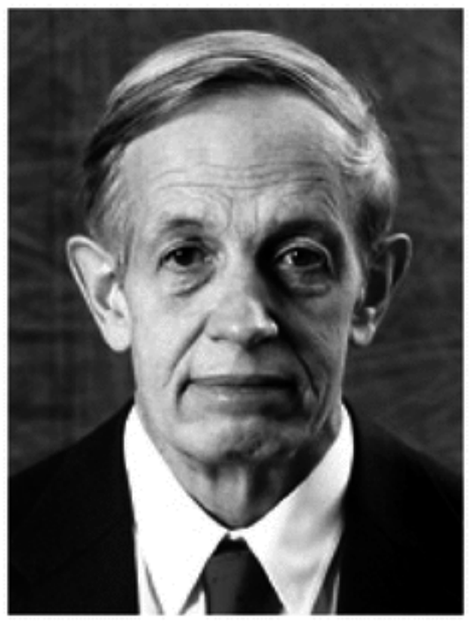
В середине 1960-х годов важнейшей задачей считалось применение линейного программирования для планирования народного хозяйства. Моисеев усовершенствовал методы рационального распределения ресурсов. В 1967 г. он был назначен заместителем директора Вычислительного центра АН СССР и начал работу по созданию вычислительных методов для решения аэрокосмических задач. Он активно сотрудничал с исследовательскими и проектными организациями, занятыми разработкой авиационной и ракетной техники, что требовало новых подходов и новых математических методов. Вместе с ведущими авиаконструкторами Моисеев автоматизировал многие задачи проектирования истребителей. Теоретические результаты этих исследований были обобщены и опубликованы Моисеевым совместно с В.В. Румянцевым в монографии «Динамика тела с полостями, содержащими жидкость».

Огромной заслугой Моисеева является теоретическая разработка и компьютерный расчет последствий одновременного взрыва нескольких водородных бомб. Доказано, что это приведет к явлению, получившему название «ядерная зима», которое будет иметь катастрофические последствия для человечества. К таким же выводам пришел американский ученый К. Саган [55].

С сокращением финансирования научных исследований Моисеев сосредоточился на вопросах экологии научного познания. В последние годы жизни основные усилия Никиты Николаевича были направлены на борьбу с экологическим невежеством, на формирование у людей нравственного отношения к Природе.

Умер Н.Н. Моисеев 29 февраля 2000 г.

Джон Форбс Нэш-младший



Нэш-мл. Джон Форбс родился 13 июня 1928 г. в Блуфилде (Западная Вирджиния) в семье инженера-электрика и учительницы английского языка. По собственному признанию Форбса, в школе на уроках математики ему было скучно. После окончания школы он поступил в Политехнический институт Карнеги на отделение химии.

Разочаровавшись в химии, Джон решил заняться математикой. Благодаря своим блестящим способностям он за три года окончил университет, получив в 1948 г. степень и бакалавра, и магистра. В 1948 г. в Принстонском университете Нэш-мл. начал интересоваться топологией, алгебраической геометрией и теорией игр. Посвященную теории игр диссертацию объемом всего в 27 страниц Нэш-мл. защитил в 22 года в Принстоне в 1950 г. и получил степень доктора. Через 44 года за эту работу он получил Нобелевскую премию как «пионер в анализе равновесия в теории некооперативных игр».

В США во второй половине XX в. теория игр динамично развивалась и влияла не только на экономику, но и на стратегию внешней политики.

Теория игр – это раздел прикладной математики, методы которого находят применение в экономике, социологии, психологии и других областях знаний. Каждая из «играющих» сторон имеет свою цель и использует собственную стратегию, разработанную с учетом представлений о противнике, его возможностях и особенностях мышления. В середине 1940-х годов была издана книга Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», которая положила начало применению теории игр в экономике.

Нейман и Моргенштерн не смогли адаптировать теорию игр к решению простейших жизненных ситуаций. Это сделал Нэш-мл. в своей диссертации, в которой, разрабатывая этот математический метод, учел многие психологические нюансы в поведении человека. Если Нейман и Моргенштерн пытались разобраться с играми, результатом которых является абсолютный проигрыш одной из сторон, то Нэш-мл. рассматривал случай, когда разумнее искать общую выгоду. Для этого он рассматривал состояние, которое впоследствии стал называть равновесием Нэша. Смысл состояния заключается в следующем: в каждой игре существует набор стратегий участников, когда ни один из них не может изменить свое поведение, чтобы добиться большего успеха, если другие участники свои стратегии не меняют. Это значит, что игрокам невыгодно отказываться от этого баланса, поскольку в противном случае они только ухудшат ситуацию. Целью игроков является максимально успешное сочетание личной и коллективной выгоды.

Следует отметить, что в экономической политике состояние равновесия Нэша соответствует рыночной и плановой экономике, что особенно важно в период финансово-экономического кризиса.

После защиты диссертации в 1950 г. Нэш-мл. в течение года работал инструктором в Принстоне в корпорации «РЭНД», а затем перешел

в Массачусетский технологический институт на факультет математики. Получение стипендии позволило ему в течение 1956/57 учебного года стажироваться в Институте перспективных исследований в Принстоне. Вскоре Нэш-мл. женился.

В 1957 г. его научные интересы сместились в область абстрактной математики. Он написал ряд блестящих статей по дифференциальным уравнениям, дифференциальной геометрии и алгебраической геометрии. Его считали наиболее перспективным молодым математиком в мире. Он мог получить медаль Филдса в 1958 г., но его исследования не были достаточным образом оформлены. В 1962 г. кандидатура Джона Нэша-мл. не рассматривалась Филдсовским комитетом в виду состояния его здоровья.

В 1958 г. у Нэша-мл. появились симптомы психического заболевания, и в 1959 г. он лишился работы. Считая, что его преследуют, он решил отказаться от гражданства США и просил политического убежища во Франции и ГДР. По просьбе правительства США он был арестован французской полицией и депортирован на родину.

Состояние Нэша-мл. нормализовалось в 1980-е годы. Постепенно он научился отделять иллюзию от реальности. Это не означало, что Нэш-мл. выздоровел, скорее он научился жить с болезнью. Он стал оперировать осмысленными математическими выражениями, высказывания обрели логику. Нэша-мл. допустили к преподаванию и научной работе. Все же он сумел победить тяжелую болезнь. Нэшу-мл. посвящен художественный фильм, получивший «Оскара» – высшую кинематографическую награду. Русскоязычный вариант этого фильма называется «Игры разума», а в переводе с английского «Beautiful mind» означает «Замечательный ум».

В 1996 г. Нэш-мл. выступил с докладом о своей болезни на Международном конгрессе по психиатрии. В 2002 г. Нэш-мл. выступил с докладом на Международном математическом конгрессе в Пекине. В 2007 г. он был основным докладчиком на конференции, посвященной теории игр.

Лотфи Заде

Заде Лотфи (Лютфи) Аскер родился 4 февраля 1921 г. в Баку. Первым языком для мальчика стал русский. Его отец был иранским подданным и занимался бизнесом, мать – подданной Российской империи, детским врачом. Несколько лет Заде посещал русскую школу в Баку. В 1931 г. семья переехала в Иран. Причиной отъезда было введение новых правил в СССР, согласно которым жители Южного Азербайджана должны были принять советское гражданство или покинуть страну.

Л. Заде окончил Американский колледж в Тегеране, а затем Тегеранский университет по специальности «Электротехника». В 1944 г. он уехал в США и поступил в Массачусетский технологический институт, который успешно окончил в 1946 г. со степенью магистра по специальности «Электротехника». Затем он перевелся на

должность преподавателя электротехники в Колумбийский университет, получил степень доктора в 1949 г. и проработал там почти 10 лет, пройдя путь от ассистента (1950) до профессора (1957).

Международное признание Заде получил благодаря диссертации, посвященной вопросам частотного анализа нестационарных цепей. Введенное им понятие нестационарной передаточной функции имело многочисленные приложения в анализе нестационарных линейных систем.

В 1950 г. совместно с Дж. Рагазини Заде предложил интересное обобщение винеровской теории предсказания. Эта работа нашла применение в проектировании фильтров с конечной памятью и считается классической. В 1952 г. также в соавторстве с Дж. Рагазини он разработал метод z-преобразования для дискретных систем, широко применяемый при создании систем автоматического управления и цифровых фильтров. Разработанный им в 1953 г. новый подход к нелинейной фильтрации заложил основы проектирования оптимальных нелинейных процессоров для обнаружения полезных сигналов в шуме.

В 1957 г. Заде становится профессором Колумбийского университета и по рекомендации Норберта Винера в 1959 г. переезжает в Беркли, чтобы работать в Калифорнийском университете. В 1963 г. он создал теорию пространства состояний, в корне изменившую представления о теории управления, и вместе с Чарльзом Дезоиром опубликовал книгу «Теория линейных систем».

К середине 1960-х годов Заде стал известным специалистом в области теории систем, теории автоматического управления и их приложений. С 1963 по 1968 г. он руководил кафедрой электротехники Калифорнийского университета.

Первые две основополагающие статьи по нечетким множествам были закончены Заде в начале 1965 г. и одновременно переданы в научный журнал «Информация и контроль», издаваемый на английском языке и журнал АН СССР «Проблемы передачи информации». Статья «Нечеткие множества» в американском журнале была напечатана быстро, а статья «Тени нечетких множеств» в журнале «Проблемы передачи информации» увидела свет только в 1966 г. Первый доклад по нечетким множествам был прочитан Заде на русском языке в 1965 г. на конференции по кибернетике, проходившей в СССР на борту лайнера «Адмирал Нахимов». Доклад был положительно оценен научным сообществом и вызвал интересные дискуссии.

Введение понятия нечеткого множества – это попытка математической формализации нечеткой информации для построения математических моделей. В статье было введено много новых понятий и доказана необходимость ослабления закона исключенного третьего.

В статье 1968 г. «Меры вероятности нечетких событий» Заде ввел понятие нечеткого события, т. е. события, сформулированного словами с неточным смыслом, например «x примерно равен 2», и дал обобщение математических выражений для числовых характеристик нечетких событий.

Интересна реакция ученых и политиков на работы Л. Заде. В 60–70-е годы XX в. его неортодоксальные идеи встретили весьма настороженный, а порой и холодный прием в различных научных кругах, особенно в среде «чистых» математиков.

В СССР Н.Н. Моисеев выступил инициатором издания на русском языке книги статей Л. Заде по лингвистическим переменным. Она вышла в свет в 1976 г. в издательстве «Мир» под названием «Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений» и является первой монографией Заде. Двумя годами раньше, в 1974 г., на русском языке в сборнике «Математика сегодня» была опубликована программная работа Л. Заде «Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений», оказавшая значительное влияние на становление нечеткой математики в нашей стране.

В США направление исследований, связанное с теорией нечетких множеств, находилось под негласным запретом. Заде рассказывал, что на уровне Департамента образования США велись разговоры о запрете преподавания теории нечетких множеств в университетах.

Японцы, охотно использующие все достижения науки, не оставили без внимания и теорию нечетких множеств. Так, электропоезд, следовавший из Токио до научного городка Сендай, снабдили таким управляющим устройством, что пассажиры не могли почувствовать ни момента начала движения, ни ускорения. В быту стали незаменимы стиральные машины, которые сами определяют степень загрязненности белья, его объем, вид ткани и на основании этого безошибочно выбирают оптимальный режим стирки. Появились видеокамеры с автоматическим наведением фокуса, «умные» кондиционеры и пылесосы, микроволновые печи и телевизоры.

В 1980-е годы Заде продолжал заниматься проблемами развития нечеткой логики и теории возможностей и проблемы моделирования рассуждений здравого смысла, например, учет экспертных оценок, являющихся неполной и не всегда объективной информацией. Под нечеткой логикой Заде понимает обобщение многозначной логики, представляющее более широкие возможности для работы с неопределенностью и неточностью в задачах представления знаний и анализа решений. Нечеткая логика смогла описать языком цифр многозначные суждения, парадоксальные оценки и передать тончайшие оттенки человеческого восприятия. Использование достижений нечеткой логики в Японии различно: от составления букетов икебаны до создания беспилотного вертолета, управляемого голосом с земли. Благодаря применению нечеткой логики, в науке стало возможным более широкое использование экспертных оценок. Все знания, которые эксперт готов передать, хранятся в его памяти в терминах «сильный кашель – слабый кашель», «высокая температура – низкая температура», «часто болит голова – редко болит голова» и т. д. Эксперт употребляет такие термины, которые трудно сводить к цифрам, что вызывает дополнительные проблемы. Заде создал новый язык общения между человеком и компьютером, понимающим исключительно сухой язык цифр. В математике появился новый термин – лингвистическая переменная. Нечеткая экспертная система приносила Фудзи-банку более 700 тыс. долл. в месяц чистого дохода. Применение теории Заде принесло Японии миллиарды долларов. И сегодня самые известные компании Японии широко используют результаты его открытий в производстве фото- и видеокамер, стиральных машин, пылесосов, в управлении промышленными процессами.

Вслед за японцами математические основы нечеткой логики стали использовать американцы и европейцы, особенно в военной промышленности. Например, зенитные ракеты «поумнели». Иногда задача состоит не в том, чтобы сбить межконтинентальную ракету в точное время, в заданном месте, а в том, что ее просто нужно сбить. Вместо решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, можно обойтись гораздо более простой задачей подруливания. Зенитная ракета не должна быть такой «умной», чтобы вычислить, в какой точке и каким образом она «поймает» свою цель, но достаточно «умной» для того, чтобы достичь ее. Информация о том, как «догнать» цель, может быть записана на одном кристалле (чипе) на языке нечетких правил Заде.

Американские чиновники запретили вывозить из страны все, что связано с новой технологией. На коробочки с дискетами, содержащими элементарные программы нечеткой логики, стали клеить: «Запрещено к вывозу из США».

Среди работ Л. Заде, написанных в 1970-е годы, следует отметить «Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений» (1973), «Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений» (1975–1976), «Нечеткие множества как основа теории возможного» (1978). Лингвистической переменной Заде называет переменную, значениями которой являются слова и словосочетания на некотором естественном или искусственном языке. Эти работы открыли эру промышленного нечеткого управления. В настоящее время мера возможности и двойственная ей мера необходимости являются основными средствами моделирования неопределенности в интеллектуальных системах. Низкую эффективность компьютеров в моделировании гуманитарных наук Заде объясняет проявлением принципа несовместимости, согласно которому высокая точность невозможна при высокой степени сложности.

Объединение методологий теории нечетких множеств, нейронных сетей, генетических алгоритмов, вероятностных рассуждений и других методов моделирования и обработки неопределенностей привело Заде к созданию в 1991–1993 гг. нового научного направления, известного под названием «мягкие вычисления». В работе «Мягкие вычисления, нечеткие множества и нейронные сети» (1992) Заде одним из первых предложил вариант построения гибридной интеллектуальной системы путем совместного использования разнородных моделей в интересах взаимной компенсации их недостатков и объединения преимуществ. Мягкие вычисления допускают неточность, неопределенность и частичную истинность, что позволяет достичь легкости обработки данных, низкой стоимости решения и более точного совпадения с реальностью.

Помимо мягких вычислений, в 1990-е годы интересы Заде были связаны с разработкой методологии вычислений со словами, а также вычислительной теории перцептивных оценок. В отличие от традиционных вычислений, имеющих дело с числами и символами, вычисление со словами оперирует словами и предложениями естественного языка. Среди опубликованных работ Заде можно отметить следующие: «Нечеткая логика и исчисления нечетких правил и нечетких графов» (1997), «От вычислений с числами к вычислениям со словами, от манипуляции с измерениями к манипуляции с перцептивными

оценками» (1999–2001), «Заметки о вычислительной теории перцептивных оценок, основанной на вычислениях со словами» (2000).

В современной теории нечетких множеств Л. Заде можно выделить три основных направления: нечеткую математику; нечеткое моделирование технических систем и процессов, поддающихся измерению; моделирование человеческих процессов восприятия и принятия решений на основе гранулирования информации и вычислений со словами. В настоящее время в рамках первых двух направлений достигнуты впечатляющие результаты, которые послужат основой для новых достижений. Последнее направление активно развивается, привлекая все большее число исследователей.

Крайне сложно перечислить все награды и премии, которых был удостоен Заде, все академии и научные общества, членом которых он является.

Глава 26

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

> Математический анализ ничем не отличается от всякой другой науки и имеет свой ход идей, движущийся не только поступательно, но и кругообразно, с возвращением к группе прежних идей, правда, всегда в новом освещении.
>
> *Н.Н. Лузин*

Расхождение современных физических представлений с идеями математического анализа

Классический математический анализ формировался на основе классической механики, идеи которой для современной физики являются устаревшими. Однако большинство математических моделей реального мира строится на базе стандартного математического анализа и стандартного понимания предела, основанного на идее непрерывности и возможности неограниченного деления надвое.

При не слишком больших и не слишком малых (по сравнению с человеком) размерах физическое пространство достаточно точно описано в геометрии Евклида. При значительном увеличении или, напротив, уменьшении размеров точность становится недостаточной. О строении физического пространства в «очень большом» и в «очень малом» наши знания недостаточны.

По-видимому, общепринятой является точка зрения, согласно которой пространство в целом конечно, однако столь велико, что утверждение о бесконечности Вселенной описывает реальность не хуже, чем утверждение, что Земля – шар. Со множеством оговорок принято считать, что луч света, направленный из некоторой точки пространства в какую-либо сторону, вернется в ту же точку с другой стороны.

Мы мало знаем о микромире. Одна из наиболее обсуждаемых гипотез, лежащая в основе так называемой теории квантования пространства-времени, состоит в том, что временные и пространственные промежутки нельзя неограниченно делить пополам, и существует минимально возможный для таких промежутков конечный размер. Структура физического пространства (или времени) на столь малых интервалах уже вовсе не соответствует математической модели вещественных чисел.

Любая математическая концепция может описывать действительность не исчерпывающим образом, а лишь приблизительно, огрубленно. Разумно принимать принцип множественности моделей и считать, что действительность описывается сразу целой совокупностью математических моделей, частично противоречащих друг другу. Принято считать, что физическое

пространство одновременно описывается несколькими моделями, одна из которых – обычная евклидова геометрия, другая предполагает минимальный пространственный размер (квант пространства), третья – существование бесконечно малых расстояний и т. д.

Во второй половине XX в. появились нестандартные методы математического анализа. В современном понимании их предназначение заключается в привлечении двух различных – стандартной и нестандартной – моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Эти методы можно объединить в два направления.

Первое направление обычно называют нестандартным анализом. Оно состоит из приложений теории нестандартных моделей к исследованиям в традиционных областях математики: математическом анализе, теории функций, теории дифференциальных уравнений, топологии и др. Для нестандартного анализа характерно широкое использование давно известных в практике естествознания концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи за ним закрепилось другое название – инфинитезимальный анализ, которое связано с именем американского математика Абрахама Робинсона, специалиста по теории моделей. Робинсон сумел строго обосновать нестрогие, но приводящие к успеху рассуждения классиков математического анализа XVII–XVIII вв.

Нестандартный (инфинитезимальный) анализ бурно развивается и уже повлиял на систему общематематических представлений. Он содержит новое понимание метода неделимых, восходящего к глубокой древности, и синтезирует подходы к дифференциальному и интегральному исчислению, предложенные еще Лейбницем. В наши дни инфинитезимальный анализ находит применение во всех разделах современной математики. Наиболее заметные изменения происходят в негладком анализе, в теории вероятностей и теории меры, в качественной теории дифференциальных уравнений и математической экономике.

Для второго направления нестандартных методов анализа – булевозначного анализа – характерно использование таких терминов, как спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, *B*-множества и изображения объектов в моделях. Становление этого направления связано с работами Пола Дж. Коэна по гипотезе континуума. Оно привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа: теории пространств Канторовича, теории алгебр фон Неймана, выпуклом анализе и теории векторных мер.

Нестандартный (инфинитезимальный) анализ

Инфинитезимальный анализ в современном понимании возник в 1960 г., когда А. Робинсон показал, что путем относительно небольших уточнений нестрогие рассуждения Г. Лейбница и его последователей можно сделать строгими. Кроме того, идеи Робинсона оказались полезными для построения математических моделей физических явлений и развития новых теорий. Эти

идеи делают более короткими доказательства многих теорем и могут стать важной частью будущей физической картины мира.

Из истории развития нестандартного анализа. Что касается истории математического анализа, то наиболее явно излагаемый подход проявился в работах немецкого ученого Готфрида Лейбница. В мае 1984 г. исполнилось 300 лет с того дня, как символы dx и dy впервые появились на страницах математических изданий, а именно в знаменитом мемуаре Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» [82].

Время возникновения нестандартного анализа можно определять двояко: конец XVII – начало XVII вв., если ориентироваться на работы Лейбница, или, принимая за начало отсчета доклад Абрахама Робинсона на одном из семинаров Принстонского университета, осень 1960 г.

В XIX в. практически все математики отказались от точки зрения Лейбница, который считал бесконечно малые не переменными величинами, а постоянными. В то же время многие физики, не задумываясь о природе бесконечно малых, использовали их практически так же, как когда-то использовал Лейбниц. Некоторые математики пытались построить непротиворечивую теорию бесконечно малых на принципах, отличающихся от принципов Коши. Феликс Клейн указал, что для этого нужно отказаться от одной из аксиом действительных чисел (аксиомы Архимеда). В 1934 г. норвежский математик Туральф Альберт Сколем ввел новые числа, получившие название гипердействительных и установил их свойства. Кульминацией исследований в этой области стали работы американского математика Абрахама Робинсона. Используемые им гипердействительные числа включают в себя обычные действительные числа и постоянные неархимедовы бесконечно малые. Математический анализ, который трактует бесконечно малые величины отлично от общепринятой точки зрения, Робинсон назвал нестандартным анализом.

Итак, до 1961 г. понятие бесконечно малой постоянной величины, бесконечно малого числа третировалось как нестрогое или даже как бессмысленное. Робинсон впервые обнаружил, что этому понятию можно придать точный математический смысл.

Основываясь на книге В.А. Успенского «Что такое нестандартный анализ?» [82], коротко расскажем об истории развития новых идей. В 1961 г. появилась статья Робинсона «Нестандартный анализ» в трудах Нидерландской академии наук. В ней были намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, в аналитической механике). За «твердость» основы пришлось «платить» повышением сложности математического аппарата и отдалением от физической наглядности.

В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагающие нестандартную теорию: в 1962 г. – книга У.А.Дж. Люксембурга «Нестандартный анализ. Лекции о робинсоновой теории бесконечно малых и бесконечно больших чисел», в 1966 г. – работа Робинсона «Нестандартный

анализ» и в 1969 г. – книга М. Маховера и Дж. Хиршфельда «Лекции о нестандартном анализе». Наибольший резонанс вызвала работа Робинсона, вышедшая в известной серии «Исследования по логике и основаниям математики». В девяти первых главах этой монографии излагались построение необходимого логико-математического аппарата и многочисленные приложения – к дифференциальному и интегральному исчислению, общей топологии, теории функций комплексного переменного, теории групп Ли, гидродинамике и теории упругости.

В 1966 г. была опубликована статья А.Р. Бернстейна и А. Робинсона, в которой впервые методами нестандартного анализа было получено решение ранее поставленной проблемы, относящейся к обычным, «стандартным» математическим объектам. Доказанная в этой статье теорема представляет собой отнюдь не единственный, хотя, быть может, наиболее эффектный пример применения методов нестандартного анализа. Число и разнообразие таких применений неуклонно растут.

Теория Робинсона закладывает прочный фундамент для применения бесконечно малых. В XXI в., вероятно, вновь будут обучать студентов оригинальным эвристическим идеям Ньютона и Лейбница. В американских университетах штата Висконсин и в Массачусетсском технологическом институте студенты уже сейчас имеют возможность, выбрать: изучать эпсилон-, дельта-теорию Вейерштрасса или теорию Робинсона. Некоторые итоги такого рода преподавания были подведены в методической статье, опубликованной в 1976 г. в «Американском математическом ежемесячнике». Статья заканчивается следующими словами: «Опасения… что те студенты, которые будут изучать математический анализ при помощи инфинитезимальных (бесконечно малых) элементов, в меньшей степени овладеют основными навыками, должны быть, без сомнения, сняты. Более того, представляется весьма вероятным, что использование инфинитезимального подхода сделает курс математического анализа гораздо более живым и увлекательным как для преподавателей, так и для студентов» [82].

Увлекающиеся историей математики могут попытаться ознакомиться с первоисточниками и изучить лучшие математические трактаты великих математиков (например, «Дифференциальное исчисление» Эйлера – одно из наиболее богатых идеями сочинений за всю историю математики). Многие математические открытия, известные сейчас в том виде, который они приняли после «кошианской» реконструкции основ анализа, первоначально были сделаны на основе «нестандартных» рассуждений. Примером может быть вопрос о разложении функции в степенные ряды.

Около полувека нестандартный анализ рассматривали как довольно тонкую и даже экзотическую логическую технику, предназначенную для обоснования метода актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Считалось также, что эта техника имеет ограниченную сферу применения и в любом случае не может привести к принципиальному пересмотру общематематических представлений.

В классической теории множеств класс всех множеств называют универсумом фон Неймана. В нестандартной теории множеств элементы

универсума фон Неймана называют внутренними множествами, т. е. синонимами являются множество в смысле теории Цермело – Френкеля и внутреннее множество. Теория внутренних множеств предложена Э. Нельсоном. Были разработаны аксиоматические подходы к изучению внешних множеств. Первый вариант такого формализма предложил К. Хрбачек. Схожую разновидность позже построил Т. Каваи.

В нестандартных теориях множеств допустимы аксиомы свертывания и аксиома выбора. Мир внешних множеств не является универсумом фон Неймана (классом всех множеств), так как в нем отсутствует аксиома фундирования. Аксиомой фундирования называют аксиому, которая формулируется следующим образом: «У каждого непустого множества есть элемент, пересечение которого с самим множеством пусто». Она была указана П. Бернайсом и К. Гёделем в 1941 г. и заменила аксиому регулярности, предложенную Дж. фон Нейманом в 1925 г. В конце 1970-х годов после опубликования работы по теории внутренних множеств Э. Нельсона (несколько позже – по теориям внешних множеств К. Хрбачека и Т. Каваи) взгляды на вопрос о месте и роли нестандартного анализа значительно расширились и изменились.

Нестандартный анализ завоевывает все большее признание. Состоялся ряд международных симпозиумов, посвященных исключительно нестандартному анализу и его приложениям. В сентябре 1986 г. в Ташкенте проходил Первый Всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Я. Бернулли. 19-я секция этого конгресса называлась «Нестандартный анализ в теории вероятностей».

С 28 мая по 4 июня 1989 г. в Стара Лесне (Словакия) проходил Международный симпозиум по математике с альтернативной теорией множеств, организованный физико-математическими факультетами Карлова университета в Праге и Университета им. Я. Коменского в Братиславе.

В монографии А.Г. Кусраева и С.С. Кутателидзе «Нестандартные методы анализа», изданной в 1990 г. Сибирским отделением издательства «Наука» впервые с единых методологических позиций были рассмотрены оба указанные выше направления, составляющие ядро современных нестандартных методов анализа.

В 1999 г. в Институте математики Сибирского отделения РАН было принято решение о подготовке серии монографий под общим названием «Нестандартные методы анализа», каждая из которых должна освещать различные аспекты этого математического направления.

В 2004 г. в Новосибирске в издательстве Института математики СО РАН вышла монография чешского математика Петра Вопенки «Альтернативная теория множеств», а в 2006 г. – книга Е.И. Гордона, А.Г. Кусраева и С.С. Кутателадзе «Инфинитезимальный анализ».

Новая математическая модель физической реальности. Мы пока не знаем, как в действительности устроено физическое пространство в «очень большом» и «очень малом». Классический математический анализ считает, что пространство бесконечно делимо, так как бесконечно малая считается переменной величиной, стремящейся к нулю. Не исключено, что

представление о бесконечно малых расстояниях, массах, зарядах и т. п., отличных от нуля, соответствует физической реальности. В соответствии с физическими воззрениями XX в. пространство квантовано и никакие размеры не могут быть меньше 10^{-33} см. Тогда для описания бесконечно малых величин потребуются бесконечно малые числа. Чтобы эти числа можно было подвергать простым арифметическим операциям, нужно ввести бесконечно большие числа как результаты деления единицы на бесконечно малые, а также такие нестандартные числа, которые не являются ни бесконечно большими, ни бесконечно малыми, а представляют собой результаты прибавления бесконечно малых к обычным действительным числам. Полученная система гипердействительных чисел, включающая все действительные как подсистему, претендует на то, чтобы стать альтернативой используемой ранее числовой оси.

Лауреат Нобелевской премии по физике Ричард Фейнман считает теорию, согласно которой пространство непрерывно, неверной, потому что она приводит к бесконечно большим величинам и другим трудностям; кроме того, она не дает ответа на вопрос о том, чем определяются размеры всех частиц. По этому же поводу Гильберт пишет, что подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение.

Расхождение между математическими понятиями и физическими представлениями давно уже зафиксировано самими математиками. Например, в известной книге «Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики» Д. Гильберт и П. Бернайс пишут о том, что на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математическое пространственно-временное представление о движении является физически осмысленным также и в случаях произвольно малых пространственных и временных интервалов. Более того, у нас есть все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который еще доступен нашему наблюдению.

В основе инфинитезимального анализа лежит практическое применение гипердействительных чисел, открытых в 1934 г. норвежским математиком Туральфом Сколемом и не нашедших применения в то время.

Гипердействительные числа. В традиционном классическом анализе существование бесконечно малых величин, отличных от нуля, противоречит аксиоме Архимеда, в соответствии с которой для любых двух чисел a и b, для которых $0 < a < b$, одно из неравенств $a + a > b$, $a + a + a > b$, … обязательно выполняется. Это означает, что для достаточно больших n число na станет больше b, каким бы малым a ни было, и каким бы большим ни было b.

Согласно открытию Абрахама Робинсона, можно успешно произвести расширение упорядоченного поля действительных чисел, введя неархимедово упорядоченное поле, если будут выполнены следующие условия:

– понятие целого числа должно быть рассмотрено как обычное бесконечно большое число;

– сузить понятие функции: рассматривать только внутренние функции, которые достаточно регулярны, так что к ним применимы все фундаментальные теоремы анализа, и которых в то же время бесконечно больше, чем стандартных функций.

Первое условие позволяет сохранить аксиому Архимеда, поскольку каждое вещественное число мажорируется целым числом.

Это расширение возможно осуществить, если ввести в рассмотрение гипердействительные числа. В неархимедово упорядоченное множество входят все действительные числа, а также бесконечно малые величины. На этом множестве сохраняются все важные свойства действительных чисел, но аксиома Архимеда для бесконечно малых не выполняется. Робинсон показал, как это сделать практически.

Гипердействительные числа – это искусственно созданный абстрактный математический объект. Поскольку целью данной книги не является подробное описание деталей их построения, ограничимся изложением некоторых идей, представленных в работе В.А. Успенского «Что такое нестандартный анализ?» [111].

Гипердействительную числовую прямую можно разбить на три части, тогда первая (слева направо) будет содержать отрицательные бесконечно большие числа, вторая – конечные числа, третья – положительные бесконечно большие числа.

На множестве конечных гипердействительных чисел рядом с каждым стандартным действительным числом расположено множество бесконечно близких к нему гипердействительных чисел, которое в память о Лейбнице стали называть монадой данного стандартного числа. Монада действительного числа получается путем добавления к нему отличных от нуля нестандартных бесконечно малых. Следовательно, множество конечных гипердействительных чисел разбито на непересекающиеся классы – монады, соответствующие стандартным действительным числам.

Как расширение действительных чисел гипердействительные числа включают в себя обычные действительные числа и нестандартные гипердействительные числа. Последние пока непривычны, что связано с определенными психологическими трудностями. Многим непонятно, где отводится место для новых чисел, где они помещаются на числовой оси. Они располагаются между действительными числами, заполняя пустоты между ними. Существование таких пустот можно принять, а можно и отвергнуть. Переход от действительных чисел к конечным гипердействительным числам путем добавления к первым конечных нестандартных чисел аналогичен переходу от рациональных чисел к действительным путем добавления иррациональных. Ведь можно (хотя это неудобно) считать, что рациональные числа заполняют всю числовую ось, так как существование действительных чисел противоречит теории квантования пространства-времени. Однако тогда нельзя будет извлекать квадратный корень из любого положительного числа. Так же, как добавление иррациональных чисел к рациональным

расширяет возможности математики, так и введение нестандартных гипердействительных чисел расширяет их еще больше. Практически в нестандартном анализе каждое действительное число «раздувается» в бесконечно малый интервал.

В нестандартном анализе на строгой математической основе частично реализуется идея Лейбница и его последователей о существовании бесконечно малых величин, отличных от нуля, которая в развитии математического анализа после Лейбница была заменена точным понятием предела переменной величины.

По этому поводу В.А. Успенский пишет: «Один из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины… а как величины постоянные… Такой подход хорошо согласуется как с интуицией естествоиспытателя, так и с реальной историей зарождения математического анализа. Что касается интуиции, то достаточно раскрыть любой учебник физики, чтобы натолкнуться на бесконечно малые приращения, бесконечно малые объемы и т. п. Все эти величины мыслятся, разумеется, не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю. Было бы неправильным считать подобного рода интуицию присущей лишь авторам учебников физики. Вряд ли какой-то математик воспринимает (наглядно) элемент дуги ds иначе, чем “очень маленькую дугу”. Любой математик, составляя соответствующее дифференциальное уравнение, скажет, что за бесконечно малое время dt точка прошла бесконечно малый путь dx, а количество радиоактивного вещества изменилось на бесконечно малую величину dN» [82].

Сделаем некоторое отступление от темы для уяснения природы бесконечно малых. Математическое описание физической реальности возможно только с известной степенью приближения. Так, форму Земли можно описать как шар, эллипсоид и геоид. Все три описания приблизительны, хотя последнее наиболее точно. Не следует думать, чем точность выше, тем описание лучше: революционным стало представление о Земле как о шаре, и, скорее всего, оно навсегда останется основным.

Следовательно, можно считать, что нестандартный анализ позволяет ввести новую математическую модель физической реальности. С помощью нестандартного анализа был обнаружен ряд новых фактов. Многие классические доказательства заметно выигрывают с точки зрения наглядности при изложении их с помощью методов нестандартного анализа. То, что введение нестандартного анализа расширяет возможности математики, практически уже не оспаривается. В нестандартном анализе можно построить аналоги всех основных понятий стандартного математического анализа: последовательности, пределов, непрерывности и т. д. Это дает возможность на базе нестандартного анализа построить многие нестандартные разделы математики. Нестандартное дифференциальное исчисление может конкурировать в простоте с общепринятым. Скорее всего, вопрос о статусе гипердействительных чисел будет решен вне математики, в динамическом процессе использования инфинитезимального анализа для моделирования неклассического движения.

Практическое применение инфинитезимального анализа. В [82] показано, как вводятся нестандартные критерии стандартных понятий. Одним из рассмотренных примеров является введение нестандартного критерия компактности произвольных векторных пространств. С его помощью можно без особого труда доказать теорему Тихонова о компактности произведения произвольного числа компактных пространств. При стандартном доказательстве этой теоремы, которое является сложным, используют аксиому выбора. Нестандартный анализ позволяет «спрятать» применение аксиомы выбора в построение нестандартной интерпретации с нужными свойствами, т. е. в предварительные основные конструкции. Это является одной из причин того, что нестандартные доказательства теорем часто оказываются проще стандартных доказательств.

Широко применяется инфинитезимальный анализ в качественной теории дифференциальных уравнений. Примером может служить теория «уток». «Утки» – это некоторые особые решения уравнений с малым параметром, изучаемые в теории релаксационных колебаний. По форме их графики напоминают летящую утку. Впервые эти решения были обнаружены в уравнении Ван-дер-Поля. Все результаты теории «уток» могут быть сформулированы и доказаны без использования нестандартного анализа (это относится ко всем применениям нестандартного анализа вообще). Однако это сделало бы все доказательства более громоздкими и менее ясными. Не случайно «утки» были открыты именно с помощью нестандартного анализа и в связи с ним. Открытие и исследование этих особых решений является результатом коллективного труда.

Таким образом, классический анализ не соответствует реальности, но не потому, что он ошибочен, а потому, что в его логике пока не выявлены возможности, позволяющие привести математическую теорию в соответствие с физическими представлениями.

С одной стороны, классический анализ оказался недостаточен для физики, хотя его исходные представления интуитивно выглядят очевидными и естественными. С другой стороны, нестандартный анализ кажется для физики подходящим: актуально бесконечно малые как бы квантуют континуум в микромасштабах, а гипердействительность (выражение Мартина Дэвиса из его книги «Прикладной нестандартный анализ») разбивается на микромир, мир действительных масштабов и мир космической бесконечности. Однако неархимедов анализ – это все-таки искусственное построение, эта «неархимедовость» противоречит бесконечной делимости и классическому понятию предела. Так, единственным выходом может быть только логическое соединение нестандартной модели анализа с анализом классическим, обнаружение их необходимой связи, иначе говоря, их дополнительности.

Секей в книге «Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике» утверждает, что нестандартный анализ позволяет разрешить, во-первых, парадокс нулевой вероятности: вероятность невозможного события есть нуль, обратное же утверждение неверно, во-вторых, апорию Зенона «Стрела».

Бесконечно малые величины в трактовке Лейбница

Развивая свой вариант дифференциального и интегрального исчислений, Лейбниц ввел величины, названные им инфинитезимальными, или бесконечно малыми. Понятие «бесконечно малая», введенное им и использовавшееся до Коши, отличается от того, которое принято в учебниках по высшей математике сегодня.

Бесконечно малая, по Лейбницу, отлична от нуля, но меньше любого другого положительного числа. Это не переменная величина, т. е. не функция, стремящаяся к нулю, а постоянная величина, но очень малая. Из-за этой малости любыми степенями бесконечно малых можно пренебречь. Для Лейбница это была актуальная бесконечно малая, а не потенциальная, как это принято в настоящее время.

Лейбниц утверждал также, что с бесконечно малыми величинами надлежит обращаться так же, как с обычными числами. Они были идеальными элементами, фикциями, однако приносили вполне реальную пользу. Стараясь избавиться от метафизической природы бесконечно малых, Лейбниц рассматривал их как некое вспомогательное средство, подобное мнимым числам. Основной была идея несравнимости. Для Лейбница точки, линии, поверхности несравнимы: например, мы ничего не прибавляем к прямой, добавляя к ней точку. Таким образом, dx ведет себя по отношению к x как точка по отношению к прямой.

Существование постоянных бесконечно малых, которые должны быть меньше всех других положительных чисел, но больше нуля, и при этом быть действительными числами, противоречит *аксиоме Архимеда*, которая утверждает, что *для любых двух отрезков можно отложить меньший из них столько раз, что в сумме получится отрезок, превосходящий по длине больший отрезок*. Ведь бесконечно малая должна быть такой, чтобы суммирование любого количества этих величин давало в итоге отрезок меньше единицы.

Отметим, что Лейбниц рассматривал множество величин, не являющееся архимедовым, в которое входят действительные числа, дополненные дифференциалами. Лейбниц высказал мысль, что бесконечно малые количества меньше любого заданного количества, что они лишены величины и в силу какого-то неясного принципа непрерывности сохраняют характер соотношений между конечными величинами, из которых произошли. Как и Ньютон, Лейбниц тоже старался рассматривать не бесконечно малые элементы, а только их отношения.

Отношение ученых к идее бесконечно малых величин

Самым уязвимым моментом в исчислении бесконечно малых была их природа. Математики XVII в. пытались обосновать существование этих величин, прибегая к метафизическим аргументам.

Успехи математического анализа в первой трети XVIII в. были огромными, за исключением вопроса о его основаниях. Ни метод пределов и флюксий, ни исчисление бесконечно малых не опирались на прочный логический

фундамент, и это сознавали многие. Высказывания Ньютона о природе моментов и Лейбница о сущности бесконечно малых были не однозначны и не ясны: предельные отношения исчезающих величин, по-видимому, требовали непонятного деления нуля («ничего») на нуль («ничто»). Принцип отбрасывания бесконечно малых, казалось, противоречил очевидному для величин тождеству $a = a$. Дифференциал функции определяли как ее бесконечно малое приращение, а вычисляли как некоторую часть этого приращения.

Реакцией на такую непоследовательность явилось выступление против математического анализа философа и видного сановника (епископа) Англиканской церкви Джорджа Беркли, одного из крупнейших представителей субъективного идеализма. В 1734 г. он написал сочинение «Аналист, или Рассуждение, обращенное к …». В понятиях анализа он видел только фикции, «тени усопших величин», притом фикции противоречивые. Его окончательным выводом стало утверждение, что математика может спокойно обойтись без нового анализа. Но, каковы бы ни были цели и выводы Беркли, он указал на недостатки в основаниях современного ему исчисления бесконечно малых. Таким образом, он привлек внимание к недостаткам понятий и методов анализа, к трудностям, связанным с идеей мгновенной скорости, к искусственному характеру вывода момента произведения Ньютоном и т. д. Отрицать, что результаты исчисления бесконечно малых верны, было невозможно. Эту «правильность» Беркли объяснил тем, что в своих выводах сторонники анализа допускают две взаимно уничтожающиеся ошибки.

Критика Беркли не оставила равнодушным математическое сообщество и дала мощный толчок к разработке основ анализа. Английские последователи Ньютона тотчас встали на защиту метода флюксий, между ними и Беркли развернулась острая дискуссия. Откликом на «Аналист» явился фундаментальный «Трактат о флюксиях» К. Маклорена (1742). Далее дискуссия перенеслась, главным образом, на континент, где были по-новому развиты или вновь созданы несколько концепций математического анализа. Методы Лейбница господствовали в континентальной Европе более 50 лет. Однако во второй половине XVIII в. начались поиски альтернативных путей построения анализа.

С точки зрения Эйлера, бесконечно малая – это величина исчезающая, а значит, актуально равная нулю. Эйлер систематически изучил элементарные функции и нашел для них отношение приращений функций к приращениям переменной. Он считал бесконечно малые нулями, но отношению dy/dx он придавал то значение, которое будет иметь отношение конечных разностей $\Delta y/\Delta x$, если положить $\Delta x = 0$.

Наиболее известным сторонником другой концепции математического анализа во второй половине XVIII в. был Д'Аламбер. Он не построил собственный метод пределов, но его краткие и отточенные статьи оказались очень важны при подготовке теории пределов современного классического анализа.

В статье «Предел» (1765) Д'Аламбер писал: «Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нем метод первых и последних отношений, то есть метод определения пределов отношений. Поэтому этот знаменитый ученый никогда не дифференцировал

величины, а только уравнения, ибо всякое уравнение заключает в себе отношение между двумя переменными, и дифференцирование состоит только в определении пределов отношений между конечными разностями содержащихся в уравнении двух переменных…» [84]. Говоря о бесконечно малых, Д'Аламбер имеет в виду «несравнимые», актуально бесконечно малые величины. Такое понимание термина «бесконечно малые» было в XVIII в. весьма распространенным.

Д'Аламбер дал следующее определение предела: «Говорят, что величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой ее ни предположить…» [84]. Но ему не удалось построить логически связного учения о пределах.

В конце XVIII в. обширную новую систему анализа предложил Лагранж. Основное содержание этой идеи он излагал в лекциях, которые читал в Политехнической школе в Париже. Лагранж раскритиковал и отверг метод бесконечно малых Лейбница, метод отношения двух нулей Эйлера, метод пределов Д'Аламбера и метод флюксий Ньютона. Целью Лагранжа было сведение исчисления бесконечно малых к алгебре. Он использовал понятие непрерывной функции, как ее трактовал Эйлер, и ряды Тейлора. Для вычисления производных Лагранж пренебрегает всеми членами разложения функций в ряд, начиная с третьего. Благодаря оценкам остаточного члена, которым пренебрегают, Лагранж нашел способ определения числового значения допустимой погрешности. Так он исключил из рассмотрения понятия бесконечно малой и предела [84].

В 1797 г. вышла книга Лагранжа «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от какого-либо рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий, и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин». В 1813 г. был издан несколько переработанный и дополненный вариант этой книги.

Основную идею своей программы Лагранж высказал за четверть века до выхода «Теории аналитических функций» в статье, написанной в 1772 г. и опубликованной в 1774 г. Идея заключалась в том, чтобы алгебраически доказать общую теорему Тейлора и далее строить анализ на разложениях функций в степенные ряды.

«Теория аналитических функций» состоит из введения и трех частей, содержащих соответственно математическую теорию, ее приложения к геометрии и механике. В книге отсутствуют чертежи. Под аналитическими функциями Лагранж понимал функции, образуемые с помощью известных в анализе средств и разложимые в ряд Тейлора. Лагранж считал, что случай, когда функция $f(x)$ и все ее производные обращаются при некотором значении $x = a$ в нуль, возможен, только если функция тождественно равна нулю. Это утверждение, высказанное также Эйлером, опроверг Коши. Лагранж приходит к заключению, что «истинная теория» дифференциального исчисления еще не создана.

Работа Лагранжа «Теория аналитических функций» была встречена с большим интересом. Однако предложение Лагранжа отказаться от

использования бесконечно малых и пределов не нашло отклика, и большинство математиков решили сочетать теорию Лагранжа с применением бесконечно малых и пределов.

В конкурсе, объявленном Лагранжем в Берлинской академии наук для уточнения понятия «бесконечность», участвовал Карно. Он первым отметил, что понятия потенциальной бесконечно малой и предела неразрывно связаны, и первым определил бесконечно малую как переменную, пределом которой является нуль. Это открывало путь к синтезу теории пределов и исчисления бесконечно малых – синтезу, который Карно безуспешно пытался осуществить и который удался Коши.

В начале XIX в. желание создать прочное основание математики стало почти всеобщим, а необходимость пролить свет на основные понятия анализа сделалась неотложной. Впервые четкая концепция основных понятий исчисления бесконечно малых (непрерывность, производная, связь между непрерывностью и дифференцируемостью) появилась в трудах чешского логика и математика Бернарда Больцано, но его работы около полувека не были известны.

Главным «проводником» строгости в исчисление бесконечно малых стал Огюст Коши. От метода Лагранжа Коши отказался из-за расходимости многих рядов, на что Лагранж внимания не обращал. За основное понятие Коши принял понятие предела. Развив идею Д'Аламбера, но отказавшись окончательно от геометрического подхода, с которым она была еще тесно связана, он определил предел как чисто арифметическое понятие: если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению так, что, в конце концов, отличаются от него сколь угодно мало, то последнее называют пределом всех остальных.

Вслед за Коши большинство аналитиков приняли предел за основу исчисления бесконечно малых. Бесконечно малые в трактовке Лейбница в XIX в. были изгнаны из строгой математики, однако физики использовали их постоянно. Математики перешли к анализу на языке «эпсилон-дельта», который до сих пор соответствует духу университетского образования.

Физик-теоретик академик Я.Б. Зельдович, один из создателей ядерного оружия, опубликовал в 1963 г. книгу «Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике», которая вызвала отрицательный отзыв Л.С. Понтрягина, возмущенного полным исключением из рассмотрения понятий теории пределов. Производную функции Зельдович определял как «величину отношения приращения функции к приращению аргумента, в предположении, что последнее мало». В ответ на критику Зельдович указал, что решающих практические задачи интересует именно отношение конечных приращений, а вовсе не абстрактный математический предел.

Делать приращение аргумента (координаты точки или момента времени) меньшим, чем 10^{-10} или 10^{-30} (при разумных единицах измерения), – «явное превышение точности модели, так как структура физического пространства (или времени) на столь малых интервалах уже вовсе не соответствует

математической теории вещественных чисел (вследствие квантовых феноменов)... Дело, – продолжал Зельдович, – просто в том, что находить интересующие нас отношения конечных приращений трудно, поэтому и придуманы приближенные асимптотические формулы для них. Эти-то приближенные формулы математики и называют своими пределами и математическими производными. В любом реальном применении теории следует учитывать, меньше чего не следует делать приращения, чтобы результаты теории соответствовали эксперименту» [12].

Булевозначный анализ

Булевозначным анализом называют раздел функционального анализа, использующий специальную теоретико-модельную технику – булевозначные модели теории множеств. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики к 1960 г. Однако в то время еще не было идеи, которая впоследствии вдохнула жизнь в созданный математический аппарат, привела к бурному развитию теории моделей. Такая идея возникла благодаря открытию. П.Дж. Коэна, который установил в 1963 г. абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической проблемы континуума. Именно в связи с исследованиями П.Дж. Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки, Д. Скотта и Р. Соловэя.

В настоящее время одним из основных разделов современного функционального анализа считается теория упорядоченных векторных пространств. Для булевозначного анализа основополагающей является теория упорядоченных векторных пространств, введенных Л.В. Канторовичем. Первой работой Л.В. Канторовича по этой тематике была заметка 1935 г. в Докладах Академии наук СССР. В этой работе определен новый тип пространств, введение которых позволяет изучать линейные операции одного общего класса как линейные функционалы. В честь автора их называют К-пространствами. Была сформулирована важная методологическая установка, которую теперь называют принципом Канторовича или принципом переноса для К-пространств.

Изучение К-пространств Леонид Витальевич связал с выяснением области применимости фундаментальной теоремы Хана – Банаха и сформулировал теорему, которая именуется теоремой Хана – Банаха – Канторовича.

В последующих работах Л.В. Канторовича и его многочисленных последователей было дано систематическое построение теории и разнообразные приложения к вопросам теории функций и функционального анализа. Теории векторных решеток и ее обширным приложениям посвящено большое количество монографий.

Принцип переноса для К-пространств оказался одной из тех стержневых идей, которые привели к изящной теории богатой разнообразными приложениями. Глубина и универсальность принципа Канторовича были раскрыты в рамках булевозначного анализа.

В начале 1970-х годов Е.И. Гордон установил, что любое расширенное К-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели. При этом оказывается, что любая теорема (в рамках аксиоматики Цермело – Френкеля с аксиомой выбора) о вещественных числах имеет свой аналог для К-пространства, причем перевод одних теорем в другие осуществляется посредством точно определенных стандартных процедур. Эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную роль во многих исследованиях в теории К-пространств, превращается в рамках булевозначного анализа в точный исследовательский метод.

Туральф Сколем

Сколем Туральф Альберт родился 23 мая 1887 г. на юге Норвегии в семье учителя начальной школы. После окончания гимназии в 1905 г. Туральф поступил в университет в Осло. В 1913 г. Сколем получил ученую степень, защитив диссертацию на тему «Исследования по алгебре логики». В 1915–1916 гг. он стажировался в Гёттингене, затем вернулся в Осло, где сначала работал научным сотрудником, а с 1918 г. – доцентом кафедры математики.

Сколем занимался математическими исследованиями, не стремясь получить ученые степени и звания. Он
был очень скромным и застенчивым человеком, не создавал научных школ и не руководил аспирантами. В отличие от многих знаменитых математиков, он поздно начал публиковать свои результаты. Для признания математика важно, в каких изданиях и на каком языке печатают его труды. Большая часть работ Сколема опубликована в норвежских математических журналах, мало известных среди математиков. Поэтому его результаты переоткрывались другими математиками, именами которых они названы.

После публикации нескольких работ по математической логике в 1920 г. он стал признанным специалистом в этом разделе математики. Им значительно упрощены доказательства двух теорем в теории моделей для языков произвольной мощности, известных как теоремы Лёвенгейма – Сколема. Теоремы доказал в 1915 г. немецкий математик Леопольд Лёвенгейм. В 1922 г. теорема Лёвенгейма – Сколема была применена к формализации теории множеств.

Сколем занимался аксиоматизацией теории множеств. Наиболее известна система аксиом Цермело – Френкеля. Результаты, полученные Френкелем, одновременно были получены и Сколемом. Работы Френкеля оказались более известными, хотя по справедливости система аксиом должна была называться системой Цермело – Френкеля – Сколема.

Среди скандинавских математиков математическая логика не была популярной, и Сколем, не прекращая исследований в теории множеств, приступил к исследованиям в алгебре и теории чисел. Он внес заметный

вклад в теорию диофантовых уравнений. Им получены результаты в теории *P*-адических чисел, являющихся расширением множества рациональных чисел. Сколем в 1927 г. доказал теорему, которая несколько лет спустя была независимо от него доказана знаменитой немецкой алгебраисткой Эмми Нётер. Эту теорему называют теоремой Сколема – Нётер.

Степень доктора Сколем получил в 1926 г., когда ему было уже почти 40 лет, так как считал, что в Норвегии это не дает никаких преимуществ.

В 1927 г. Сколем женился. С 1930 по 1938 г. он работал научным сотрудником в институте в Бергене.

Начиная с 1933 г. Сколем проводил исследования по нестандартным моделям теории множеств и теории чисел. Им введено понятие гипердействительных чисел, ставших основой инфинитезимального анализа в 1960-е годы. Он не считал это своей основной заслугой, но именно этот результат послужил основанием для написания данной статьи.

В 1938 г. Сколем был назначен профессором математики в Университете Осло. Он читал лекции по алгебре, теории чисел и математической логике.

Сколем написал около 200 статей различной тематики: диофантовы уравнения, математическая логика, теория групп, теория решеток, теория множеств. Благодаря его работам появились новые направления в науке. Возраст не мешал Сколему заниматься научными исследованиями: в 61–70 лет им опубликовано 48 статей. Его часто приглашали выступать с докладами на международных конгрессах и симпозиумах, читать лекции в американских университетах. Он редактировал научные журналы и на протяжении многих лет был президентом норвежской математической ассоциации.

Туральф Сколем получил много наград и премий. В 1954 г. королем Норвегии он был произведен в рыцари ордена Святого Олафа 1-го класса. В 1957 г. он вышел в отставку.

Скончался Туральф Сколем в Осло 23 марта 1963 г.

Абрахам Робинсон

Американский математик Робинсон Абрахам родился 6 октября 1918 г. в немецком городе Вальденбурге (ныне – Валбжих, Польша) в еврейской семье. Изначально его фамилия была Робинзон, но после начала Второй мировой войны он стал писать и произносить ее на английский манер.

Отец Абрахама был писателем по призванию, а по образованию – химиком. Он умер вскоре после рождения сына.

Когда нацисты пришли к власти в Германии (1933), Абрахаму было 15 лет. Мать и двое его братьев уехали в Палестину.

В 1935 г. Робинсон поступил в Еврейский университет в Иерусалиме, который окончил с отличием и был направлен в Париж (1939) для продолжения образования в Сорбонне. Поэтому, когда началась Вторая мировая война, он находился во Франции.

На одном из морских судов Робинсон бежал от наступающих нацистских войск в Англию, где был зачислен в ряды движения «Сражающаяся Франция» в качестве эксперта по аэродинамике и полетам со сверхзвуковыми скоростями. Ко времени окончания войны он стал выдающимся специалистом в этой области, однако продолжал исследования по математической логике, которой увлекся в университете.

После войны Робинсон некоторое время работал в Лондоне. В 1946 г. он получил диплом от Еврейского университета, а в 1949 г. защитил диссертацию в Лондоне на тему «Метаматематика алгебраических систем».

В 1951–1957 гг. занимал кафедру прикладной математики в Торонто (Канада), затем преподавал в Еврейском университете.

В 1962 г. Робинсон обосновался в США. Первые пять лет он преподавал в Калифорнийском университете (Лос-Анджелес).

Всемирная известность пришла к Робинсону после выхода в свет (1961) нескольких статей о нестандартном анализе, которые позже были развернуты в монографию («Non-standard Analysis», 1966). Оказалось, что существует непротиворечивая модель анализа, в которой бесконечно малые – корректно определенные числа, и с ними можно производить арифметические действия в духе Лейбница, без привлечения понятия предела. Тем самым была решена давно сформулированная проблема: почему математики XVIII в., выполняя незаконные, с точки зрения классической теории, действия, тем не менее получали верные результаты.

Абрахам Робинсон – автор 9 книг и около 130 статей в самых различных областях фундаментальной и прикладной математики. На русском языке в 1967 г. издана книга Робинсона «Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры».

В 1967 г. Робинсон перешел в Йельский университет.

Умер Абрахам Робинсон 11 апреля 1974 г. от рака поджелудочной железы.

Петр Вопенка

Чешский математик Вопенка Петр родился 16 мая 1935 г. в Праге. В 1953 г. после окончания гимназии он поступил на отделение математико-физического факультета Карлова университета в Праге. После окончания университета он был оставлен для преподавательской работы, с 1964 г. стал читать лекции. С 1966 по 1969 г. Вопенка был заместителем декана математико-физического факультета и заведующим кафедрой математической логики. В 1967 г., защитив диссертацию, получил степень доктора.

В 1970 г. по политическим соображениям его сняли с должности заведующего кафедрой. Благодаря вмешательству П.С. Александрова Вопенку не уволили с работы, но ему запретили участвовать в зарубежных конференциях. В 1968 г. он был избран профессором Карлова университета в Праге, но только в январе 1990 г. приступил к обязанностям

профессора и заместителя ректора. С 1990 по 1992 г. Вопенка занимал пост министра просвещения, молодежи и спорта.

Первые научные работы Вопенки были посвящены вопросам топологии, но затем он занялся исследованиями в области теории множеств и математической логики. Историей математики и философией математики он заинтересовался в 1970 г. Это произошло после того, как разделы теории, которыми он занимался, стали считать буржуазной лженаукой. Вопенка исследовал вопросы бесконечности и разработал теорию множеств, альтернативную по отношению к теории множеств Кантора. Этим вопросам, которые имеют непосредственное отношение к булевозначному анализу, он посвятил четыре монографии и множество статей.

П. Вопенка неоднократно выступал на международных конференциях и симпозиумах, в том числе на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 г.

В издательстве Института математики им. С.Л. Соболева (Новосибирск) в 2004 г. опубликована книга П. Вопенки «Альтернативная теория множеств». Она посвящена систематическому изложению принципиально нового взгляда на проблему соотношения конечного и бесконечного. В книге бесконечность понимается как один из аспектов конечного. Это приводит к радикальному переосмыслению конечного, перестающего быть чем-то само собой разумеющимся. Разработанный автором математический аппарат удовлетворяет потребностям точного естествознания и позволяет внедрять математику в гуманитарные науки.

В 2000 г. П. Вопенка стал заслуженным профессором Карлова университета в Праге. С 2009 г. является профессором университета Яна Евангелиста Пуркине в Усти-на-Лабе.

Вопенка считает, что красота в математике почти исчезла после создания атомной бомбы. При работе над проектами типа Манхэттенского математиками утрачивается свобода выбора темы исследования, и они вынуждены выполнять определенную долю расчетов, даже не зная, что они рассчитывают. В любом довоенном номере журнала по математике была интересна каждая статья. Теперь статьи стало читать неинтересно: они скучны и сложны.

В 2009 г. Вопенка стал лауреатом премии супругов Гавловых.

Глава 27

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ПОРЯДОК И ХАОС. СОЗДАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Высшее назначение математики – находить порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

Поиск единых законов эволюции

Две великие эволюционные теории, созданные в конце XIX в., – второе начало термодинамики и эволюционная теория Дарвина – на первый взгляд могут показаться взаимоисключающими. Согласно второму началу термодинамики, развитие сопровождается ростом энтропии, любая изолированная физическая система целенаправленно и необратимо смещается к состоянию равновесия, что приводит к выравниванию температур, давлений, энергий. Этот пессимистический научный вывод называют тепловой смертью Вселенной. Второе начало термодинамики обосновал австрийский физик Людвиг Эдуард Больцман в 1906 г. Известно, что развитие живого мира подчиняется прямо противоположному закону: энтропия может понижаться, и это приводит к росту порядка, разнообразию форм.

На самом деле биологическая и физическая теории не спорят друг с другом, так как биологическая сформулирована для открытых систем, обменивающихся энергией с окружающей средой, а физическая – для замкнутых. По мнению ученых, судьба человечества может сложиться по-разному: гибель в результате самоуничтожения, природного катаклизма или сверхсовершенство в будущем.

Несомненно одно, что в природе должны существовать единые законы эволюции. Возможно, в XXI в. возникнет новая метанаука, объединяющая гуманитарные и естественнонаучные знания. Если так, то это должна быть наука, описывающая и изучающая эволюционизирующие системы. Как частные случаи в ней должны выполняться все известные в настоящее время законы.

Во второй половине XX в. появилась реальная возможность создания такой метанауки, обусловленная коренными изменениями в стратегии исследований в прикладной математике, изменении ее методов и появлении новых понятий. Возросла потребность математического описания нелинейных процессов и появилась возможность их анализа. Ранее нелинейность считали «испорченной» линейностью, экзотическим частным случаем. Постепенно ученые пришли к выводу, что все явления природы нелинейны, а их линейное описание является упрощенным. Реальный многомерный, многовариантный мир – это эволюция нелинейных систем. Точное, аналитическое решение

нелинейных дифференциальных уравнений в подавляющем большинстве случаев получить не удается, численные решения до появления компьютеров даже не рассматривались ввиду необозримого объема работы. Поэтому вольно или невольно все наблюдаемые процессы сводились к более простым, линейным. Этот прием дает неудовлетворительные результаты, когда воздействия на систему очень интенсивны или система открыта и далека от равновесия, т. е. как раз в тех случаях, которые в современной науке и технике представляют наибольший интерес. В таких случаях необходимо использовать нелинейный анализ, более сложный и трудоемкий, но способный дать более полное представление об изучаемых явлениях.

Нелинейный анализ сделал возможным развитие нового научного направления, посвященного вопросам самоорганизации сложных систем, хаоса и порядка. Это направление – междисциплинарная область исследований, в центре внимания которой находятся системы с нелинейной динамикой, неустойчивым поведением, эффектами самоорганизации, наличием хаотических режимов. Основоположники направления, проводящие исследования независимо друг от друга, назвали его по-разному: Г. Хакен в Германии – синергетикой, М. Фейгенбаум в США – теорией динамического хаоса, во франкоязычных странах, по инициативе И.Р. Пригожина, его называют теорией диссипативных структур.

В отечественной литературе преимущественно используется термин «синергетика». Концепцию универсального эволюционизма и коэволюцию человека и природы развивал Н.Н. Моисеев. Под руководством А.А. Самарского и С.П. Курдюмова разработана теория самоорганизации на базе математических моделей и вычислительного эксперимента. Примерами самоорганизующихся систем являются обработка информации в коре головного мозга посредством взаимодействия автоволн возбуждения и торможения, биение сердца как незатухающий периодический процесс, образование ячеек Бенара – упорядоченных струй жидкости, подогреваемой снизу.

Взаимодействие порядка и хаоса, вероятно, является сущностью Вселенной. Во многих случаях между хаосом и порядком трудно провести четкую границу. Например, тропический лес имеет общую структуру, соответствующую некоторому прообразу порядка. Даже в человеческом мозгу одновременно присутствуют упорядоченное и хаотическое начала. Левое полушарие отвечает за выработку линейных правил и стратегий в поведении человека, правое – за нелинейность и хаотичность, в том числе за интуицию.

Теория хаоса оказалась интересна не только математикам, но и физикам, инженерам, экономистам, химикам, биологам и др. Рассмотрим ключевые понятия качественной теории сложных нелинейных систем.

Ключевые понятия качественной теории сложных нелинейных систем

Бифуркации и аттракторы. Отличительной чертой объектов, изучаемых синергетикой, теорией динамического хаоса, теорией диссипативных структур, теорией катастроф является нелинейность дифференциальных уравнений, описывающих динамику этих объектов. Нелинейность уравнений

приводит к сильной чувствительности, к изменению начальных условий, когда небольшие колебания параметров окружающей среды ведут к непредсказуемым последствиям. Сложная система теряет устойчивость в момент, когда внешние воздействия достигают критического значения или сумма внутренних воздействий достигает значений, при которых параметры системы начинают быстро изменяться. Возникает возможность разных путей развития. Введенный Пуанкаре термин «бифуркация» буквально означает «раздвоение», но обычно применяется в более широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек систем при изменении параметров, от которых они зависят. Бифуркациями до Пуанкаре интересовался Максвелл. В качестве примеров, когда малое воздействие, являющееся своеобразным спусковым механизмом, приводит к последствиям, несравнимым с величиной воздействия, он рассматривал небольшую искру, поджигающую огромный лес, слово, ввергающее мир в пучину войны, и т. п.

Сам Пуанкаре не смог реализовать намеченную им программу исследования бифуркаций, так как был уже тяжело болен, а из его современников только создатель теории устойчивости А.М. Ляпунов следовал этой программе при изучении критических решений уравнений. После Ляпунова работы по теории бифуркаций практически не появлялись. Такая ситуация сохранилась до 1930-х годов, когда советские математики А.А. Андронов и Л.С. Понтрягин вновь обратились к идеям Пуанкаре. Особое оживление в этой области наблюдалось в 1950–1967 гг.

Как математическая проблема общая задача исследования точек бифуркации состоит в их классификации и анализе поведения семейств функций вблизи структурно неустойчивых критических точек. Понятие бифуркации позволяет лучше понять сущность структурной неустойчивости, выявляя ее следствия.

В 1985 г. В.И. Арнольд с группой ученых сформулировал программу, посвященную описанию бифуркаций полициклов, возникающих в типичных малопараметрических семействах векторных полей. Эта программа успешно выполняется.

Среди вариантов развития процесса есть траектория или коридор траекторий, которые отличаются относительной устойчивостью и как бы притягивают к себе все множество траекторий систем с разными начальными состояниями. Эти устойчивые траектории называют аттракторами. Если система попадает в этот коридор (конус) траекторий, то она неизбежно движется к этому относительно устойчивому состоянию. Аттрактор можно также определить как асимптотический предел решений, на который не оказывают прямого влияния начальные условия. Важный принцип эволюции систем, который в наиболее общем виде можно сформулировать следующим образом: если законы сохранения (материи, энергии, импульса) допускают несколько равновесных состояний (решений), то реализуется состояние движения, которому отвечает минимальный рост энтропии. Авторы этого принципа И.Р. Пригожин и Н.Н. Моисеев.

Непериодический, случайный процесс возникает как предел все более усложняющихся структур, хаос – в результате сверхсложной организации.

Системы, в которых наблюдаются бифуркации, в своем развитии могут достигать такой степени сложности, что это становится уже беспорядком, детерминированным хаосом. Такой вывод является чрезвычайно общим – он относится, например, и к моделям экологии, и к моделям гидродинамики.

Появлению в системе хаотических свойств соответствует наличие в ее фазовом пространстве множества сложной геометрии, к которому притягиваются траектории, проходящие вблизи от него. Это множество, более сложное, чем цикл, было названо странным аттрактором. В научную литературу понятие «странный аттрактор» было введено в 1971 г. в работе Д. Рюэля и Ф. Такенса «О природе турбулентности».

Первым исследованным странным аттрактором стал аттрактор Лоренца, подробнее о котором рассказано в статье, посвященной Эдварду Лоренцу. Оказалось, что простая система из трех нелинейных уравнений, составленных Лоренцем, описывает модель ламинарно-турбулентного перехода при конвективных движениях жидкости. Изменение значений одного из параметров динамической системы меняет тип аттрактора. При одних значениях параметра система имеет предельную устойчивую точку, а при других, больших некоторого бифуркационного значения, система имеет совершенно невероятное решение, соответствующее появлению динамического хаоса.

Странный аттрактор привносит в мир макромасштабных объектов неопределенность. В.И. Арнольд утверждал, что существуют кометы, поведение которых носит стохастический характер и определяется странным аттрактором, т. е. оно неустойчиво настолько, что их траекторию нельзя предсказать.

Странные аттракторы встречаются в физике элементарных частиц, биологии, социологии. Пригожин пишет, что окружающая нас среда, климат, экология и нервная система человека могут быть поняты только в свете описанных представлений, учитывающих как стабильность, так и нестабильность. Это обстоятельство вызывает повышенный интерес со стороны физиков, химиков, метеорологов, специалистов в области экологии. Указанные объекты характеризуются странными аттракторами и, следовательно, своеобразной смесью стабильности и нестабильности, что крайне затрудняет предсказание их будущего поведения.

Основатель синергетического движения в России, российский ученый С.П. Курдюмов комментирует указанное выше утверждение Пригожина следующим образом: «…Все сложные структуры в мире должны быть нестабильными, носить колебательный характер. В одном режиме они локализуют и удерживают хаос в определенной форме, а в другом – вблизи момента обострения – само это удерживание посредством положительной обратной связи способствует действию хаоса, что влечет за собой статистическое поведение системы и ее “радиоактивный распад”… Описанный механизм удивительно напоминает древние натурфилософские построения. Тут можно вспомнить и круги возрождений древних индусов, и цикличность эволюции мироздания Эмпедокла, и многое другое. Сопоставление этих учений с современными теоретическими представлениями могло бы иметь эвристическую ценность для дальнейших разработок в теории самоорганизации» [39].

Варианты качественной теории сложных нелинейных систем

Эргодическая теория и теория хаоса. Совсем недавно математика описывала только строго упорядоченные процессы. Считалось, что при точном знании исходных состояний любой системы при известных дифференциальных уравнениях, описывающих процесс ее функционирования, ее поведение можно точно предсказать на любой момент времени. В работе «Философский опыт относительно вероятностей» (1814) Лаплас утверждал: «Ум, который знал бы все действующие в данный момент силы природы, а также относительное положение всех составляющих ее частиц и который был бы достаточно обширен, чтобы все эти данные подвергнуть математическому анализу, смог бы охватить единой формулой движение как величайших тел Вселенной, так и ее легчайших атомов; для него не было бы ничего неопределенного, он одинаково ясно видел бы и будущее, и прошлое» [73]. Этот «ум» обычно называют демоном Лапласа. Это придуманное Лапласом существо, способное, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость каждой частицы во Вселенной, прозревать ее эволюцию как в будущем, так и в прошлом, понадобилось для того, чтобы наглядно продемонстрировать степень нашей неосведомленности и необходимость в статистическом описании некоторых процессов.

Абсолютная точность, о которой говорил Лаплас, физически недостижима. Даже наиболее тщательно поставленный эксперимент никогда не бывает полностью изолирован от влияния окружающей среды, а состояние системы ни в один момент времени не может быть известно точно. Но ученые верили, что почти одинаковые причины будут давать почти одинаковые следствия. Мир представлялся царством порядка, в котором все предсказуемо и предопределено. Случайности в нем почти не было места.

Практически формы всего того, что создается руками человека, строго упорядочены, и промышленные человеческие изделия считаются тем совершеннее, чем упорядоченнее их формы. Для природных процессов такая упорядоченность не типична, для них характерно сочетание порядка и хаоса, их гармония и баланс. Слово «хаос» происходит от греческого глагола, означающего «зиять», который часто использовался при описании первобытной пустоты Вселенной до возникновения вещества. Так обозначалась бесструктурная и бесформенная масса, не наделенная никаким порядком.

То, что теперь называют теорией хаоса, ранее было известно в математике как эргодическая теория или метрическая теория динамических систем. Законы динамики определяют индивидуальные траектории движения, а теория хаоса изучает статистические свойства этих траекторий.

Хаотическое движение в природе в конце XIX в. обнаружили физики Максвелл, Больцман, Гиббс и математики Пуанкаре и Адамар. Больцман сформулировал в 1887 г. эргодическую гипотезу, приведшую к модели газа Больцмана – Гиббса, которая является прототипом термодинамики в статистической механике. Пуанкаре занимался задачей трех тел в небесной механике. Многие свойства сложных явлений, рассматриваемых Больцманом и Пуанкаре, не поняты до сих пор.

Динамической системой первоначально называли механическую систему с конечным числом степеней свободы. В широком смысле динамической системой стали называть произвольную физическую систему (например, систему автоматического регулирования или радиотехническую систему), описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений, или вообще систему дифференциальных уравнений безотносительно к ее происхождению.

У истоков теории динамических систем стоял Пуанкаре, а термин «динамическая система» ввел в 1898 г. Адамар. Основной проблемой в классической динамике является проблема интегрирования. До работ Пуанкаре считалось, что все динамические системы похожи друг на друга, и при переходе от одной к другой возникают исключительно вычислительные трудности.

Пуанкаре установил, что существуют системы двух типов: интегрируемые и неинтегрируемые. Интегрируемыми Пуанкаре назвал динамические системы, для которых возможно явное вычисление траекторий. В фундаментальной теореме в 1889 г. он доказал, что в общем случае динамические системы не интегрируемы. Пуанкаре указал причину неинтегрируемости, которая кроется в возникновении резонансов между степенями свободы. Применение теории возмущений приводит к появлению членов с малыми знаменателями. Если существуют резонансы, то члены ряда теории возмущений расходятся, так как конечные величины, стоящие в их знаменателях, стремятся к нулю. Эту проблему, с которой столкнулись еще Лагранж и Лаплас, называют проблемой малых знаменателей. Пуанкаре показал, что эта проблема принадлежит к числу принципиально неразрешимых проблем динамики. Из доказанной им теоремы следует, что основная трудность – появление расходимостей в задачах динамики – не может быть устранена и делает невозможным введение циклических переменных для большинства динамических систем. Свои открытия Пуанкаре сделал в работе по небесной механике, когда исследовал движение в Солнечной системе. Он установил, что даже в ограниченной задаче трех тел, масса одного из которых пренебрежимо мала, возможно сложное движение, описать которое нельзя никакой математической формулой.

В задачах классического естествознания все зависимости описывались непрерывными функциями, для которых характерно небольшое изменение значения функции при малых приращениях аргументов. После приложения чуть больших усилий получался чуть лучший результат. Более того, если математические модели не отвечали этому условию, то они считались некорректными, а значит, лишенными реального содержания и «изгонялись» из науки.

Важную роль в развитии эргодической теории и современной теории хаоса сыграл Жак Адамар. Он показал, что долговременное поведение динамической системы может очень чувствительно зависеть от начальных условий и является непредсказуемым, даже когда система управляется детерминированным законом. Следовательно, долговременное поведение системы непредсказуемо. Вдохновленный успехами математической физики в точном описании явлений реального мира, Адамар в начале XX в. ввел

понятие корректной задачи, для которой существует единственное и устойчивое решение.

Долго считалось, что система Адамара является абстрактной математической моделью, но в 1960-х годах Синай свел задачу о газе Больцмана – Гиббса к изучению биллиарда Синая, который он связал с моделью Адамара.

В 1928 г. русский математик и физик А.А. Андронов обнаружил, что теория аттракторов Пуанкаре дает возможность рассчитывать радиопередатчики. Он первым указал эффективный математический аппарат для рассмотрения задач теории нелинейных колебаний. Им созданы основы строгой теории автоколебаний – колебаний, период которых определяется параметрами самой системы. Андронов распространил методы теории нелинейных колебаний на проблемы автоматического регулирования, решил ряд важных нелинейных задач теоретической радиотехники и важных практических задач в области регулирования и общей динамики машин. Теория Пуанкаре и Андронова допускает огромное число разнообразнейших приложений (от небесной механики до экологии, от теории движения зараженных частиц в ловушках типа ТОКАМАК для управляемых термоядерных реакций в ускорителях до радиотехники и космологии). Часть результатов Андронова была переоткрыта в США, поэтому теперь большинство ссылок указывают на работы американских математиков.

Как самостоятельная область общей теории динамических систем эргодическая теория оформилась в начале 1930-х годов после работ Дж. Биркгофа и фон Неймана. Первый период ее развития (вплоть до 1958 г.) был периодом уточнения основ и исследования различных конкретных примеров, от геодезических потоков до теоретико-числовых систем. Наиболее важные работы этого периода принадлежат фон Нейману, А.Н. Колмогорову, А.Я. Хинчину, П. Халмошу, Э. Хопфу, Ш. Какутани и В.А. Рохлину.

Новый импульс развитию эргодической теории придала работа А.Н. Колмогорова об энтропии динамических систем, открывшая новый период в исследованиях динамических систем в целом.

С появлением теории КАМ (Колмогорова – Арнольда – Мозера) в начале 1950-х годов ситуация резко изменилась. Теория КАМ рассматривает влияние резонансов на траектории. Она показала, что резонансы приводят к траекториям двух типов: с «нормальным» поведением и со случайным поведением. Теория не решила проблему расходимостей Пуанкаре, но привела к классификации траекторий. Проблему неинтегрируемости перестали рассматривать как сопротивление природы прогрессу знания, а начали рассматривать как новую веху в развитии динамики. Наиболее важный результат теории КАМ – появление стохастических траекторий – подтверждается численными экспериментами.

Теория КАМ используется и в небесной механике при исследовании устойчивости и неустойчивости планетных орбит, и в теории гироскопов, и при управлении ускорителями пучков заряженных частиц, и при анализе «магнитных поверхностей» для удержания плазмы в установках для проектируемого управляемого термоядерного синтеза.

В ньютоновском описании пространство было евклидовым, а время текло равномерно. В теории относительности Эйнштейна геометрия перестает быть евклидовой и зависит от распределения материи. В квантовой механике пространство, в котором происходит эволюция волновых функций, гильбертово. Хаос вынуждает отказаться от гильбертова пространства и перейти к обобщенным пространствам, часто называемым «оснащенными» пространствами, структура которых зависит от конкретной формы неустойчивости. Обобщенные («оснащенные») пространства были впервые введены в математическую литературу И.М. Гельфандом и его коллегами в 1960-е годы. Взаимосвязь между оснащенными пространствами и хаосом понята относительно недавно. Пригожин считал, что теория оснащенных пространств дает ключ к описанию хаотических систем. Новый подход позволяет решить ряд нерешаемых ранее проблем неинтегрируемых систем.

В 1960-х годах американский математик С. Смейл попытался построить исчерпывающую классификацию типичных разновидностей поведения динамических систем. Поначалу он предполагал, что можно обойтись различными комбинациями периодических движений, но вскоре понял, что возможно значительно более сложное поведение. Он исследовал открытое Пуанкаре сложное движение в ограниченной задаче трех тел и получил систему, известную как «подкова Смейла». Им показано, что, несмотря на детерминированность, такая система проявляет некоторые черты случайного поведения. Другие примеры подобных явлений в теории динамических систем были разработаны американскими и российскими учеными.

Исследование хаоса позволяет пересмотреть смысл законов природы. Во всех процессах, происходящих во Вселенной, присутствуют случайные факторы. Они влияют на развитие процессов и придают им неопределенность. Законы микромира описываются на языке теории вероятностей. Тождественно протекающие процессы отсутствуют, имеет место лишь схожесть, близость. Теперь большинство ученых утверждает, что в природе царит хаос.

Американским математиком Митчелом Фейгенбаумом разработана теория универсальности. Он успешно использовал в своей работе ЭВМ и сумел вывести удивительные закономерности. Между хаосом и порядком существует глубокая связь, которую удалось зафиксировать с помощью уравнений, относящихся к классу так называемых функциональных, теория которых начала усиленно развиваться в 1980-е годы. Фейгенбаум исследовал, каким образом в динамических системах, зависящих от параметра, происходит переход от устойчивого типа движения, который естественно назвать ламинарным, к неустойчивому типу движения, вызывающему появление сильных статистических свойств, часто ассоциирующихся с турбулентностью. Открытие, которое при этом было сделано, выходит за рамки этой проблемы, поскольку дает совершенно новый метод исследования микроскопических, т. е. локальных, свойств динамических систем.

Высокая чувствительность хаотических систем к внешним воздействиям может быть использована для управления их динамикой. Это значит, что посредством достаточно малых воздействий сложные системы можно

переводить из режима хаотических колебаний на требуемый динамический режим и стабилизировать их поведение. Например, это может быть использовано в кардиологии для лечения сердечной аритмии и борьбы с фибрилляцией.

Синергетика и неравновесная термодинамика. В последние десятилетия развивается новое научное направление интегративного характера, объединяющее физику, астрономию, химию, биологию, психологию, социальные науки, философию.

В XX в. многочисленные попытки построить универсальную систему природы и общества вылились в 1960-х годах в формирование мощного междисциплинарного учения – синергетики. Термин «синергетика» (от греч. *synergeia* – совместное действие, сотрудничество) был предложен известным дизайнером, архитектором и изобретателем из США Ричардом Фуллером. Однако основателем этого научного направления считают немецкого физика, специалиста по теории лазеров Германа Хакена. Он обнаружил, что образование внутренних структур в лазере происходит в соответствии с законами, очень напоминающими конкуренцию молекулярных видов, которую описал Манфред Эйген в своих исследованиях ранней эволюции жизни. Термин «синергетика» специалисты используют с осторожностью.

Опираясь на результаты математического моделирования, синергетика выявляет закономерности эволюции и является общей теорией самоорганизации в открытых нелинейных системах. Ее задача состоит в нахождении и подробном исследовании тех базовых математических моделей, которые исходят из наиболее типичных предположений о свойствах отдельных элементов, составляющих систему, и законах взаимодействия между ними. Полагают, что синергетика располагает методом или методами одинаково полезными при изучении разнообразных явлений самоорганизации в разных областях естественных и гуманитарных наук. Однако самоорганизующаяся система не может быть замкнутой. Одним из условий самоорганизации является открытость системы – возможность обмена со средой энергией или веществом. Другим условием, как было замечено при наблюдении самозарождающихся структур при химических реакциях определенного типа, является первоначальное отклонение от равновесия. Третье условие – все микроскопические процессы в системе, поддающиеся статистическому анализу, должны происходить кооперативно, самосогласованно. В открытой системе после подвода энергии образуется некая структура. В этом ключ к термодинамическому анализу самоорганизации в неравновесных системах, к физическому описанию эволюции открытых систем.

Синергетика находится в процессе становления. Все идеи, взгляды, разработки, подходы, методы еще не систематизированы, остаются неосмысленными многие новые факты. Исследования ведутся разными школами, каждая из которых имеет свой взгляд на конкретные проблемы и вводит свою терминологию. Новую теорию специалисты различных профилей строят, основываясь на разных точках зрения, опираясь на знания разных областей науки, поэтому синергетика в настоящее время похожа на Вавилонскую башню. Некоторые ученые считают синергетику общей культурой современного

научного мышления, в основе которого лежит следующее утверждение: деление на различные науки всегда условно, природа едина. С мировоззренческой точки зрения синергетику иногда называют универсальной теорией эволюции, но такое толкование подвергается критике. Область исследований синергетики четко не определена, так как ее интересы распространяются на все отрасли естествознания. Общим признаком является рассмотрение динамики любых необратимых процессов. С точки зрения синергетики, мир предстает перед нами не как составленный из отдельных «кирпичиков» (атомов), а в виде процессов наподобие вихрей, турбулентностей, волн, солитонов, диссипативных структур.

Такую же задачу, как и Хакен, поставил перед собой бельгийский ученый русского происхождения Илья Романович Пригожин, получивший в 1977 г. Нобелевскую премию за работы по термодинамике неравновесных процессов. Он стремился к модернизации физических законов, хотел, чтобы в фундаментальном описании природы фигурировали необратимость и «стрела времени». Вместо термина «синергетика» в своих исследованиях Пригожин использует выражение «теория диссипативных структур» или «неравновесная термодинамика».

И синергетический подход Хакена, и термодинамический подход Пригожина имели одну цель – исследование явления самоорганизации. Однако достичь этой цели ученые пытались по-разному. Хакен шел от теории лазерного излучения. Он использовал цепь аналогий: лазерная генерация – фазовые переходы – гидродинамические неустойчивости. Хакен создал единый аппарат для описания этих и подобных им явлений на основе принципа кооперативности. Он считал, что неотъемлемым признаком самоорганизации в физических системах является самосогласованное поведение их элементов.

Пригожин теоретически анализировал возникновение структур в химических растворах, используя термодинамический подход. Он пришел к чрезвычайно важному выводу: неравновесность состояния системы может стать причиной возникновения в ней порядка. До этих пор классическая термодинамика имела дело только с одним процессом – ростом энтропии, возникновением беспорядка из первоначальной упорядоченности. При переходе к термодинамическому анализу открытых систем Пригожин обнаружил, что этот процесс может идти вспять и из беспорядка иногда рождается порядок, как это следует из теории биологической эволюции.

Приступая к работе над теорией неравновесных процессов, Пригожин в итоге стремился построить новую термодинамику, включающую классическую как частный случай. На основе из концепции образования устойчивых диссипативных структур в системах вдали от равновесия, Пригожин и Гленсдорф попытались математически сформулировать правило разрушения и рождения новых структур. Они предположили, что существует только один тип физических законов, но различны термодинамические ситуации: вблизи и вдали от равновесия. По их мнению, разрушение структур наблюдается в непосредственной близости к термодинамическому равновесию, а рождение структур может наблюдаться за пределами устойчивости. Это означало, что живые организмы можно рассматривать как диссипативные структуры,

как некие открытые физические и химические системы. Многие ученые с этим не согласились.

Используя обобщение методов, вошедших в физику с квантовой теорией, Пригожин получил возможность описания эволюции во времени распределения вероятностей – центрального объекта в описании хаотических систем. Он многократно обращался к рассмотрению поведения диссипативных систем вблизи точек бифуркации. Такие системы как бы колеблются перед выбором одного из путей эволюции, и выбор этот может зависеть от небольшой флуктуации, в результате чего резко изменится поведение всей макроскопической системы. В этом Пригожин видел аналогию диссипативных систем с социальными явлениями и историей.

Господствующий в науке три столетия детерминизм утрачивает свои позиции. В журнале «Вопросы философии» (№ 6, 1991) размещена статья Пригожина «Философия нестабильности». В ней говорится, что в 1986 г. сэр Джеймс Лайтхилл, ставший позже президентом Международного союза чистой и прикладной математики, сделал удивительное заявление: он извинился от имени своих коллег за то, что в течение трех веков образованная публика вводилась в заблуждение апологией детерминизма, основанного на системе Ньютона, тогда как можно считать доказанным, по крайней мере с 1960 г., что этот детерминизм является ошибочной позицией. По мнению Пригожина, одни процессы при существующем уровне знаний допускают описание с помощью детерминированных уравнений, другие требуют привлечения вероятностных соображений.

Теория катастроф. В реальном мире малые усилия могут приводить к непредсказуемым последствиям. Легкий поворот выключателя приводит в действие управляющие механизмы, и открываются створки плотины, мощные потоки воды обрушиваются на лопатки турбин, заставляя крутиться многотонный вал генератора. Легкий удар по детонатору вызывает взрыв, при котором мгновенно высвобождается энергия, сравнимая с энергией маленького солнца. Маленький камешек может вызвать горный обвал, страшную по своим последствиям снежную лавину. Научная и инженерная мысль открыла множество примеров скачкообразного изменения системы при малых воздействиях, но, как ни странно, на наши представления об окружающем мире до недавнего времени это почти не влияло.

Одной из частей общей математической теории, изучающей сложные нелинейные системы, является теория катастроф. Катастрофой в математике называют скачкообразное изменение, возникающее при плавном изменении внешних условий. Как научная дисциплина теория катастроф оформилась в 1970-х годах. Достоинством этой теории является то, что она не требует построения подробных математических моделей и может описывать ситуации не количественно, а качественно.

В основе теории катастроф лежат теория бифуркаций в динамических системах Пуанкаре и Андронова и теория особенностей гладких отображений, основоположником которой является американский тополог Хасслер Уитни. Теория особенностей – это обобщение задач на экстремум в математическом анализе. Модели реальных систем часто приводят к условиям экстремума

функций многих переменных, зависящих от многих же параметров. Эти условия представляют собой системы нелинейных уравнений со многими параметрами, которые зачастую с трудом поддаются даже численному анализу. Возникает вопрос: являются ли все эти переменные и параметры существенными? Если нет, то как выделить таковые?

В 1960-е годы теорией катастроф занимался французский математик Рене Том. Он и ввел в обращение понятие «теория катастроф». После работ Р. Тома началось интенсивное развитие как самой теории катастроф, так и ее многочисленных приложений. Значение элементарной теории катастроф состоит в том, что она сводит огромное многообразие ситуаций к небольшому числу стандартных схем, которые можно детально исследовать. Различают семь канонических типов катастроф для функций одной или двух переменных и числа управляющих параметров, не превышающих пяти.

Популярность идеи Уитни и Тома приобрели благодаря нескольким публикациям и лекциям британского математика Кристофера Эрика Зимана. В нашей стране теорией катастроф занимался В.И. Арнольд. В самом начале 1970-х годов она была необычайно модной, но затем подверглась критике. Она использует те же понятия (аттрактор, турбулентность), что и синергетика, теория хаоса и нелинейная динамика.

Теория катастроф широко применяется в механике конструкций, метеорологии, аэродинамике, оптике, теории кооперативных явлений, квантовой динамике. Но главное, что эта теория подводит базу под описание качественных изменений в нелинейных уравнениях, моделирующих системы, далекие от равновесия. Она является основой анализа в теории бифуркаций, в теории переходов термодинамических систем в новые структурные состояния.

Качественные изменения в поведении различных физических систем активно изучались и изучаются в традиционных подходах, но теория катастроф проливает свет и на гораздо более сложные проблемы подобного рода. В результате открывается возможность обобщений. Наряду с другими современными теориями нелинейных динамических систем теория катастроф в значительной степени изменила привычные представления об устойчивости и инерционности мира. Стали более очевидны последствия в результате нарушений гармонии и равновесия противоположных природных сил неограниченного роста промышленного производства в современном обществе. Сейчас все чаще говорят о необходимости переоценки ценностей, о необходимости ценить красоту и соразмерность выше материальных благ. Теория катастроф открывает и другие возможности. Действительно, поскольку мы убедились в том, что при определенных условиях очень малые воздействия могут привести к значительным изменениям, поэтому не следует опускать руки даже в самых сложных ситуациях. Может быть, кажущаяся безысходность – это лишь признак надвигающейся «катастрофы», обещающей нам новый период благополучия.

Усилия математиков направлены на то, чтобы выявить все типы нелинейных уравнений, решение которых приводит к детерминированному хаосу. Его изучение может привести к созданию мощного математического аппарата, обладающего общностью и большими возможностями для приложений.

Фракталы

Ощущение прекрасного возникает благодаря гармонии порядка и хаоса в объектах природы – тучах, деревьях, горных грядах или кристалликах снега. Их контуры – это отражение динамических процессов, определенное чередование порядка и хаоса. Для адекватного описания природы не хватало математических средств, требовался новый математический аппарат. Подходящий аппарат нашел французский математик Бенуа Мандельброт, создавший фрактальную геометрию.

Описание более 100 лет тому назад в математической литературе объектов, которые мы теперь называем фракталами, было встречено критикой. Французский математик Шарль Эрмит даже окрестил эти объекты монстрами, и математическая общественность признала их математической патологией. Термин «фрактал» Мандельброт придумал в 1975 г., еще не дав ему строгое математическое определение. По смыслу термин означал «нерегулярный, но самоподобный объект». Самоподобие – достаточно старая идея (стоит вспомнить, например, матрешек). Слово «фрактал» образовано от латинского *fractus*, что в переводе означает «состоящий из фрагментов». В основе понятия фрактала лежит идеализация действительности: фрактальные объекты самоподобны, т. е. вид их не претерпевает существенных изменений при разглядывании их в микроскоп с любым увеличением. О множествах, имеющих такую структуру, говорят, что они обладают геометрической (масштабной) инвариантностью.

Протекание физических процессов в природных объектах, имеющих фрактальную форму, характеризуется рядом особенностей. Фракталы иначе рассеивают электромагнитное излучение, по-другому колеблются и звучат, иначе проводят электричество, во фракталах иначе происходит диффузия вещества. Возникает новая область естествознания – физика фракталов. Фракталы становятся удобными моделями для описания процессов в средах, ранее считавшихся неупорядоченными. Примерами фракталов в математике могут служить кривая Пеано, ковер Серпиньского и др. Принцип самоподобия в приближенном виде существует в природе: линии берегов морей и рек, очертания облаков и деревьев, турбулентные потоки жидкости или газа, иерархическая организация живых систем.

Давно подмечено, что между наукой и искусством есть связь. Так, А. Эйнштейн писал, что там, где окружающий мир перестает быть ареной личных надежд и желаний, где мы как свободные существа, сомневаясь и размышляя, созерцаем его в изумлении, там мы вступаем в царство искусства и науки. Если мы описываем увиденное и известное по опыту на языке логики – это наука; если же мы представляем его в формах, внутренние взаимосвязи которых недоступны нашему сознанию, но которые интуитивно воспринимаются как осмысленные, – это искусство. И для искусства, и для науки общим является увлечение чем-то стоящим выше личного, свободным от условного.

Известный биолог А.А. Любищев, размышляя о том, что такое красота, пришел к выводу, что это одно из самых загадочных явлений природы. И как в законах строения и развития природных тел мы имеем разные уровни, так

есть они и в прекрасном. А.А. Любищев предположил, что и на высшем уровне могут находятся абстрактнейшие математические теории и музыкальные творения гениальных композиторов. Не всем дано подняться на эти вершины, но некоторый намек на высшую красоту мы можем постичь, внимательно рассматривая ледяные узоры на стеклах. Такие узоры – это типичные фракталы.

Именно фракталы сделали осязаемой связь науки и искусства, так как многие из них обладают эстетической привлекательностью. Во многих странах мира проходила выставка, организованная бременскими математиками Рихтером и Пайтгеном в содружестве с художниками, на которой было представлено около 150 художественных изображений фракталов. Весь мир обошли компьютерные «лунные» пейзажи, выполненные Бенуа Мандельбротом и его коллегами на основе фрактальных множеств.

Типы фракталов. Наиболее эффектными являются геометрические фракталы, получаемые в результате замены отрезков прямых на ломаные линии, получаемые по определенному алгоритму.

Самой крупной группой фракталов являются алгебраические фракталы. Их получают в нелинейных процессах динамических систем. Фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Меняя алгоритм выбора цветов, можно получить сложные картины с причудливыми многоцветными узорами.

Стохастические фракталы получаются при случайном изменении параметров итерационного процесса. Они позволяют моделировать природные объекты: несимметричные деревья, изрезанные береговые линии в одномерном варианте и рельеф местности, поверхность моря – в двумерном.

Размерность фракталов. Внутренние свойства фракталов удобно описывать числовой характеристикой, получившей название фрактальной размерности. Фракталы являются геометрическими самоподобными объектами с дробной в общем случае размерностью. Она была впервые рассмотрена в работах немецкого математика Феликса Хаусдорфа в 1919 г. Если объект разбит на N равных между собой подобъектов, подобных самому объекту с коэффициентом подобия r, то размерность d находят из соотношения $N_r^d = 1$, т. е. $d = \dfrac{\log N}{\log(1/r)}$. Если, например, разрезать куб на 1000 равных кубиков, то ребро маленького кубика будет в 10 раз меньше ребра исходного куба. В данном случае $N = 1000$, $r = 1/10$, следовательно, $d = 3$.

Вычислим размерности двух фракталов: одного из вариантов ковра Серпиньского и снежинки Коха.

Ковер Серпиньского. Будем на каждом шаге отбрасывать среднюю часть из равностороннего треугольника. Получим фигуру, имеющую вид как на рис. 5. Коэффициент подобия $r = 0{,}5$, $N = 3$. Следовательно, размерность равна $d = \dfrac{\log 3}{\log(1/0{,}5)} \approx 1{,}5850$.

Это уже не линия с размерностью 1, но еще и не поверхность, размерность которой 2. Это что-то между линией и поверхностью. Оказывается,

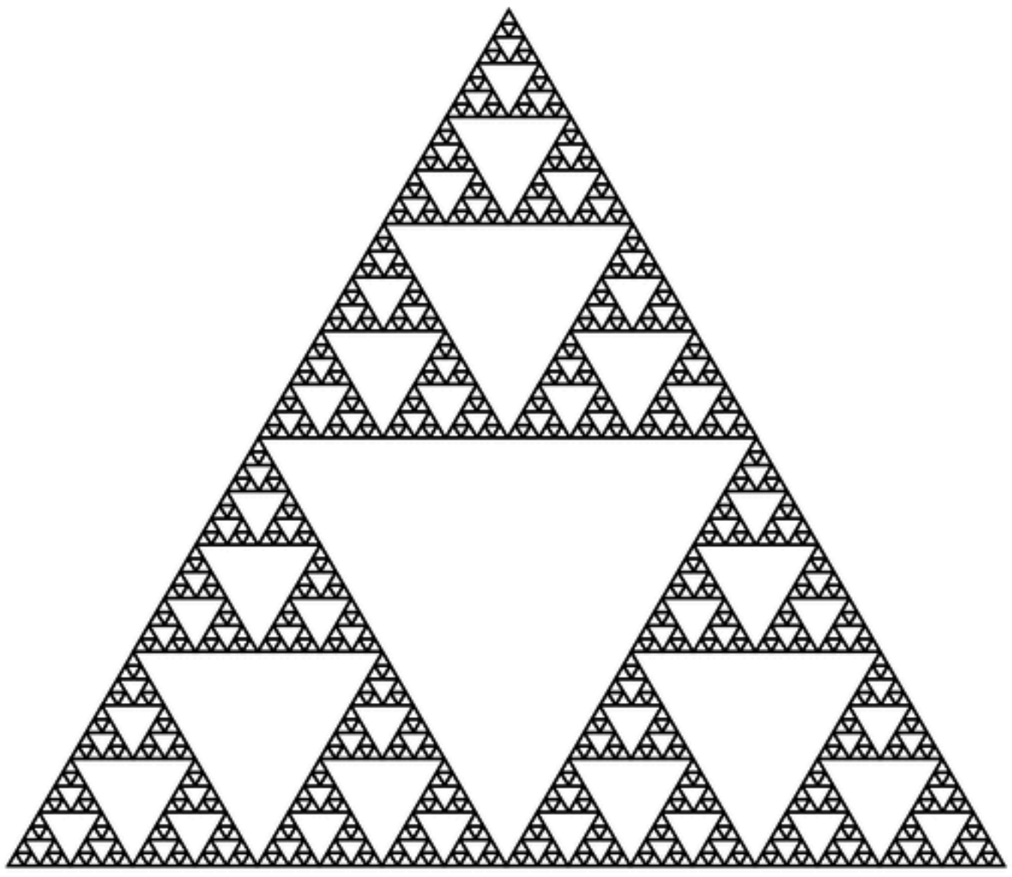


Рис. 5. Ковер Серпиньского

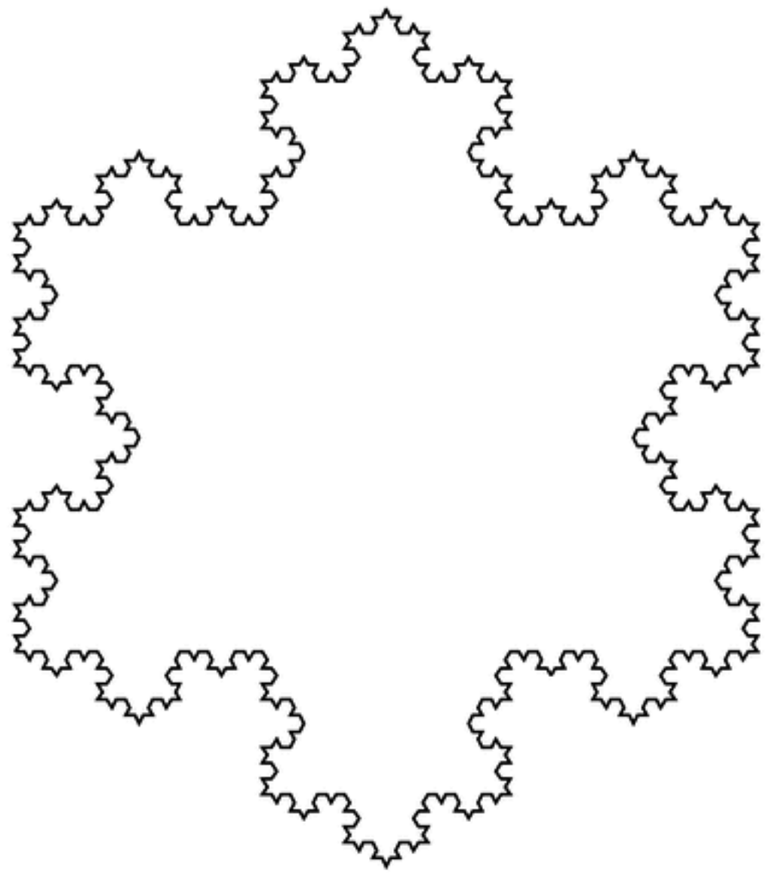


Рис. 6. Снежинка Коха

в природе существуют объекты, представляющие собой аналог ковра Серпиньского с размерностью $d \in (1; 2)$. Это фрактальные агрегаты коллоидных частиц.

Снежинка Коха. Границу этого фрактала описывает кривая, состоящая из трех одинаковых фракталов. Разделим каждую из сторон равностороннего треугольника на три части и на средних участках, как на основаниях, построим с внешней стороны новые равносторонние треугольники. Отбросим основания построенных треугольников. После первой итерации получим «звезду Давида». На каждой следующей итерации будем получающиеся прямые отрезки делить на три части, на средней части строить наружу равносторонний треугольник и отбрасывать его основание.

После многих итераций получим фигуру (рис. 6), которую в 1904 г. построил шведский математик Нильс Фабиан Хельге фон Кох. Размерность этого фрактала $d = \dfrac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}2618$. Ковры Серпиньского, снежинка Коха, кривая Пеано – экзотические линии, являющиеся фантазией изощренного математического ума. Но существуют реальные объекты, не укладывающиеся в привычные представления практической геометрии. Английский естествоиспытатель Л. Ричардсон, исследуя очертания береговых линий, обнаружил, что они также представляют собой объекты с дробной размерностью, т. е. являются фракталами. Для побережья Великобритании их размерность равна 1,24, для побережья Австралии – 1,13. Изломы и шероховатости линии берега, видные на картах крупного масштаба, постепенно исчезают с уменьшением масштаба.

Одним из исследователей фракталов был французский математик Гастон Жюлиа. В годы Первой мировой войны он открыл множества Жюлиа, представляющие собой границы, в различных частях которых встречаются одни и те же формы разных масштабов. В малой окрестности границ множеств Жюлиа процесс хаотичен настолько, насколько это возможно. Ведь вблизи каждой точки границы содержится бесконечно много аттракторов и хаотических точек.

Фракталы могут быть самой разной природы. Выше были приведены примеры геометрических фракталов. Пространство динамических систем может быть разбито на области притяжения аттракторов, если оно обладает различными устойчивыми состояниями. Неожиданной для математиков стала возможность получения на компьютерах с помощью примитивных алгоритмов сложных нетривиальных структур. Примеры еще двух фракталов представлены на рис. 7 и 8.

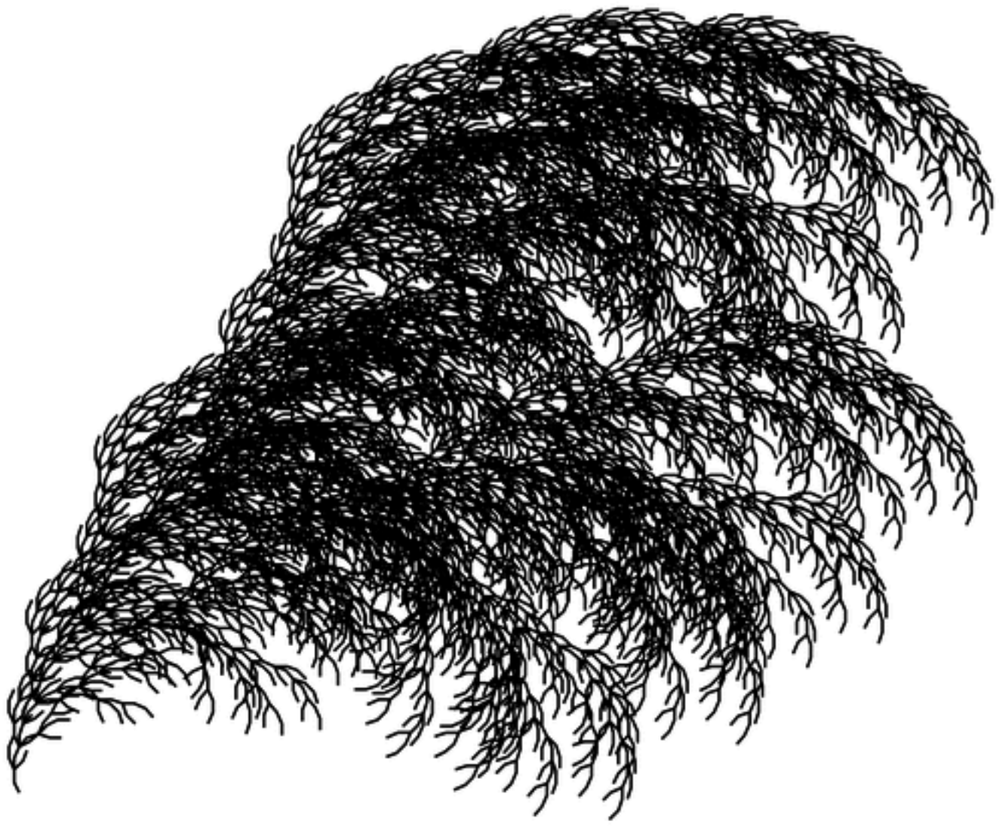


Рис. 7. Куст

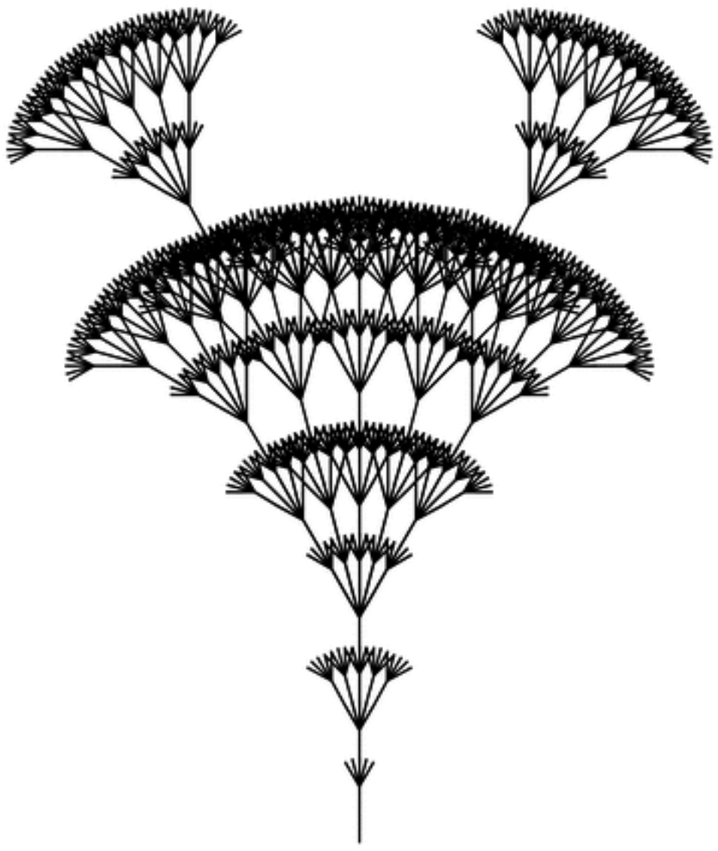


Рис. 8. Цветок Брандона Нельсона

Фрактальная геометрия. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 г. книги Мандельброта «Фрактальная геометрия природы». В его трудах использованы научные результаты других ученых (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантора, Хаусдорфа), работавших в период 1875–1925 гг. в той же области. Но только в 1970-е годы удалось объединить результаты их работ в систему.

Сначала Мандельброт исследовал фракталы, инвариантные относительно линейных преобразований, затем фракталы, инвариантные относительно нелинейных преобразований. Реальное построение фракталов стало возможным только с возникновением достаточно мощных компьютеров, так как оно требует повторения огромного числа относительно простых операций. Позже Мандельброт занялся построением на компьютере и изучением множеств Жюлиа, исследованием которых до 1918 г. занимались Жюлиа и Фату.

В 1980 г. Мандельброт обнаружил принцип, с помощью которого образуются самоподобные структуры. Это происходит в процессах с обратной связью, которые описываются нелинейным законом (динамической зависимостью) $x_{n+1} = f(x_n, c)$. Мандельброт провел исследования таких процессов в комплексном случае. Он остановился на законе $z_{n+1} = z_n^2 + c$, где c – комплексное число. До Мандельброта подобные процессы исследовал в 1970-х годах П.Дж. Мирбергер для комплексных z и действительных значений c.

Если при неизменном комплексном значении c изменять значения z_0, то получим множества Жюлиа, которые очень сильно зависят от значения c. Андриен Дуади писал, что одни из них похожи на большие «толстые» тучи, другие напоминают редкие кусты ежевики, третьи выглядят как искры, летящие в небе во время фейерверка. Одно множество имеет форму кролика, у многих других хвосты, как у морского конька.

А если принять $z_0 = 0$ и изменять значения c, то можно получить как связные множества Жюлиа, так и распадающиеся в так называемую пыль Фату. В первом случае комплексные значения c образуют множество M, которое Дуади назвал множеством Мандельброта. Это множество является путеводителем в мире параметров для множеств Жюлиа. На границе M меняется природа этих множеств. При $c \notin M$ множества Жюлиа теряют связность, «взрываются» и превращаются в пыль Фату.

Получить на комплексной плоскости множество Мандельброта можно только на ЭВМ, так как требуется провести огромное количество вычислений. Построенное с помощью ЭВМ множество Мандельброта изображено на рис. 9. Впервые это множество на экране монитора Мандельброт увидел 1 марта 1980 г.

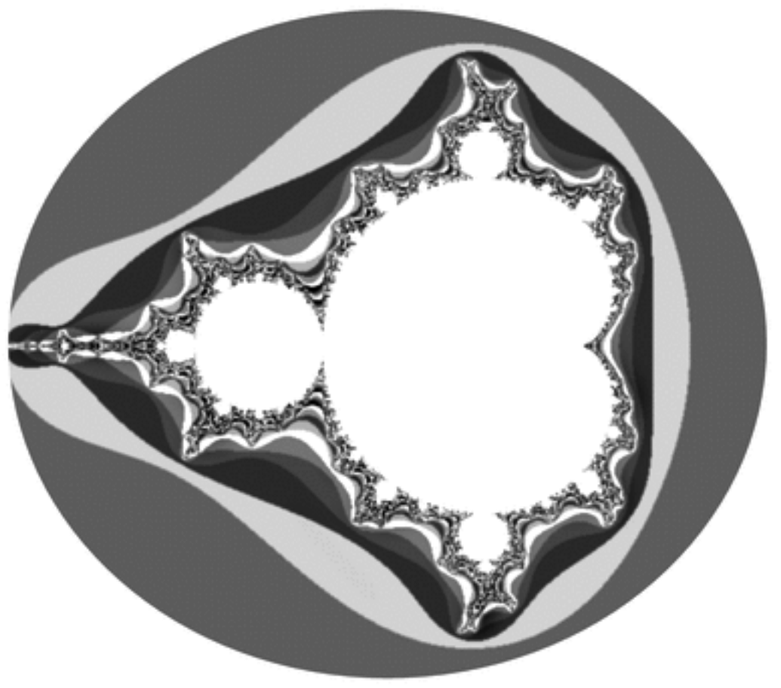


Рис. 9. Множество Мандельброта

Когда-то большинству людей казалось, что геометрия в природе ограничивается простыми фигурами такими, как линия, круг, коническое сечение, многоугольник, сфера, квадратичная поверхность, а также их комбинациями. Однако многие природные системы настолько сложны и нерегулярны, что использование только знакомых объектов классической геометрии для их моделирования не приводит к удовлетворительному результату. Как, к примеру, построить модель горного хребта или кроны дерева в терминах геометрии? В природе почти нет ровных линий и поверхностей, описываемыми привычными для нас уравнениями.

В 1984 г. Мандельброт размышлял, почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линии берега – это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой… Природа демонстрирует нам не просто высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно.

Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех геометрических объектов, которые Евклид считал бесформенными, – задачи исследования морфологии аморфного. Математики, однако, пренебрегли этим вызовом и предпочли все больше и больше отдаляться от природы, изобретая теории, которые не соответствуют ничему из того, что можно увидеть или почувствовать.

Многие природные образования имеют узорчатую структуру. Достаточно посмотреть на листья деревьев. Существует большое сходство между построением фракталов на экране компьютера и развитием живых организмов в природе. Как организм развивается из зародыша путем деления клеток, так и фрактал строится повторением миллионы раз простых операций. Так образуется самоподобие. При большом увеличении элементы множества Мандельброта похожи друг на друга, но все-таки различны, как различны существа, населяющие Землю. Идея самоподобия неоднократно встречалась как у философов, так и у поэтов. Лейбниц предполагал, что внутри капли воды могут умещаться целые вселенные со своими планетами. В 1922 г. поэт Валерий Брюсов в стихотворении «Мир электрона» писал:

Быть может, эти электроны –
Миры, где пять материков,
Искусства, знанья, войны, троны
И память сорока веков!
Еще, быть может, каждый атом –
Вселенная, где сто планет;
Там всё, что здесь, в объеме сжатом,
Но также то, чего здесь нет.

Фрактальные объекты встречаются не только на Земле, их много и в космосе. Кольца Сатурна на фотографиях, снятых космическими аппаратами при большом увеличении, напоминают фракталы.

Фрактальная геометрия позволит описывать природные объекты, имеющие такие сложные формы, для описания которых в обычной геометрии не существует достаточных средств. Если при построении фрактала в итерационном процессе случайным образом меняются какие-либо его параметры, то мы имеем стохастические фракталы. Они дают изображение объектов, очень похожих на природные несимметричные образования. Это могут быть горные пейзажи, иллюстрации к произведениям фантастики и т. п.

Ожидалось, что использование компьютеров позволит навести полный порядок и дисциплину во всех областях науки, а они дали возможность лучше понять гармонию и хаос.

Одним из основных применений фракталов является компьютерная графика. Используя их можно строить поверхности очень сложной формы. Изменение нескольких коэффициентов в уравнении позволяет добиваться практически бесконечных вариантов исходного изображения. Появилась возможность графического представления сложных неевклидовых объектов, образцы которых весьма похожи на природные объекты.

В XXI в. обязательно появятся устройства, построенные на принципах фрактальной геометрии. Уже сейчас используются фрактальные анализаторы для улучшения качества изображений. С помощью фракталов можно сжимать изображения, хранимые в электронной форме. Сравнивая фрактальные размерности сложных сигналов, энцефаллограмм или шумов в сердце, медики могут диагностировать некоторые тяжелые заболевания на ранней стадии, когда больному еще можно помочь. Метеорологи научились

определять по фрактальной размерности изображения на экране радара скорость восходящих потоков в облаках, что позволяет с большим упреждением посылать морякам и летчикам штормовые предупреждения.

Фракталы неисчерпаемы, как неисчерпаемы их приложения в науке, технике и искусстве. Но не следует забывать, о том, что и фракталы – не более чем упрощенная модель реальности, которая не может претендовать на роль универсального ключа к описанию природы. Английский биолог и философ Джон Бердон Сандерсон Холдейн сказал, что мир устроен не только причудливей, чем мы думаем, но и причудливей, чем мы можем предполагать.

А.С. Безикович

Безикович Абрам Самойлович родился 11 января 1891 г. в Бердянске (Украина) в многодетной семье караимов. В 1908 г. он окончил Бердянскую гимназию и поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета, где одним из его учителей был А.А. Марков. После окончания университета в 1912 г. Безикович по предложению Маркова и Стеклова был оставлен в университете для подготовки к профессорскому званию (теперь это аспирантура). В марте 1915 г. он опубликовал свою первую печатную научную работу по теории вероятностей. Чтобы жениться на В.В. Дойниковой, в 1916 г. Безикович перешел в православие, поскольку караимские законы не разрешали вступать в брак с лицами другого вероисповедания.

В 1917 г. Безикович стал приват-доцентом Петроградского университета и был направлен в учрежденный в 1916 г. Пермский университет экстраординарным профессором по кафедре математики физико-математического факультета.

В Гражданскую войну Пермь была занята войсками Колчака, и часть профессорско-преподавательского состава эвакуировалась в Томск. Безикович был назначен ректором Пермского университета, но уже летом 1920 г. Совет Пермского университета во главе с новым ректором принял решение направить Безиковича в научную командировку в Москву, Петроград и за границу. В октябре 1920 г. он выехал из Перми, но доехал только до Петрограда, где устроился работать в Педагогический институт на должность профессора и в Петроградский университет на должность приват-доцента.

Австрийский физик-теоретик Пауль Эренфест, высоко ценивший талант коллеги из России, отправил научные работы Безиковича на отзыв крупнейшим иностранным ученым. Наибольшее впечатление на математиков произвели результаты Безиковича по решению проблемы Какейя. Японский математик Какейя в 1917 г. сформулировал следующую задачу об игле: «В какой плоской фигуре, имеющей минимальную площадь, можно повернуть на 180 ° иглу единичной длины?» Решая эту задачу, Безикович в 1919 г. построил множество, имеющее нулевую меру Лебега и содержащее единичные

отрезки всех направлений. Этот и другие его научные результаты были высоко оценены математиками, и в ноябре 1924 г. Безикович получил Рокфеллеровскую стипендию для научных занятий за рубежом. Его обращения к власти за разрешением на выезд были безрезультатными.

В 1924 г. созрел план покинуть Россию нелегально. К Безиковичу решили примкнуть А.А. Фридман – автор теории расширения Вселенной, и математик Я.Д. Тамаркин. В последний момент из-за болезни Фридман вынужден был остаться. Через пограничную реку Безикович и Тамаркин по льду перешли в Латвию.

Из Латвии Безикович переехал в Копенгаген, где работал с Харальдом Бором. Рокфеллеровская стипендия дала ему возможность заниматься в течение года под руководством Бора изучением квазипериодических функций. Результатом их совместной работы стала монография Безиковича о почти периодических функциях – первое исследование в этой области математики. В работе рассматривались почти периодические функции и теория дробных размерностей (фрактальная размерность). В 1930 г. эта работа была отмечена премией Д. Адамса Кембриджского университета. Класс почти периодических функций, введенный Безиковичем, теперь носит его имя. Проблемы дробной размерности рассматривал и Ф. Хаусдорф. Дробную размерность, которая является количественной мерой неидеальности геометрических объектов (извилистости контура, морщинистости поверхности, пористости объема) называют размерностью Хаусдорфа – Безиковича.

Используя свой результат 1919 г., в 1927 г. Безикович показал, что мера множества Какейя может быть сколь угодно малой. Для математического мира этот результат был полной неожиданностью.

Из Копенгагена Безикович отправился на несколько месяцев в Оксфорд к известному математику Г. Харди, после чего в течение года читал лекции в Университете Ливерпуля. С 1927 г. Безикович жил в Кембридже, где сначала работал лектором, а с 1930 г. – штатным сотрудником Тринити-колледжа.

В 1950 г. Безикович был приглашен на должность заведующего кафедрой математики, которую занимал до выхода на пенсию в 1958 г.

За свою жизнь Безикович опубликовал около 130 научных работ. Он занимался теорией меры, теорией функций комплексного и вещественного переменных и другими вопросами анализа. Результаты, полученные им в области топологии, в настоящее время приобрели большое значение, и его имя связывается с новейшими исследованиями в этой области. Его необычайный математический талант сочетался с обаянием и остроумием, он пользовался любовью и уважением своих коллег и студентов.

Исследования Безиковича 1928–1937 гг. по теории множеств дробной размерности (теперь называемых фракталами), стали особенно актуальными в последние десятилетия.

После выхода на пенсию Безикович в течение нескольких лет читал лекции как приглашенный профессор в различных университетах США. Умер он 2 ноября 1970 г. в Кембридже (Великобритания).

И.Р. Пригожин

Лауреат Нобелевской премии 1977 г. по химии Пригожин Илья Романович не является математиком, но его влияние на развитие прикладной математики и других отраслей науки так велико, что не рассказать об этом отдельно автор данной книги не мог.

Илья Романович родился 25 января 1917 г. в Москве в семье инженера-химика Романа Пригожина, выпускника Императорского технического училища (ныне МГТУ им. Н.Э. Баумана), и пианистки Юлии Пригожиной (урожденной Вишман). В 1921 г. Пригожины эмигрировали в Литву, затем в Германию и в 1929 г. обосновались в Бельгии.

Родители хотели, чтобы сын стал юристом. Сам же он рассуждал так. Чтобы стать хорошим юристом, необходимо быть психологом. Для глубокого знания психологии необходимо разбираться в биологии. А для знания биологии нужно знать химию, физику, математику.

После окончания школы он изучал химию в Свободном университете в Брюсселе, который окончил в 1943 г. бакалавром естественных наук. В 1945 г. он защитил докторскую диссертацию, в 1947 г. – стал профессором физической химии в Свободном университете. Его диссертация, посвященная процессам в неравновесных открытых термодинамических системах, открыла путь для математического анализа не только технических, но и социальных систем.

До XX в. наука изучала обратимые процессы. Если в уравнения механики, содержащие время, вместо t подставить $-t$, то можно отслеживать процесс в обратном порядке. Например, из уравнения движения планет можно определить не только их положение в будущем, но и их положение в прошлом. Именно уверенность в обратимости процессов позволила Лапласу в 1814 г. утверждать, что при знании всех действующих в природе сил и относительного положения всех частиц во Вселенной теоретически можно всю Вселенную охватить единой формулой и рассчитать как все то, что было, так и все то, что будет в любой момент времени. «Ум», который мог бы это сделать, стали называть демоном Лапласа.

Теперь ученые сходятся во мнении, что в природе необратимых процессов больше, чем обратимых, и важную роль в формировании этого мнения сыграли работы Пригожина. Формально Нобелевскую премию он получил в области химии, но фундаментальная проблема, которой занимался Пригожин, не ограничивается рамками одной науки. В предисловии к книге «Порядок из хаоса» он пишет: «Существуют явления, которые представляются нам детерминированными и обратимыми. Таковы, например, движения маятника без трения или Земли вокруг Солнца. Но существуют также и необратимые процессы, которые как бы несут в себе стрелу времени… Вся химия, по существу, представляет собой нескончаемый перечень таких необратимых процессов».

Работы Пригожина показали, что направленность во времени – фундаментальное свойство всех естественных и даже социальных наук. На языке математики ему удалось объяснить, что хаос конструктивен и может порождать новый порядок.

Первой Пригожин исследовал термодинамику. Он изучал неравновесные необратимые процессы. Ему удалось изменить отношение ученых к обратимости природных процессов. Илья Романович показал, что в системах, далеких от равновесия, могут спонтанно возникать новые типы структур, и системы могут переходить от беспорядка и теплового хаоса к порядку. Могут возникать новые динамические состояния системы, отражающие ее взаимодействие с окружающей средой. Такие структуры и системы Пригожин назвал диссипативными.

При определенных условиях, поглощая массу и энергию из окружающего пространства, диссипативные структуры могут совершать качественный скачок к усложнению. Важно то, что такой скачок не может быть предсказан, исходя из классических законов статистики. Эти системы позже были названы его именем. Расчет таких систем стал возможен благодаря его работам, выполненным в 1947 г.

Теорию диссипативных структур Пригожин описал в рамках математической модели с зависимыми от времени нелинейными функциями, характеризующими способность систем обмениваться материей и энергией с внешней средой.

Пригожин начал заниматься синергетикой – теорией взаимодействия порядка и хаоса. Хотя большинство ученых отцом синергетики считает Германа Хакена, работы Пригожина в этой области являются основополагающими.

Илья Романович предполагал, что жизнь возникла не случайно, а является закономерным, хотя и не единственно возможным, следствием энтропической растраты энергии Солнца или какой-нибудь другой звезды.

Пригожин был уверен, что его работы, учитывающие фактор времени, могут быть использованы не только в физике и химии, но и в биологии, астрономии, науках о жизни человека и общества.

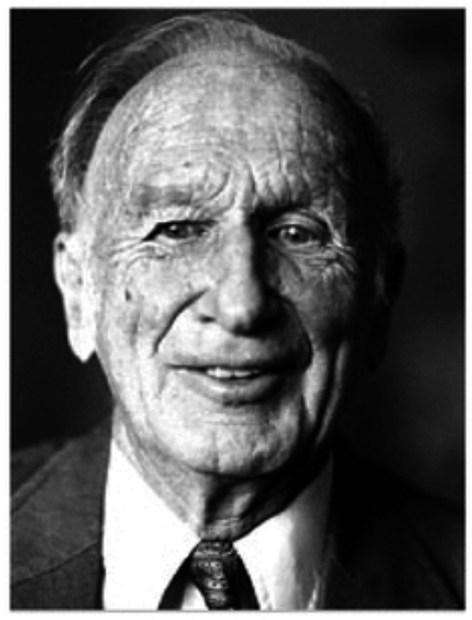
С 1962 г. И.Р. Пригожин возглавлял Международный институт физики и химии в Брюсселе. В 1967 г. он был назначен директором Центра статистической механики и термодинамики при Техасском университете в Остине. В 1977 г. после получения Пригожиным Нобелевской премии этот Центр стал носить его имя.

Пригожин был хорошим композитором, его произведения звучали по радио. Он имел степень доктора по археологии, и в качестве археолога его приглашали для чтения лекций в самые престижные университеты мира. В 1990-е годы Пригожин многое сделал для поддержания науки в нашей стране. В 1995 г. он стал почетным президентом открывшегося в Московском университете Института математических исследований сложных систем (директор института – ректор МГУ, академик В.А. Садовничий). Благодаря стараниям Пригожина в Санкт-Петербургском университете в 1995 г. была организована Лаборатория теории сложных систем.

Среди ученых второй половины XX в. вряд ли кто-то имел столько же наград, сколько Пригожин. Он был членом 70 национальных академий, почетным доктором 40 университетов разных стран.

Умер И.Р. Пригожин 28 мая 2003 г. в Остине на 87-м году жизни.

Эдвард Лоренц



Американский математик и метеоролог Лоренц Эдвард Нортон родился 23 мая 1917 г. в Вест-Хартворде (штат Коннектикут, США). В 1938 г. Лоренц окончил Дартмутский колледж со степенью бакалавра в области математики. Он поступил в аспирантуру Гарвардского университета и в 1940 г. получил степень магистра математики. В 1941/42 учебном году Лоренц преподавал математику в Гарвардском университете, а в 1942–1946 гг. служил синоптиком в авиации США. В 1943 г. он получил степень магистра по метеорологии в Массачусетском технологическом институте.

После демобилизации в 1846 г. Лоренц поступил на работу в отдел метеорологии в Массачусетский технологический институт, в 1948 г. защитил диссертацию на тему «Метод применения гидродинамических и термодинамических уравнений для атмосферных моделей» и получил степень доктора. Им опубликовано много работ по метеорологии.

В 1954 г. Лоренц был назначен доцентом, а в 1962 г. – профессором Массачусетского технологического института.

Использование компьютеров для моделирования сложных систем началось с прогнозирования погоды. Лоренц первым показал, что точный долгосрочный прогноз погоды невозможен. До этого не подвергалась сомнению точка зрения Джона фон Неймана, считавшего, что создание мощных компьютеров позволит точно предсказывать погоду на длительный срок.

До Лоренца метеорологические явления описывались линейными дифференциальными уравнениями. Лоренц первым установил, что уравнения для погоды должны быть нелинейными. Через четыре года после смерти фон Неймана Лоренц создал математическую мини-модель погоды, составив двенадцать дифференциальных уравнений, описывающих связь между температурой, атмосферным давлением и скоростью ветра. Считалось, что по приблизительным данным о начальном состоянии погоды (измерения никогда не бывают совершенными) можно рассчитать ее примерное поведение.

Зимой 1961 г. Лоренц, имея распечатку решения уравнений при начальных условиях, введенных с шестью знаками после запятой, решил получить другую распечатку, введя начальные условия с тремя знаками после запятой, т. е. более огрубленными. Он ожидал, что при незначительном отличии исходных данных результаты также будут отличаться незначительно. Однако графики решения, почти совпадающие на начальной стадии при малых значениях времени, разительно отличались. Изменение исходных данных на

тысячные доли процента привело к значительному изменению выходных данных на малом отрезке времени.

Дело в том, что сверхмощные компьютеры, оперирующие не двенадцатью уравнениями, как у Лоренца, а системами с тысячами точных уравнений, помогают составить точные прогнозы не более чем на 2–3 дня. Благодаря точным краткосрочным прогнозам мировая экономика ежегодно сберегает миллиарды долларов. Составление прогнозов погоды из искусства превратилось в науку. Прогнозы более чем на неделю практически бесполезны из-за турбулентности явлений, происходящих в атмосфере. На математическом языке невозможность долговременных прогнозов погоды означает сильную зависимость от начальных условий. Для идеального прогноза требуется не только совершенная математическая модель, но и точные знания направления и силы ветра, температуры, влажности и других условий во всем мире в один и тот же момент времени. Даже небольшое расхождение может привести к совершенно другим результатам.

В январе 1963 г. статья с результатами Лоренца была опубликована в журнале, но долгое время оставалась незамеченной. О ней вспомнили в 1970-е годы после публикации работ Мандельброта по фрактальной геометрии, когда теория хаоса стала предметом дискуссий и вошла в моду. В 1980-е годы статья Лоренца стала одной из самых цитируемых.

Лоренц стал искать порядок в случайности, ведь система демонстрировала апериодическое поведение, почти повторяя время от времени уже возникавшее ранее состояние. Он решил исследовать явление конвекции и составил систему из трех нелинейных дифференциальных уравнений, которая является грубой математической моделью конвекции. Численно решая ее на компьютере, Лоренц обнаружил, что решения колеблются нерегулярным, почти случайным образом. Им установлено, что при малом изменении начальных значений переменных отклонения усиливаются, и новое решение оказывается совсем непохожим на исходное. Результаты моделирования Лоренц опубликовал в статье «Детерминистский непериодический поток». Представленная в этой статье фазовая траектория решения (рис. 10), получила наименование «аттрактор Лоренца» и стала эмблемой первых исследователей хаоса. В 1971 г. бельгийско-французский математик Дэвид Рюэль ввел термин «странный аттрактор», чтобы описать явления, для которых составленная система детерминированных уравнений имеет хаотическое решение. Аттрактор Лоренца стал первым примером странного аттрактора, наглядной иллюстрацией динамического хаоса. Странные аттракторы имеют фрактальную размерность между 2 и 3.

В 1972 г. появилась работа Лоренца «Предсказуемость: может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?» Так родился известный термин «эффект бабочки». Одной из причин появления этого термина стал фантастический рассказ Рэя Брэдбери «И грянул гром», опубликованный в 1952 г. В этом рассказе путешественники во времени изменили будущее, случайно убив бабочку в доисторическую эпоху. К тому же, фазовый рисунок аттрактора Лоренца похож на крылья бабочки.

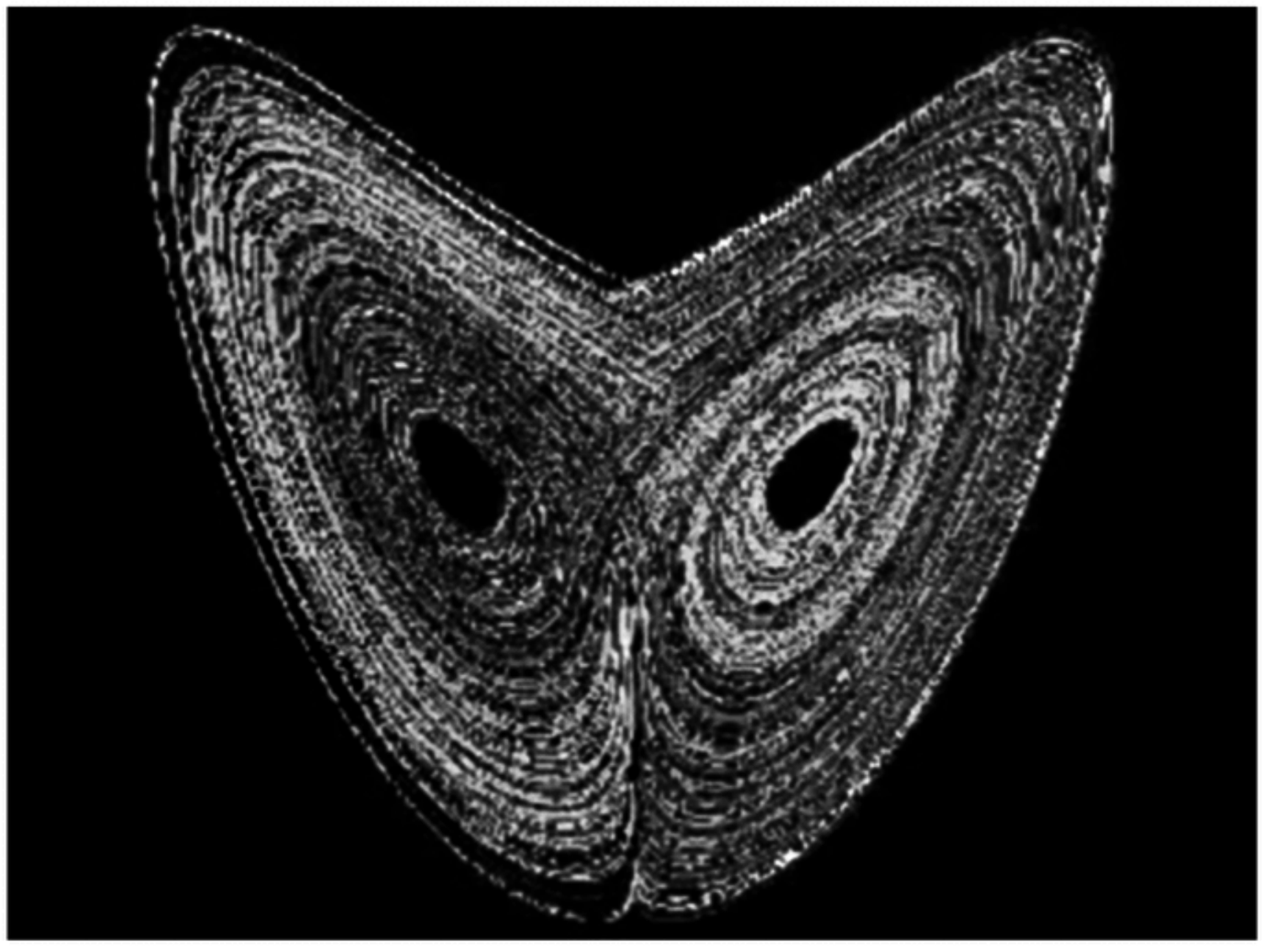


Рис. 10. Аттрактор Лоренца

В 1975 г. Лоренц был избран членом Национальной академии наук (США), с 1977 по 1981 г. был начальником отдела метеорологии Массачусетского технологического института. В 1983 г. совместно с Генри Стоммелом он получил премию Крафурда от Королевской академии наук Швеции. В 1987 г. он вышел на пенсию и был избран почетным профессором.

Лоренц был членом Американской академии гуманитарных и естественных наук, Американского метеорологического общества и Национальной академии наук США. В 1988 г. его избрали иностранным членом по Отделению океанологии, физики атмосферы и географии (геофизическая гидродинамика) АН СССР.

В 1991 г. Лоренц получил премию Киото и в 1992 г. стал первым лауреатом медали Роджера Ревелла Американского геофизического союза за достижения в области исследования атмосферных процессов. Среди других наград Лоренца следует отметить высшую награду Российской академии наук – Большую золотую медаль им. М.В. Ломоносова, присужденную в 2004 г. за основополагающий вклад в разработку теории общей циркуляции атмосферы.

Лоренц увлекался скалолазанием и любил лыжные прогулки. Это позволило ему сохранять высокую работоспособность долгие годы.

Скончался Лоренц в Кембридже 16 апреля 2008 г.

Бенуа Мандельброт

Мендельброт Бенуа родился в Варшаве в 1924 г. В 1936 г. семья Бенуа эмигрировала во Францию, в Париж. Его дядя Шолем Мандельбройт был членом группы Н. Бурбаки. Во время войны семья переехала в Тюль, небольшой городок на юге Франции. Там Бенуа пошел в школу. Учиться он не хотел и, по семейной легенде, к 16 годам плохо знал алфавит и таблицу умножения до пяти. Но у него было великолепное пространственное воображение. На вступительных экзаменах в университет он не мог решить алгебраические задачи обычным способом, но после того, как он установил графический смысл условий, ему удавалось получить правильные результаты. За оригинальность решений его приняли в университет, где он проучился с 1945 по 1947 г.

В 1948 г. в США, в Пасадене, Мандельброт получил степень магистра наук (по аэрокосмическим наукам) в Калифорнийском технологическом институте. Через четыре года он защитил диссертацию в Парижском университете, был приглашенным ученым в Принстоне, Женеве, Париже.

В 1958 г. Мандельброт переехал в США, где приступил к работе в научно-исследовательском центре IBM в Йорктауне.

С 1974 г. является членом исследовательского совета и совета фирмы IBM в Йорктаун-Хейтсе, штат Нью-Йорк, с 1984 г. – профессором Гарвардского университета.

Мандельброту нравилось переключаться с одной темы на другую, и он решал задачи теории игр, экономики, географии, астрономии, физики. Подчиняясь внезапному порыву, Мандельброт мог бросить исследования незаконченными, погружаясь в новую, ранее незнакомую ему область науки. Он занимался математической лингвистикой, переформулировал и уточнил эмпирический закон частотного распределения слов в тексте: теперь он называется законом Ципфа – Мандельброта.

Так случилось, что Бенуа Мандельброт стал первым математиком, получившим доступ к высоким компьютерным технологиям. Исследуя экономику, он обнаружил, что произвольные внешне колебания цены могут следовать скрытому математическому порядку во времени, который не описывается стандартными кривыми. Широко известен его пример с ценой хлопка, по которой имелись статистические данные более чем за сто лет. Колебания цены в течение дня были непредсказуемы, но компьютерный анализ показал, что график колебания цены в течение дня аналогичен графику колебаний цены в течение длительного промежутка при другом масштабе времени. Мандельброт стал первооткрывателем такого анализа. Он обнаружил аналогию между длительными и кратковременными колебаниями цен. Это удивило многих экономистов, а для Мандельброта стало первым толчком к пониманию фрактальной геометрии.

Множество Мандельброта, о котором сказано выше, является самым известным фракталом. Кроме Мандельброта, на его открытие претендовали и другие математики. Бенуа Мандельброт утверждал, что он и только он открыл это множество. Ученый охарактеризовал свои первые пробные шаги в 1979 г. по исследованию множества как «бессмысленную забаву». Мандельброт использовал компьютер, чтобы получать изображения множеств, которые вычисляются путем подстановки комплексного числа в итерационные функции. Необычные свойства этих множеств были описаны еще в 1906 г. французским математиком Пьером Фату. Множества были позже названы в честь Гастона Жюлиа, который доказал спустя десятилетие, что его исследования множеств имели более важное научное значение по сравнению с работами Фату.

Роберт Брукс и Питер Мателски настаивали, чтобы их признали соавторами открытия наряду с Мандельбротом. Мандельброт отвечал, что даже если публикация Брукса и Мателски предшествовала его публикациям, то их все же нельзя считать первооткрывателями множества, поскольку они не поняли его истинного значения.

Хаббард рассказывал, что в 1976 г. он начал пользоваться компьютером для получения карты множеств комплексных чисел, генерируемых в ходе итерационных процессов, и ему удалось найти другой способ порождения множества Мандельброта. В конце 1978 г. один из студентов-дипломников Хаббарда, Ф. Кочмен, подошел на конференции к Мандельброту и показал ему изображения Хаббарда. Мандельброт написал ему письмо и пригласил к себе, чтобы обсудить исследования. Хаббард в начале 1979 г. поехал и рассказал Мандельброту, как можно составить компьютерную программу для отображения результатов итерационного процесса. Хаббард признал, что не осознавал в полной мере значения своего изображения и что оно показывало лишь отдельные участки множества Мандельброта. Он также не отрицал, что Мандельброт нашел более эффективный способ получения изображений, но его «не перестает возмущать» тот факт, что Мандельброт не упомянул о нем ни в своей статье в 1980 г., ни в более поздних публикациях. Хаббард считает, что это было нарушением научной этики.

Так кто же все-таки открыл множество Мандельброта? У. Тёрстон считает, что прогресс в математике не достигается в одиночку и довольно часто теории не называются в честь первого человека, открывшего их. Так было и со множеством Мандельброта. Тем не менее Тёрстон отмечает, что никто бы не стал возражать против признания достижений Мандельброта, если бы он, в свою очередь, несколько больше уважал заслуги других.

Можно смело сказать, что до Мандельброта фрактальной геометрии не существовало. Он использовал некоторые идеи Пуанкаре, Кантора, Фату, Жюлиа, Пеано, Хаусдорфа, Серпиньского. Но его предшественники не видели сходства между конструкциями, которые Мандельброт объединил в единое целое для изучения хаоса.

Бенуа Мандельброт скончался 14 октября 2010 г. в Кембридже.

Юрген Мозер

Мозер Юрген Курт родился 4 июля 1928 г. в Кёнигсберге (ныне Калининград). В 15 лет во время Второй мировой войны его вынудили вступить в вооруженные силы, и в 1945 г. он участвовал в обороне Кёнигсберга против советских войск. В этом противостоянии старший брат Мозера был убит. В 1947 г. в Гёттингене исключительные математические способности Юргена Мозера были замечены Францем Реллихом, под руководством которого он изучал физику и занимался спектральной теорией дифференциальных уравнений. В Гёттингенском университете под руководством Карла Зигеля Мозер изучал теорию чисел и небесную механику. Степень доктора философии он получил в 1952 г.

Рихард Курант старался привлекать талантливых немецких ученых в США для дальнейшего обучения. Одним из таких ученых был Мозер, который получил в 1953 г. стипендию Фулбрайта и стажировался в Нью-Йорке в 1953–1954 гг. После стажировки он вернулся в Гёттинген и два года был ассистентом Зигеля, а затем эмигрировал в США и стал работать в Массачусетском технологическом институте. Позже Мозер перешел в Нью-Йоркский университет, в котором работал с 1960 по 1980 г., в 1967–1970 гг. он был директором Института Куранта. Он женился на одной из дочерей Рихарда Куранта. В 1970 г. Мозер уехал в Швейцарию, в Цюрих, где работал профессором Высшей технической школы. В 1973 г. его избрали членом Национальной академии наук США.

Мозеру принадлежат важнейшие результаты в математике, астрономии и физике. Он внес весомый вклад в теорию динамических систем, небесную механику, теорию дифференциальных уравнений с частными производными, нелинейный функциональный анализ, комплексную геометрию и вариационное исчисление. В 1971 г. Мозер переработал книгу Зигеля по небесной механике, изданную в 1956 г. Наряду с Колмогоровым и Арнольдом, он является автором важнейшей теории динамических систем, называемой теорией КАМ (Колмогорова – Арнольда – Мозера).

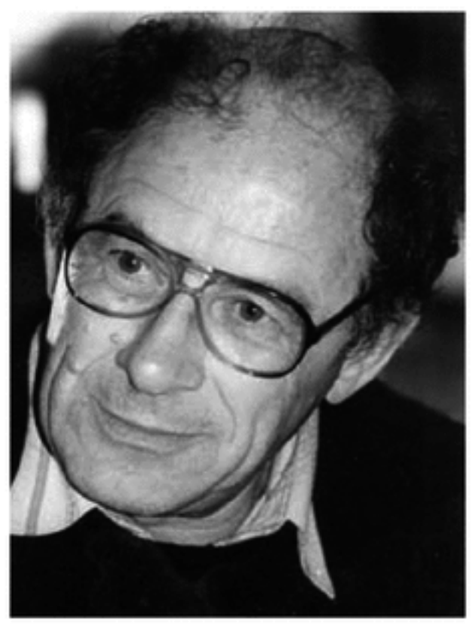
Колмогоров в 1954 г. опубликовал без подробного доказательства обобщенную теорему об инвариантных торах аналитических систем. Мозер в работе об инвариантных торах гамильтоновых систем (1958) перенес теорему Колмогорова со случая аналитических функций на случай функций дифференцируемых конечное число раз. Помимо работы Колмогорова, Мозер использовал технику сглаживания Дж. Нэша и неравенства Адамара – Литлвуда – Колмогорова между величинами производных разных порядков. Арнольд в 1961 г. решил проблемы Биркгофа об устойчивости эллиптических положений равновесия, в 1962 г. доказал вечную адиабатическую инвариантность переменной действия, в 1963 г. открыл универсальный механизм неустойчивости многомерных систем, позже названный диффузией Арнольда.

В небесной механике Юрген Мозер исследовал стабильность Солнечной системы. В 1983–1986 гг. он был президентом Международного математического союза.

Мозер играл на виолончели, увлекался плаванием и велосипедным спортом. В 1995 г. он достиг пенсионного возраста и вышел в отставку. За выдающиеся результаты исследований Мозер был избран членом нескольких национальных академий и получил многочисленные премии и награды, в том числе премию Вольфа в 1995 г. за работы по устойчивости гамильтоновых систем и теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Умер Юрген Мозер 17 декабря 1999 г. в Цюрихе от рака предстательной железы.

В.И. Арнольд



Арнольд Владимир Игоревич родился 12 июня 1937 г. в Одессе в семье математика-педагога. Его отец, Игорь Владимирович Арнольд, – первый в стране доктор педагогических наук, член-корреспондент Академии педагогических наук РСФСР, автор многих учебных пособий. Дед Арнольда был первым математиком-экономистом в России: в 1904 г. он опубликовал книгу, в которой перевел все экономические теории, включая теорию Маркса, на язык дифференциальных уравнений.

Учился Владимир в Москве, в школе на Арбате. Интерес к математике возник у мальчика еще в пятом классе. Он занимался в математических кружках и участвовал в олимпиадах разного уровня.

В 1954 г. Арнольд поступил на механико-математический факультет МГУ. Колмогоров привлек его к исследованиям по 13-й проблеме Гильберта. Эта проблема связана с одной из самых древних задач математики (с разрешимостью алгебраических уравнений) и одновременно удачно перекликается с современной проблематикой. Гильберт высказал гипотезу, что решение общего алгебраического уравнения седьмой степени нельзя представить суперпозицией непрерывных функций от двух переменных.

В 1956 г. А.Н. Колмогоров в работе «О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных» показал, что можно представить непрерывную функцию нескольких переменных суперпозицией функций от трех переменных. В 1957 г. студент третьего курса В.И. Арнольд, усовершенствовав колмогоровскую конструкцию, доказал в работе «О функциях трех переменных», что всякая непрерывная функция трех переменных может быть представлена суперпозицией непрерывных функций двух переменных, показав тем самым ошибочность гипотезы Гильберта [8]. Итог исследованиям подвел Колмогоров в работе 1957 г. «О представимости непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения». Этот цикл работ Колмогорова и Арнольда стал

сенсацией в научном мире. Однако рассматриваемая проблема по существу остается открытой, так как остается возможным доказательство неразрешимости уравнения седьмой степени в каком-либо другом классе функций двух переменных, содержащем все алгебраические функции двух переменных.

В 1959 г. Арнольд после окончания МГУ поступил в аспирантуру, которую окончил в 1961 г. Свою работу по 13-й проблеме Гильберта Арнольд представил в качестве кандидатской диссертации. И.М. Гельфанд предложил присвоить Арнольду степень доктора наук. Предложение было отклонено, но в 1963 г. Арнольд стал доктором физико-математических наук за работы по динамическим системам.

К исследованию динамических систем также, как и к исследованиям функций трех переменных, Арнольда привлек Колмогоров. В 1954 г. в работах А.Н. Колмогорова по теории возмущений условно-периодических движений было положено начало методу КАМ (Колмогорова – Арнольда – Мозера), который лег в основу одноименной теории. Этот метод считают одним из важнейших достижений математики XX в. Вот что писал об этом методе в 1965 г. И.М. Гельфанд: «В трудах В.И. Арнольда и А.Н. Колмогорова разработан совершенно новый математический метод. Применение его позволило им решить ряд проблем, которые “не поддавались”, несмотря на усилия многих выдающихся математиков, механиков и астрономов. В качестве примера можно опять-таки указать на задачу трех тел. В.И. Арнольд, применяя разработанные его учителем А.Н. Колмогоровым методы, сумел доказать существование достаточно большого “массива” устойчивых решений в этой задаче. Это исследование имеет, например, прямое отношение к вопросу об устойчивости Солнечной системы. Новые методы оказались настолько плодотворными, что их удалось применить не только для исследования классических проблем, но и целого ряда задач, значение которых осознано только сейчас, – таких, как задача движения заряженных частиц в магнитных ловушках» [38].

В 1965 г. В.И. Арнольду было присвоено звание профессора, а работы А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда по проблеме устойчивости динамических систем были отмечены Ленинской премией. Хотя наибольшую известность Арнольд получил как соавтор теоремы Колмогорова – Арнольда – Мозера о стабильности интегрируемых гамильтоновых систем, он внес важный вклад в развитие целого ряда областей математики, включая теорию динамических систем, теорию катастроф, топологию, алгебраическую геометрию, классическую механику и теорию сингулярностей.

Научная деятельность В.И. Арнольда разнообразна. Им выполнено около 500 научных работ. В 1990 г. Владимир Игоревич был избран академиком АН СССР. Он являлся также членом многих иностранных академий и лауреатом нескольких математических премий. В 1995–1998 гг. Арнольд был вице-президентом Международного математического союза.

Весной 1998 г. в пригороде Парижа Арнольд упал с велосипеда и получил тяжелейшую травму головы. Через несколько недель он пришел в сознание, но некоторое время не узнавал близких и не понимал русского языка, поэтому разговаривал только по-французски. Несмотря на запреты врачей, Владимир Игоревич читал лекции и вел семинары.

В 2001 г. Арнольд был награжден медалью Вольфа. Члены Вольфовского комитета отметили три направления исследований в работах Арнольда: теорию динамических систем, теорию особенностей и симплектическую топологию и геометрию.

В теории динамических систем главными считаются результаты об устойчивости и неустойчивости движения в гамильтоновых системах. Гамильтоновыми системами являются небесно-механические, но полученные в теории динамических систем результаты используются также в теории магнитных поверхностей для удержания плазмы в системах термоядерного синтеза, теории ускорителей, теории гироскопов. В качестве просто формулируемого, но труднодоказуемого результата можно привести пример об устойчивости перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает быстрые колебательные движения в вертикальном направлении.

Теория особенностей включает исследование каустик волновых фронтов. Каустикой называют огибающую лучей, отраженных или преломленных данной линией. Арнольду удалось открыть удивительные связи теорий каустик и фронтов с теорией простых алгебр Ли и с теорией групп отражений. Физики называют его достижения в этой области квантовой теорией катастроф. Эти результаты Арнольд получил, занимаясь анализом перегрева электронных схем в больших ЭВМ. Они являются также обобщением теории радуги, объясняющей ее угол раствора (43 °) геометрией соответствующих каустик.

Каустики, возникающие в обобщениях теории радуги, применяются также для анализа релятивистских гравитационных линз и «гидродинамики Вселенной» Зельдовича. Арнольд исследовал особенности крайне неравномерного крупномасштабного распределения галактик: большие пустоты между поверхностями, к которым тяготеют галактики, повышенную плотность галактик на особенных линиях этих поверхностей. Особое внимание он уделял специальным точкам, которые теория Арнольда связывает с упомянутыми выше алгебрами Ли и группами отражений, т. е. с многомерными калейдоскопами. Обнаруженное здесь фундаментальное единство математики и физики является отличительной чертой современного научного знания. Понимание этого способствует развитию обеих наук.

Создание симплектической топологии, доказывающей, например необходимость большого числа периодических траекторий в задачах небесной механики, с одной стороны, и большого числа особенностей каустик в теории распространения волн, с другой стороны, совершенно изменило эту большую область математики. Самые последние работы многих авторов из разных стран по доказательству гипотез Арнольда 1965 г. связали топологическую теорию с методами квантовой теории поля. Обнаруженные здесь связи используются теперь в обоих направлениях: симплектическая топология полезна в квантовой теории, а методы квантовой теории поля помогают решать сложные топологические задачи.

В 2008 г. В.И. Арнольд был награжден Государственной премией Российской Федерации за выдающиеся достижения в области науки и технологий и так называемой Нобелевской премией Востока (Show prize) за выдающи-

еся достижения в математике. В 2009 г. Владимир Арнольд был признан самым цитируемым российским ученым. Им опубликовано около 600 статей и 30 книг.

Каждое лето Арнольд на две недели выезжал в пансионат Института ядерных исследований под Дубной, работал со школьниками и студентами первого-второго курсов: читал лекции, формулировал новые задачи, рассказывал о математике и заражал ребят своей любовью к науке.

В.И. Арнольд являлся известным критиком осуществлявшихся в середине XX в. попыток создания замкнутого изложения математики в строгой аксиоматической форме с высоким уровнем абстракции. Он был глубоко убежден, что этот подход – известный в основном благодаря активности французской школы Николя Бурбаки – оказал негативное влияние на преподавание математики сначала во Франции, а затем и в других странах. Известны многие критические высказывания Арнольда о реформах математического образования.

В последние годы жизни Арнольд был главным научным сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова РАН и профессором университета Париж-Дофин. Весной 2010 г. Арнольд приехал во Францию для лечения. 3 июня 2010 г. он скончался в Париже от перитонита после операции. Похоронен Владимир Игоревич Арнольд в Москве на Новодевичьем кладбище.

Жан-Кристоф Йоккоз

Французский математик Йоккоз Жан-Кристоф родился 29 мая 1957 г. Он набрал максимальные баллы на вступительных экзаменах в Высшую нормальную школу и Политехническую школу, а также на экзамене на право преподавания в старших классах. Это был своеобразный рекорд, установленный им, вероятно, ради спортивного интереса [71]. Из Высшей нормальной школы в Париже он перешел в Политехническую школу. С 1981 по 1983 г. Йоккоз проходил военную службу в Бразилии. Диссертацию по теории динамических систем Йоккоз защищал в 1985 г. и вскоре благодаря результатам в этой области приобрел большой авторитет в научном мире.

Йоккоз получил впечатляющие результаты в исследовании динамических систем. Он находил более простые доказательства известных теорем или использовал в доказательствах более слабые предпосылки. Для его работ характерно сочетание мощного математического аппарата и развитой геометрической интуиции.

За исследования в теории динамических систем в 1994 г. Йоккоз был награжден медалью Филдса на Международном математическом конгрессе в Цюрихе.

Элон Линденштраусс

Израильский математик Элон Линденштраусс родился 1 августа 1970 г. в Иерусалиме в семье профессора математики Йорама Линденштраусса и доктора компьютерных наук Наоми Линденштраусс.

В 1988 г. Элон участвовал в Международной математической олимпиаде, на которой был удостоен бронзовой медали. Линденштраусс получил образование по программе «Тальпиот», в соответствии с которой еврейских подростков готовят к службе в элитных частях и обучают математике и физике. Во время службы в израильской армии он был удостоен премии Обороны Израиля, ежегодно присуждаемой за значительный вклад в защиту государства.

В Еврейском университете (Иерусалим) Линденштраусс получил степень бакалавра математики и физики в 1991 г. и степень магистра математики в 1995 г.

В 1997–1998 гг. Линденштраусс работал ассистентом в Еврейском университете. Диссертацию на тему «Энтропия свойств динамических систем» он защитил в 1999 г. и получил степень доктора. Вскоре переехал в США и два года работал научным сотрудником Института перспективных исследований в Принстоне, два года – доцентом в Станфордском университете и еще два года – сотрудником Института математики Клэя. В 2003–2005 гг. он был сотрудником Института Куранта Нью-Йоркского университета. В 2004 г. Линденштраусс стал профессором Принстонского университета, а в 2009 г. вернулся в Израиль и стал профессором Института Эйнштейна Еврейского университета.

Научные интересы Линденштраусса относятся к теории динамических систем. Он исследовал эргодическую теорию и ее приложения к теории чисел. Им получены также значительные результаты в доказательстве гипотезы Литтвуда в теории диофантовых приближений. Он проводил исследования на стыке теории автоморфных функций и математической физики. Полученные результаты выходят за рамки эргодической теории.

В августе 2010 г. на Международном математическом конгрессе в Хайдарабаде Элон Линдештраусс был награжден медалью Филдса. Им получен ряд других премий, в том числе премия Европейского математического общества (2004) и премия Ферма (2009).

Элон Линденштраусс живет в Иерусалиме, женат, имеет троих детей. У него три сестры, одна из которых – профессор математики в университете Индианы, другая – преподаватель биофизики в Технионе, третья – доктор по международным отношениям.

Линденштраусс стал первым израильтянином, получившим медаль Филдса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В фокусе общественного внимания математика оказывается очень редко. За последние два десятилетия это случалось дважды: широкий общественный резонанс получила работа Эндрю Уайлса, доказавшего Великую теорему Ферма, и результат Григория Перельмана, доказавшего гипотезу Пуанкаре.

У каждого времени есть своя флагманская наука, двигающая вперед все области знания. В начале XX в. эту роль играла физика, в конце столетия – биология.

В 1950–1960-е годы существовала особая атмосфера культа знаний, научно-технического прогресса. Затем начались реформы системы образования (в основном, математического), которые негативно сказались на престиже профессии учителя, педагога. Система науки и образования стала разрушаться. По мнению многих ученых, в настоящее время на лидерство может претендовать математика.

Число профессиональных математиков в XX в. увеличилось как минимум стократно: в начале прошлого столетия их было около 10 тысяч. Однако развитие математики не сводится к росту числа ученых и является закономерной реакцией на все возрастающую сложность проблем, с которыми математика имеет дело. Сложность математических проблем отражает разветвленность современного естествознания и наук об обществе. Одной из основных задач современной математики является окончательное решение проблемы оснований математики.

Наблюдательный человек может увидеть математику и в быту, и в природе, для него даже простые срезы растений – это красивые геометрические фигуры. Кроме красоты, описываемой математикой, есть красота в самой математике. Жизненный опыт подсказывает нам, что в природе красота влечет за собой пользу. Понятие красоты используется не только в искусстве, но и в точных науках. Посвященные в тайны математики испытывают наслаждение подобное тому, которое можно испытать в ходе созерцания живописи или прослушивания музыки. Они восторгаются изящной гармонией чисел и форм, приходят в восхищение, когда какое-нибудь новое явление открывает перед ними неожиданные перспективы. Так, уравнения Максвелла доставляют эстетическое наслаждение специалистам и оставляют равнодушными тех, чье знакомство с математикой ограничивается знанием натуральных чисел. Эффективные теории всегда красивы. Но красивы они не потому, что эффективны, а потому, что наделены внутренней симметрией и экономичны, с точки зрения математики. Ученые, занимающиеся точными науками и обладающие развитым математическим вкусом, создают более совершенные теории, чем те, кто таким вкусом не обладает.

До последней трети XX в. теоретические открытия в физике подтверждали экспериментально. Они оказали сильнейшее воздействие на человечество, подарив ему радио и телевидение, мобильную связь и полеты в космос, ядерное и термоядерное оружия. Экспериментальное подтверждение теорий по устройству нашего мира на субатомных и субъядерных расстояниях требует энергий мощностью свыше 100 ГэВ. Это недостижимо даже для Большого адронного коллайдера, поэтому теоретическая физика элементарных частиц из-за невозможности экспериментального подтвержде-

ния стала опираться на «внутреннюю красоту» теории. Сегодня предпочтение отдают теориям, которые доступно и изящно объясняют возникающие неясности.

Развитие математики повлекло за собой специализацию и обособление, поэтому ученые стали хуже понимать друг друга, а связь математики с остальными науками заметно ослабела.

Остаются актуальными идеи математической программы, объявленной еще в 1970-е годы Робертом Ленглендсом. Эта программа должна объединить алгебру, геометрию и теорию чисел. В ее реализации участвуют специалисты всего мира, и уже имеются ощутимые результаты.

Возрастает значение компьютеров в вопросах вычислений и открытия новых закономерностей. Создание быстродействующих вычислительных машин сделало «прикладными» некоторые области математики, которые казались раньше весьма далекими от практики. В частности, важной для

приложений оказалась математическая логика, возникли новые разделы математики (теория кодирования, теория информации, теория алгоритмов, теория автоматов), так или иначе, связанные с вычислительными машинами. Интенсивно развивается конечная математика, связанная с изучением конечных множеств, почти заново была создана вычислительная математика. На многие классические разделы математики ученые стали смотреть иначе. Все это позволяет говорить о начале нового периода в развитии науки – периода машинной математики. Однако не следует думать, что все зависит только от совершенствования компьютеров.

В настоящее время существует проблема загрузки мощных компьютерных систем адекватными расчетными задачами. Рост мощностей суперкомпьютеров значительно превосходит число соответствующим образом подготовленных специалистов. В результате возникает другая проблема, связанная с проверкой истинности полученного с помощью компьютера доказатель-

ства. Пожалуй, это будет еще сложнее, чем в случае с проверкой доказательства Великой теоремы Ферма.

Когда-то математикой считалась та область знания, которая работала с числами. Потом объектом математики стало изучение операций. В настоящее время математика – это, прежде всего, изучение математических моделей.

Академик А.А. Самарский отмечал, что использование благ математического моделирования и основанных на нем средств информатики в технологических приложениях требует серьезных интеллектуальных и организационных усилий. На Западе наметился переход к массовому внедрению

математического моделирования и вычислительного эксперимента в машиностроительные технологии. Обычными становятся закупки автомобильными концернами супер-ЭВМ для расчета полных конструкций автомобилей, в частности, при аварийных ситуациях. Экономически это оказывается очень выгодно, поскольку в «авариях» участвуют математические модели, а не дорогостоящие машины. Фирмы, не располагающие соответствующими расчетными методиками, становятся неконкурентоспособными.

Еще одной особенностью современной математики является увеличение роли исследований в теории вероятностей, которая нашла широчайшее применение в науке и технике и позволила выразить на языке математики некоторые важные, еще не решенные проблемы философии науки. Это подтвердили выступления на Международном математическом конгрессе 2006 г. в Мадриде, где было отмечено, что математика идет по пути воссоединения разделов, составляющих все математическое знание, сближения науки о случайном и науки о детерминированном. Двое из четырех лауреатов медали Филдса и лауреат новой международной математической премии (премии Гаусса) были награждены за исследования в области теории вероятностей. Возрастает значение различных разделов комбинаторики.

Следует отметить также излишнее усложнение формального абстрактного языка, охватившее не только алгебру, геометрию и топологию, но и значительную часть теории вероятностей и функционального анализа. Анализ, дифференциальные уравнения, динамические системы оказались менее подвержены этому процессу.

Математика ждет нового гения, который, подобно Гильберту в конце XIX в., упростил бы доказательства настолько, чтобы их можно было бы объяснить любому человеку.

Остается открытым вопрос о возможностях математики как средства познания окружающего мира. В начале 1920-х годов Гильберт наметил план исследований в области оснований математики, получивший впоследствии название «Геттингенская программа». В соответствии с этим планом, вся математика должна быть представлена в виде следствий из некоторой системы аксиом. Эта программа была опровергнута теоремой о неполноте Гёделя и исследованиями на основе этой теоремы. Оказалось, что математика неполна, неразрешима и ее непротиворечивость нельзя доказать (в рамках той самой системы, непротиворечивость которой доказывается).

Уже более 80 лет не утихают споры о том, что же все-таки доказал или опроверг Гёдель. В оценке этой работы Гёделя мнения ученых разделились. Одни считают, что его теорема оказала незначительное влияние на развитие математики: ученые как доказывали теоремы в догеделевскую эпоху, так и продолжают их доказывать. По мнению других, теорема Гёделя прямо указывает на ограниченность возможностей головного мозга человека. Формально-вычислительные процессы, лежащие в основе логического мышления, составляют лишь часть сознания. Другая же его часть, принципиально «невычислительная», отвечает за интуицию, творческие озарения и понимание. И если одна половина мозга подпадает под геделевские ограничения, то другая от подобных рамок свободна.

Выдающийся современный ученый Роджер Пенроуз предположил существование некоторых квантовых эффектов невычислительного характера, обеспечивающих реализацию творческих актов сознания. Одним из многочисленных следствий гипотезы Пенроуза может стать вывод о принципиальной невозможности создания искусственного интеллекта на основе современных вычислительных устройств даже при колоссальном прорыве в области вычислительной техники с появлением квантовых компьютеров. Компьютер может лишь все более детально моделировать работу формально-логической, «вычислительной» деятельности человеческого сознания, но «невычислительные» способности интеллекта ему недоступны.

Реалии современного мира вносят свои коррективы в развитие науки, в том числе математики. Но в одном можно быть уверенным, что математика будет развиваться и ее достижения будут широко внедряться в точные и гуманитарные науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адян С.И.* К столетию со дня рождения Петра Сергеевича Новикова // УМН. 2001. Т. 56. Вып. 4. С. 177–184.
2. *Адян С.И., Мальцев А.А. и др.* Людмила Всеволодовна Келдыш // УМН. 2005. Т. 60. Вып. 4. С. 5–10.
3. *Александров А.Д., Гавурин М.К.* Леонид Витальевич Канторович // УМН. 1982. Т. 37. Вып. 3. С. 201–209.
4. *Александров А.Д., Марченко В.А. и др.* Алексей Васильевич Погорелов // УМН. 1989. Т. 44. Вып. 4. С. 246–250.
5. *Александров П.С.* Математика в Московском университете в первой половине XX века / Ист.-мат. исслед. М.: Физматгиз, 1955. Вып. 8.
6. *Александров П.С.* Пуанкаре и топология // А. Пуанкаре. Избранные труды: В 3-х т. М.: Наука, 1971. Т. 1. С. 808.
7. *Александров П.С., Олейник О.А.* Памяти Рихарда Куранта // УМН. 1975. Т. 30. Вып. 4. С. 205–226.
8. *Аносов Д.В., Болибрух А.А. и др.* Владимир Игоревич Арнольд // УМН. 1997. Т. 52. Вып. 5. С. 235–242.
9. *Арнольд В.И.* Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник Российской академии наук. 2002. Т. 72, № 3. С. 245–250.
10. *Арнольд В.И.* Международный математический конгресс // Вестник Российской академии наук. 1999. Т. 69, № 2. С. 163–174.
11. *Арнольд В.И.* Филдсовская медаль – воспитаннику московской математической школы // Математическое просвещение. 1999. Вып. 3. Сер. 3. С. 7–20.
12. *Арнольд В.И.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2008. 104 с.
13. *Аршинов М.Н.* Грани алгебры / М.Н. Аршинов, Л.Е. Садовский / Под ред. Ю.В. Кузьмина. М.: Факториал Пресс, 2008. 328 с.
14. *Асмус В.Ф.* Проблема интуиции в философии и математике. Очерк истории: XVII – начало XX в. М.: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.
15. *Бахвалов Н.С., Владимиров В.С. и др.* Сергей Львович Соболев / УМН. 1988. Т. 43. Вып. 5. С. 3–13.
16. *Беркович Е.* Наука в тени свастики: портреты и судьбы // Нева. 2008. № 5. С. 175–189.
17. *Бернстайн П.* Против бога: Укрощение риска: Пер. с англ. М.: ЗАО «Олимп-Бизнес». 2000. 400 с.
18. *Бицадзе А.В., Ильин В.А., Олейник О.А. и др.* Андрей Николаевич Тихонов // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 3. С. 3–12.
19. *Богомолов А.Н., Роженко Н.М.* Опыт «внедрения» диалектики в математику в конце 20-х – начале 30-х гг. // Вопросы философии. 1991. № 4. С. 32–43.
20. *Борисов Ю.Ф., Залгаллер В.А. и др.* Александр Данилович Александров // УМН. 1988. Т. 43. Вып. 2. С. 161–165.
21. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики: Пер. с фр. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 384 с.
22. *Вейль Г.* Математическое мышление: Пер. с нем. М.: Наука, 1989. 400 с.
23. *Виленкин Н.Я.* Рассказы о множествах. М.: Наука, 1969. 160 с.
24. *Виленкин Н.Я., Лишевский В.П.* Эварист Галуа / В кн. «Замечательные ученые» / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980. 192 с.
25. *Винер Н.* Я – математик: Пер с англ. М.: Наука, 1967. 358 с.

26. *Владимиров В.С.* Н.Н. Боголюбов и математика // УМН. 2001. Т. 56. Вып. 3. С. 185–190.
27. *Владимиров В.С., Логунов А.А. и др.* Николай Николаевич Боголюбов // УМН. 1989. Т. 44. Вып. 5. С. 5–12.
28. *Гнеденко Б.В.* Александр Яковлевич Хинчин. К 100-летию со дня рождения выдающегося ученого и педагога // Квант, 1994. № 6. С. 2–6.
29. *Гнеденко Б.В.* О математике страны советов // Квант, 1987. № 11. С. 3–8.
30. *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. М.-Л.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946. 247 с.
31. *Голубева В.А., Жижченко А.Б., Сергеев А.Г.* Международный конгресс математиков (Китай, Пекин, 20 – 28 августа 2002 г.) // УМН. 2003. Т. 58. Вып. 4. С. 181–189.
32. *Гротендик А.* Урожаи и посевы. Ижевск: «Удмуртский университет», 1999. 288 с.
33. *Делоне Б.Н.* Петербургская школа теории чисел. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 420 с.
34. *Демидов С.С., Володарский А.И., Токарева Т.А. и др.* Дело академика Н.Н. Лузина (архивные материалы). СПб.: РХГИ, 1999.
35. Жизнеописание Л.С. Понтрягина, математика, составленное им самим. М.: ИЧП «Прима В», 1998. 340 с.
36. *Жюлиа Г.* Анри Пуанкаре, его жизнь и деятельность // А. Пуанкаре. Избранные труды: В 3-х т. М.: Наука, 1974. Т. 3. С. 664.
37. *Игошин В.И.* Страницы биографии Михаила Яковлевича Суслина // УМН. 1996. Т. 51. Вып. 3. С. 3–14.
38. Интервью с академиком И.М. Гельфандом // Квант, 1989. № 1. С. 3–12.
39. Интервью с С.П. Курдюмовым // Вопросы философии. 1991. № 6. С. 53–57.
40. История отечественной математики: В 4-х т. Т. 3. Киев: Наукова думка, 1966–1970. 726 с.
41. *Клайн М.* Математика. Поиск истины: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 295 с.
42. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. В 2-х т. Т. 1: Пер. с нем. М.: Наука, 1989. 456 с.
43. *Клини С.* Введение в метаматематику. М.: Изд-во иностр. лит. 1957. 526 с.
44. *Колмогоров А.Н.* Роль русской науки в развитии теории вероятностей // Ученые записки МГУ. Вып. 91. Т. 1. Кн. 1, 1947. С. 53–64.
45. *Кольман Э.* Предмет и метод современной математики. М.: Гос. соц.-эк. изд-во, 1936. 316 с.
46. *Космодемьянский А.А.* Николай Егорович Жуковский. М.: Наука, 1984. 192 с.
47. *Кочина П.Я.* Воспоминания. М.: Наука, 1974. 298 с.
48. *Крайзель Г.* Биография Курта Гёделя // УМН. 1988. Т. 43. Вып. 2. С. 178–186.
49. *Лаврентьев М.А.* Николай Николаевич Лузин //УМН. 1974. Т. 29. Вып. 5. С. 177–182.
50. *Леви П.* Жак Адамар // УМН. 1964. Т. 19. Вып. 3. С. 163–182.
51. Людвиг Дмитриевич Фаддеев (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1995. Т. 50. Вып. 3. С. 171–186.
52. Математика в Петербургском-Ленинградском университете / Под ред. В.И. Смирнова. Л.: Наука, 1970.
53. Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. М.: Изд-во УРАО, 2001. 384 с.
54. Математики рассказывают. М.: Минувшее, 2005. 328 с.
55. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1979.
56. *Монастырский М.И.* Премия Филдса / Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика». № 2. М.: Знание, 1991. 48 с.

57. *Никифоровский В.А.* Страницы биографии Норберта Винера // Квант. 1995. № 2. С. 6–9.
58. *Новиков С.П.* Математики и физики Академии 60–80-х годов // Вопросы истории естествознания и техники. 1995. № 4. С. 56–64.
59. *Панов В.Ф.* Математика древняя и юная / Под ред. В.С. Зарубина. – 2-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 648 с.
60. *Писаревский Б.М.*, *Харин В.Т.* Беседы о математиках и математике. М.: Физматлит, 2004. 208 с.
61. *Полунов Ю.Л.* От абака до компьютера: судьбы людей и машин. М.: Изд-во «Русская редакция», 2004. 544 с.
62. Последнее интервью с А.Н. Колмогоровым // Империя математики. 2000. № 1. 113 с.
63. Проблемы Гильберта. М.: Наука, 2000. 339 с.
64. *Пятецкий-Шапиро И.И., Шидловский А.Б.* Александр Осипович Гельфонд (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1967. Т. 22. Вып. 3. С. 247–256.
65. *Реньи А.* Трилогия о математике: Пер. с венг. М.: Мир, 1980. 376 с.
66. *Рид К.* Гильберт: Пер. с англ. М.: Наука, 1970. 367 с.
67. *Садовничий В.А.* Роль математики в развитии человечества. М.: МГУ, 1995. 24 с.
68. *Соболев С.Л.* Посвящение в математику // Комсомольская правда. 1968. № 210.
69. *Соловьев Ю.* Николай Иванович Лобачевский // Квант. 1992. № 11. С. 2–9.
70. *Сосинский А.Б.* ICM–2006, Мадрид: Международный конгресс математиков Математическое просвещение. М.: МЦНМО, 2007. Сер. 3. Вып. 11.
71. *Сосинский А.Б.* Как учатся математике во Франции // Квант, 1995. № 5. С. 17–19.
72. *Сосинский А.Б.* Умер ли Никола Бурбаки? // Математическое просвещение, 1998. Сер. 3. Вып. 2. С. 4–12.
73. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики: Пер. с англ. М.: Наука, 1978. 336 с.
74. *Тихомиров В.М.* Андрей Николаевич Колмогоров // Квант, 1993. № 3/4. С. 3–10.
75. *Тихомиров В.М.* Математика в первой половине XX века // Квант, 1999. № 1. С. 3–9.
76. *Тихомиров В.М.* Математика во второй половине XX века // Квант, 2001. № 1/2. С. 2–7.
77. *Тихомиров В.М.* О кибернетике, Винере и винеровском процессе // Квант, 1995. № 2.
78. *Тихомиров В.М., Успенский В.В.* Лев Генрихович Шнирельман // Квант, 1996. № 2. С. 2–6.
79. *Тихомиров В.М., Успенский В.В.* Первые филдсовские лауреаты и советская математика 30-х годов // Математическое просвещение, 1998. Сер. 3. Вып. 2. С. 21–40.
80. *Уайтхед А., Рассел Б.* Основания математики: В 3-х т.: Пер. с англ.: Самара: Изд-во «Самарский университет», 2005. Т. 1. 722 с.
81. *Успенский В.А.* Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый мир. 2007. № 11–12.
82. *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987. 128 с.
83. *Халамайзер А.Я.* Памяти Н.Н. Лузина // Математика в школе, 1984. № 2.
84. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1977. 224 с.
85. *Чистяков В.Д.* Рассказы о математиках. Минск: Вышэйш. шк., 1966. 410 с.
86. *Яглом И.М.* Герман Вейль и идея симметрии / Вейль Г. Симметрия: Пер. с англ. М.: Наука, 1968. 192 с.
87. *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. М.: Просвещение, 1983. 79 с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель Нильс Хенрик (Abel Niels Henrik; 1802–1829) 58, 69, 76, 79, 81, 145, 146, 176, 361, 378, 478, 479, 495
Адамар Жак (Hadamard Jacques; 1865–1963) 38, 89, 97, 134, 139, 181, 182, 199, 200, 205, 253, 309, 348, 412, 413, 491, 505, 593–595, 616
Адамс Джон Кауч (Adams John Couch; 1819–1892) 286, 457, 507
Адян Сергей Иванович (р. 1931) 346
Аккерман Вильгельм Фридрих (Ackermann Wilhelm Friedrich; 1896–1962) 107
Акофф Рассел Линкольн (Ackoff Russel Lincoln; 1919–2009) 548
Александер Джеймс Уэдделл (Alexander James Waddell; 1888–1971) 228, 229, 234, 271, 272, 278, 344, 450, 555
Александров Александр Данилович (1912–1999) 162, 209, 220, 350, 382, 386, 387, 391–396, 409
Александров Павел Сергеевич (1896–1982) 17, 43, 56, 191, 193, 198, 204–206, 209, 210, 212, 215–220, 269–272, 274–280, 293, 294, 304, 327, 338, 339, 364, 379, 474, 555, 587
Альфорс Ларс Валериан (Ahlfors Lars Valerian; 1907–1996) 52, 62, 346, 347
Амосов Николай Михайлович (1913–2002) 263
Ампер Андре-Мари (Ampere Andre-Marie; 1775–1836) 393, 540
Андреев Константин Алексеевич (1848–1921) 189
Андронов Александр Александрович (1901–1952) 303, 305, 463, 591, 595, 599
Аполлоний Пергский (262–190 до н. э.) 28
Аппель Кеннет (Appel Kenneth; р. 1932) 537
Аппель Поль Эмиль (Appell Paul Emile; 1855–1930) 331
Араго Доминик Франсуа Жан (Arago Dominique Francois Jean; 1786–1853) 80
Аристотель (384 до н. э. – 322 до н.э.) 94, 97, 98, 101, 106, 529
Арнольд Владимир Игоревич (1937–2010) 41, 44, 49, 57, 58, 64, 66, 68, 181, 204, 207, 217, 306, 325, 400, 406, 410, 435, 447, 452, 462, 591, 592, 595, 600, 617–620
Арнольд Игорь Владимирович (1900–1948) 617
Артин Эмиль (Artin Emil; 1898–1962) 41, 359, 360, 364–367, 370, 371, 377, 414, 418, 480
Артоболевский Иван Иванович (1905–1977) 218
Архимед (287–212 до н. э.) 27, 51, 185, 385, 573
Асмус Валентин Фердинандович (1894–1975) 121
Атья Майкл Фрэнсис (Atiyah Michael Francis; р. 1929) 15, 52, 59, 224, 400, 421, 456, 457, 464–466, 471, 487
Ахиезер Наум Ильич (1901–1980) 287

Банах Стефан (Banacs Stefan; 1892–1945) 117, 205, 327, 334, 335, 539, 584
Бари Нина Карловна (1901–1961) 43, 212, 213, 216, 275, 325, 337, 341–344
Бартельс Мартин (Bartels Martin; 1769–1836) 72, 73
Басов Николай Геннадиевич (1922–2001) 302
Бах Алексей Николаевич (1857–1946) 216
Безикович Абрам Самойлович (1891 –1970) 274, 510, 607, 608
Бейкер Алан (Baker Alan; р. 1939) 53, 506, 507
Белл Эрик Темпл (Bell Eric Templ; 1883–1960) 109, 181
Беллман Ричард Эрнест (Bellman Richard Ernest; 1920–1984) 548, 552, 558, 559
Бельтрами Эудженио (Beltrami Eugenio; 1835–1900) 71
Беляев Юрий Константинович (р. 1932) 264
Бергсон Анри (Bergson Henri; 1859–1941) 184
Беркли Джордж (Berkeley George; 1685–1753) 581
Бернайс Пауль Исаак (Bernays Paul Isaac; 1888–1977) 105, 107, 170, 238, 575, 576
Бернсайд Уильям (Burnside William; 1852–1927) 54, 346, 371

Бернулли Даниил (Bernoulli Daniel; 1700–1782) 67
Бернулли Иоганн (Bernoulli Johann; 1667–1748) 67
Бернулли Яков (Bernoulli Jacob; 1654–1705) 256, 260, 575
Бернштейн Сергей Натанович (1880–1968) 21, 41, 190, 191, 193, 213–217, 243, 253, 256, 287, 308–312, 322, 327, 396, 507
Бессель Фридрих Вильгельм (Bessel Friedrich Wilhelm; 1784–1846) 70
Бетти Энрико (Betti Enrico; 1823–1892) 39, 269
Бёрч Брайан (Birch Bryan; p. 1931) 47, 48, 481
Бёте Ханс Альбрехт (Bethe Hans Albrecht; 1906–2005) 441
Бибербах Людвиг Георг Элиас Мозес (Bieberbach Ludwig Georg Elias Moses; 1886–1982) 41, 43, 158, 168
Бинг Эр Аш (Bing R.H.) 270
Биркгоф Гарретт (Birkhoff Garrett; 1911–1996) 24, 42, 304, 616
Биркгоф Джордж Девид (Birkhoff George David; 1884–1944) 179, 225, 226, 229, 234, 237, 459, 595
Бирман Михаил Шлемович (1928–2009) 287
Бицадзе Андрей Васильевич (1916–1994) 219
Бишоп Эррет (Bishop Errett; 1928–1983) 120, 122
Блюм Леон (Blum Leon; 1872–1950) 184
Блюменталь Людвиг Отто (Blumental Ludwig Otto; 1876–1944) 169, 183
Бляшке Вильгельм Иоганн (Blaschke Wilhelm Johann; 1885–1962) 283, 387
Боголюбов Николай Николаевич (1909–1992) 181, 218–220, 303, 305, 307, 326, 327, 329, 382, 432, 436–440, 469
Болтянский Владимир Григорьевич (p. 1925) 557
Больцано Бернард (Bolzano Bernhard; 1781–1848) 91, 183, 583
Больцман Людвиг Эдуард (Boltzmann Ludwig Eduard; 1844–1906) 55, 157, 244, 299, 589, 593, 595
Больяй Фаркаш (Bolyai Farkas; 1775–1856) 75
Больяй Янош (Bolyai Janos; 1802–1860) 50, 70, 71, 75, 115, 149
Бомбьери Энрико (Bombieri Enrico; p. 1940) 53, 224, 507, 508
Бонне Пьер Оссиан (Bonnet Pierre Ossian; 1819–1892) 283
Бор Нильс (Bohr Niels; 1885–1962) 124, 152, 235, 333, 441
Бор Харальд Август (Bohr Harald August; 1887–1951) 152, 333, 334, 608
Боревич Зенон Иванович (1922–1995) 382
Борель Арман (Borel Armand; 1923–2003) 42, 400, 405, 455
Борель Эмиль Феликс (Borel Emile Felix; 1871–1956) 16, 17, 67, 92, 94, 101, 129, 183–187, 199, 200, 216, 243, 253, 257, 282, 326, 336, 411, 530, 551
Борн Макс (Born Max; 1882–1970) 112, 152, 168, 258, 259
Боровков Александр Алексеевич (p. 1931) 220
Борчердс Ричард (Borcherds Richard; p. 1959) 55
Борхардт Карл Вильгельм (Borchardt Karl Wilhelm; 1817–1880) 145
Ботт Рауль (Bott Raoul; 1923–2005) 64, 465, 466
Бохнер Саломон (Bochner Salomon; 1899–1982) 42
Брауэр Альфред (Brauer Alfred; 1894–1985) 170
Брауэр Лейтзен (Brouwer Luitzen; 1881–1966) 18, 43, 101–103, 108, 112–115, 122, 157, 158, 161–164, 168, 169, 179, 227, 232, 270, 272, 276, 403, 470, 555
Брашман Николай Дмитриевич (1796–1866) 73, 189
Бремерманн Ханс-Йоахим (Bremermann Hans-Joachim; 1926–1996) 536
Бриоски Франческо (Brioschi Francesco; 1827–1897) 39
Бройль Луи (Broglie Louis; 1892–1987) 259
Брукс Роберт (Brooks Robert) 615
Брун Вигго (Brun Viggo; 1885–1978) 505
Брюха Франсуа (Bruhat François; 1929–2007) 405
Бубнов Иван Григорьевич (1872–1919) 287, 291, 329

Бугаев Николай Васильевич (1837–1903) 38, 189, 215
Булгарин Фаддей Венедиктович (1789–1859) 74
Буль Джордж (Boole George; 1815–1864) 24, 77, 83–85, 109, 359, 543
Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) 67, 128, 133
Бурали-Форти Чезаре (Burali-Forti Cesare; 1861–1931) 90
Бурбаки Николя (Bourbaki Nicolas) 25, 32, 34, 35, 68, 103, 239, 269, 274, 399–408, 410, 411, 413–415, 417, 418, 420–422, 456, 461, 484, 620
Бурген Жан (Bourgain Jean;p. 1954) 54, 66, 510
Бусленко Николай Пантелеймонович (1922–1977) 220
Бьенеме Жюль (Bienayme Jules; 1796–1878) 256
Бэббидж Чарльз (Babbedg Charles; 1792–1871) 529, 530, 538
Бэр Рене-Луи (Baire Rene-Louis; 1874–1932) 16, 17, 67, 92, 101, 129, 183, 186, 282, 326
Бюффон Жорж Луи Леклер (Buffon George Louis Leclerc; 1707–1788) 257
Бюшгенс Сергей Сергеевич (1882–1963) 386

Вайнберг Стивен (Weinberg Steven, p. 1933) 427, 428
Валиант Лесли (Valiant Leslie; p. 1949) 60
Валле Пуссен Шарль Жан (Vallee Poussin Charles Jean; 1866–1962) 505
Вальд Абрахам (Wald Abraham; 1902–1950) 246
Ван-дер-Варден Бартел Лендерт (Van der Waerden Bartel Leendert; 1930–1996) 24, 41, 170, 360, 364, 366–369, 480
Вандермонд Александр Теофил (Vandermonde Alexandre Theophile; 1735–1796) 361
Ван-дер-Поль Бальтазар (Van der Pol Balthazar; 1889–1959) 303, 437, 579
Вандивер Гарри Шульц (Vandiver Harry Schultz; 1882–1973) 513
Варадхан Шриниваса Сатхамангалам (Varadhan Srinivasa Sathamangalam; p. 1940) 59, 266
Варинг Эдуард (Waring Edward; 1736–1798) 156, 490
Варченко Александр Николаевич (p. 1949) 221, 462
Варшавский Штефан (Warsaw Stefan; 1904–1989) 170
Васильев Виктор Анатольевич (p. 1956) 452
Вассерман Август Пауль (Wassermann August Paul; 1866–1925) 151
Вебер Генрих Мартин (Weber Heinrich Martin; 1842–1913) 42, 98, 146, 148, 390
Веблен Освальд (Veblen Oswald; 1880–1960) 164, 228, 234, 271, 272
Веддербёрн Джозеф Генри Маклаган (Wedderburn Joseph Henry Maklagan; 1882–1948) 360, 366
Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (Weierstrass Karl Theodor Wilhelm; 1815–1897) 16, 20, 91, 93, 96, 103, 106, 145–148, 155, 165, 175, 183, 310, 330, 362, 514, 574
Вейль Андре (Weil Andre; 1906–1998) 25, 58, 61, 65, 116, 127, 224, 268, 401, 405, 406, 411–414, 417, 420, 480, 484, 516, 521
Вейль Герман (Weyl Hermann; 1885–1955) 11, 21, 41, 99, 102, 103, 118, 143, 152, 157, 158, 161–165, 170, 191, 224, 234, 238, 364–366, 368, 382, 392, 393, 412, 454, 461, 480, 482
Векуа Илья Несторович (1907–1977) 218, 219, 327, 382
Вентцель Елена Сергеевна (1907–2002) 29
Вернадский Владимир Иванович (1863–1945) 216
Вернер Алексей Леонидович (p. 1930) 394
Вернер Венделин (Werner Wendelin; p. 1968) 55, 267
Вершик Анатолий Моисеевич (p. 1933) 460
Ветчинкин Владимир Петрович (1888–1950) 196
Вигдерсон Ави (Wigderson Avi; p.1956) 60
Вигнер Юджин Пол (Wigner Eugene Paul; 1902–1995) 50, 234
Виет Франсуа (Viete Francois; 1540–1603) 76
Виллани Седрик (Villani Cedric; p. 1973) 55, 323, 324
Вин Вильгельм (Wien Wilhelm; 1864–1928) 151

Винер Норберт (Wiener Norbert; 1894–1964) 11, 205, 236, 243, 327, 399, 494, 527, 539, 540, 567
Виноградов Иван Матвеевич (1891–1983) 21, 44, 66, 140, 163, 191, 193, 214, 216, 218, 220, 312, 318, 382, 490, 491, 498–500, 507, 508
Витт Александр Адольфович (1902–1938) 303
Виттен Эдвард (Witten Edward; p. 1951) 54, 66, 224, 230, 356, 398, 430, 434, 449, 450, 453
Витушкин Анатолий Георгиевич (1931–2004) 325
Вишик Марко Иосифович (p. 1921) 344
Власов Алексей Константинович (1868–1922) 189, 197
Воеводский Владимир Александрович (p. 1966) 55, 221, 224, 481, 486–488
Вольтерра Вито (Volterra Vito; 1860–1940) 38, 39, 183, 329, 413
Вольфовиц Джакоб (Wolfowitz Jacob; 1910–1981) 246
Вольфскель Пауль (Wolfskehl Paul; 1856–1906) 513, 518
Вопенка Петр (Vopenka Petr; p. 1935) 240, 575, 584, 587, 588
Вороной Георгий Феодосьевич (1868–1908) 21, 128, 160, 371, 390
Вулих Борис Захарович (1913–1978) 327
Вышинский Андрей Януарьевич (1883–1954) 199

Галёркин Борис Григорьевич (1871–1945) 286, 287, 290–293, 329
Галуа Эварист (Galois Evariste; 1811–1832) 15, 19, 20, 67, 76–82, 149, 241, 361, 366, 413, 421, 520, 521
Гальтон Фрэнсис (Galton Francis; 1822–1911) 244, 245, 247, 248, 256
Гамель Георг Карл Вильгельм (Hamel Georg Karl Wilhelm; 1877–1954) 40
Гамильтон Ричард Стрейт (Hamilton Richard Streit; p. 1943) 474–476
Гамильтон Уильям Роуан (Hamilton William Rowan; 1805–1865) 15, 27, 71, 359, 384
Гамкрелидзе Реваз Валерьянович (p. 1927) 557
Гарвард Джон (Harvard John; 1607–1638) 222
Гаусс Карл Фридрих (Gauss Carl Friedrich; 1777–1855) 26, 27, 60, 67, 70–72, 75–77, 96, 103, 115, 130, 146, 148–151, 154, 155, 269, 283, 286, 332, 351, 361, 381, 393, 421, 454, 479, 495, 496, 514
Гейзенберг Вернер Карл (Heisenberg Werner Karl; 1901–1976) 15, 21, 168, 233, 259, 426, 431, 432, 441
Гейтинг Аренд (Heyting Arend; 1898–1980) 100, 108
Гекке Эрих (Hecke Erich; 1887–1947) 169
Гелл-Манн Мюррей (Gell-Mann Murray; p. 1929) 432, 442
Гельмгольц Герман (Helmholtz Hermann; 1821–1894) 384, 454
Гельфанд Израиль Моисеевич (1913–2009) 58, 61, 207, 217, 219, 305, 306, 309, 319, 327–329, 352–355, 452, 465, 563, 596, 618
Гельфонд Александр Осипович (1906–1968) 41, 56, 58, 214, 216, 502–504, 506
Гензель Курт (Hensel Kurt; 1861–1941) 403
Герглоц Густав (Herglotz Gustav; 1881–1953) 170
Гермейер Юрий Борисович (1918–1975) 563
Гёдель Курт (Godel Kurt; 1906–1978) 26, 40, 105, 115–118, 123–127, 158, 164, 224, 531, 534, 575
Гиббс Джозайя Уиллард (Gibbs Josiah Willard; 1839–1903) 593
Гивенталь Александр Борисович (p. 1957) 58
Гильберт Давид (Hilbert David; 1862–1943) 11, 18, 20, 21, 23, 38–43, 46–48, 50, 68, 88–90, 104–106, 108, 115, 118, 147, 150–162, 164–166, 168–170, 177, 179, 180, 233, 238, 241, 256, 273, 274, 276, 278, 308, 327, 329, 332, 336, 359, 361, 363, 364, 366–368, 378, 381, 385, 392, 400, 403, 405, 463, 483, 490, 492, 493, 513, 539, 576
Гливенко Валерий Иванович (1897–1940) 212, 260
Глисон Эндрю (Gleason Andrew; 1921–2008) 373
Глушков Виктор Михайлович (1923–1982) 220, 533, 545–547

Глэшоу Шелдон Ли (Glashow Sheldon Lee; p. 1932) 427–429
Гнеденко Борис Владимирович (1912–1995) 190, 203, 207, 262–264, 311, 546
Голицын Борис Борисович (1862–1916) 189
Голубев Владимир Васильевич (1884–1954) 193, 197, 220, 325, 327
Гольдбах Кристиан (Goldbach Christian; 1690–1764) 46, 163, 491, 501
Гольдбергер Марвин Леонард (Goldberger Marvin Leonard; p. 1922) 432
Горбунов Николай Петрович (1892–1938) 216
Гордан Пауль Альберт (Gordan Paul Albert; 1837–1912) 153, 363
Гордон Евгений Израилевич (p. 1949) 575, 585
Госсет Уильям Сили (Стъюдент) (Gosset William Sealy (Student); 1876–1937) 246, 248, 249, 254
Гоуэрс Уильям Тимоти (Gowers William Timothy; p. 1963) 55
Граве Дмитрий Александрович (1863–1939) 190, 191, 214, 370, 374, 375, 377
Грассман Герман Гюнтер (Grassmann Hermann Günther; 1809–1877) 15, 109, 150, 359, 384
Грегори Дункан Фракварсон (Gregory Duncan Farquharson; 1791–1858) 83
Грин Бен Джозеф (Green Ben Joseph; p. 1977) 510
Грин Брайан (Greene Brian; p. 1963) 452
Грин Майкл (Green Michael; p. 1946) 433
Гринхил Алфред Джордж (Greenhill Alfred George; 1847–1927) 42
Гриффитс Филипп (Griffiths Philip; p. 1938) 65
Громмер Яков Пинхусович (1879 –1933) 377
Громов Михаил Леонидович (p. 1943) 59, 63, 324, 397, 398, 460
Гротендик Александр (Grothendieck Alexander; p. 1928) 53, 56, 240, 400, 405, 408, 413, 416, 417, 419–422 , 456, 462, 465, 480, 481, 482, 484, 486, 487
Гумбольдт Вильгельм фон (Humboldt Wilhelm von; 1767–1835) 143
Гурвиц Адольф (Hurwitz Adolf; 1859–1919) 38, 89, 159, 378, 490
Гуревич Витольд (Hurewicz Witold; 1904–1956) 179, 416, 455
Гуссерль Эдмунд (Husserl Edmund; 1859–1938) 121
Гюйгенс Христиан (Huygens Christian; 1629–1695) 167
Гюнтер Николай Максимович (1871–1941) 128, 139, 140, 142, 190, 191, 306–308, 347, 348
Давидов Август Юльевич (1823–1885) 189
Д'Аламбер Жан Лерон (D'Alembert Jean Le Round; 1717–1783) 67, 70, 147, 581–583
Данжуа Арно (Denjoy Arnaud; 1884–1974) 200, 259, 336
Данциг Джордж Бернард (Dantzig George Bernard; 1914–2005) 562
Дарбу Жан Гастон (Darboux Jean Gaston; 1842–1917) 38, 157, 165, 183, 187, 199, 384, 388
Дарвин Чарльз Роберт (Darwin Charles Robert; 1809–1882) 252, 589
Дедекинд Юлиус Вильгельм Рихард (Dedekind Julius Wilhelm Richard; 1831–1916) 16, 24 , 78, 87, 91, 93–95, 98, 99, 101, 103, 149, 153, 359, 363, 367
Дезарг Жерар (Desargues Gerard; 1591–1661) 384
Декарт Рене (Descartes Rene; 1596–1650) 67, 97, 100, 384, 478
Делинь Пьер Рене (Deligne Pierre Rene; p. 1944) 53, 65, 224, 417, 421, 481, 484, 485
Делоне Борис Николаевич (1890–1980) 133, 140, 191, 193, 202, 220, 370, 373, 380, 386, 389–391
Дельсарт Жан Фредерик Огюст (Delsarte Jean Frederic Auguste; 1903–1968) 401, 405
Демидович Борис Павлович (1906–1977) 305
Джонс Воган (Jones Vaughan; p. 1952) 54, 450, 451
Джорджи Говард (Georgi Howard; p. 1947) 429
Джорджи Эннио (George Ennio; 1928–1996) 63, 507
Джусти Энрико (Giusti Enrico; p. 1940) 507
Диофант (III в.) 492
Дирак Поль Адриен Морис (Dirac Paul Adrien Maurice; 1902–1984) 163, 367, 399, 415, 426, 431, 434, 441, 445

Дирихле Петер Густав (Dirichlet Peter Gustav; 1805–1859) 147–149, 151, 155, 165, 166, 282, 316, 333, 359, 490, 494, 512
Доналдсон Саймон (Donaldson Simon; p. 1957) 54, 66, 466, 473
Дородницын Анатолий Алексеевич (1910–1994) 219, 296–298
Дринфельд Владимир Гершонович (p. 1954) 54, 221, 466, 481, 522, 523
Дуади Адриен (Douady Adrien; (1935–2006) 405, 605
Дуб Джозеф Лео (Doob Joseph Leo; 1910–2004) 243
Дубровин Борис Анатольевич 469
Дуглас Джессе (Douglas Jesse; 1897–1965) 52, 507
Дынин Александр Семенович 465
Дьёдонне Жан Александр Эжен (Dieudonne Jean Alexandre Eugene; 1906–1992) 25, 27, 403, 405, 415, 420, 421
Дэвис Мартин Девид (Davis Martin David; p. 1928) 508, 579
Дюбрейль Поль (Dubreil Paul; 1904–1994) 401
Дюкло Жак (Duclos Jacques; 1896–1975) 184

Евклид (356–300 до н. э.) 69, 71, 149, 154, 385, 489, 492
Егоров Дмитрий Фёдорович (1869–1931) 67, 140, 189–191, 197–202, 209, 214, 215, 272, 275, 277, 304, 316, 336, 386–388
Есенин Сергей Александрович (1895–1925) 10, 217
Есенин-Вольпин Александр Сергеевич (p. 1924) 216
Еругин Николай Павлович (1907–1990) 303, 306, 307, 312
Ефимов Николай Владимирович (1910–1982) 44, 220, 386, 387

Жегалкин Иван Иванович (1869–1947) 197
Жермен Софи (Germain Sofia; 1776–1831) 512, 526
Жордан Камиль Мари Эдмон (Jordan Camille Marie Edmond; 1831–1922) 77, 113, 149, 153, 159, 176, 187, 364, 393, 454
Жуковский Николай Егорович (1847–1921) 176, 189, 190, 194–196, 198 , 199, 296, 326, 389
Журавский Андрей Митрофанович (1892–1969) 193
Жюлиа Гастон (Julia Gaston; 1893–1978) 413, 603, 604, 615

Загир Дон (Zagier Don; p. 1951) 452
Заде Лотфи Аскер (Zadeh Lotfi Asker; p. 1921) 566–570
Залгаллер Виктор Абрамович (p. 1920) 394
Зарисский Оскар (Zariski Oscar; 1899–1986) 58, 62, 483
Зельдович Яков Борисович (1914–1987) 583, 584, 619
Зельманов Ефим Исаакович (p. 1955) 54, 221, 383
Зигель Карл Людвиг (Siegel Carl Ludwig; 1896–1981) 52, 61, 224, 504, 506, 616
Зиман Эрик Кристофер (Zeeman Erik Christopher; p. 1925) 600
Зингер Изадор Мануэль (Singer Isadore Manuel; p. 1924) 59, 465, 466
Золотарёв Егор Иванович (1847–1878) 21, 128, 132, 133, 326
Зоммерфельд Арнольд Иоганнес Вильгельм (Sommerfeld Arnold Johannes Wilhelm; 1868–1951) 152

Иваненко Дмитрий Дмитриевич (1904–1994) 301
Иванов Иван Иванович (1862–1939) 190
Ивасава Кенчики (Iwasawa Kenchiki; 1917–1998) 481, 519
Изинг Эрнст (Ising Ernst; 1900–1998) 357
Инфельд Леопольд (Infeld Leopold; 1898–1968) 112
Ито Киёши (Ito Kiyoshi; 1915–2008) 60, 62, 265, 266

Йоккоз Жан-Кристоф (Yoccoz Jean-Christophe; p. 1957) 54, 620
Йордан Паскуаль (Jordan Pascual; 1902–1980) 234, 383

Казорати Феличе (Casorati Felice; 1835–1890) 39
Какейя Соичи (Kakeya Soichi; 1886–1947) 510, 607

Какутани Шизуо (Kakutani Shizuo; 1911–2004) 595
Калаби Эудженио (Calabi Eugenio; p. 1923) 433, 448, 461
Калуца Теодор Франц Эдуард (Kaluza Theodor Franz Eduard; 1885–1954) 430, 431
Кальдерон Альберто Педро (Calderon Alberto Pedro; 1920–1998) 63
Кант Иммануил (Kant Immanuel; 1724–1804) 97, 100, 126, 152, 154
Кантор Георг (Cantor Georg; 1845–1918) 16, 17, 26, 38, 40, 85–95, 101, 103, 105, 129, 149, 183, 186, 269, 327, 340, 423, 604, 615
Кантор Мориц Бенедикт (Cantor Moritz Benedikt; 1829 –1920) 38, 39
Канторович Леонид Витальевич (1912–1986) 24, 50, 219, 220, 287, 327, 328, 350, 550, 559–563, 572, 584
Капица Пётр Леонидович (1894–1984) 216
Каратеодори Константин (Caratheodory Constantin; 1873–1950) 158, 331–333
Каргаполов Михаил Иванович (1928–1976) 220
Карлеман Таге Йиллис Торстен (Carleman Tage Gillis Torsten; 1892–1949) 183
Карлесон Леннарт Аксель Эдвард (Carleson Lennart Axel Edvard; p. 1928) 59, 63, 204
Карлсон Джеймс (Karlson James) 476
Карман Теодор (Karman Theodore; 1881–1963) 168
Карно Лазар (Carnot Lazare; 1753–1823) 583
Карпинский Александр Петрович (1846–1936) 190
Карр Джордж Шубридж (Carr George Shoobridge; 1837–1914) 495
Картан Анри Поль (Cartan Henri Paul; 1904–2008) 58, 61, 239, 400, 401, 411, 412, 416, 417, 420, 455, 456, 461
Картан Эли Жозеф (Cartan Elie Joseph; 1869–1951) 283, 329, 388, 393, 411, 454
Картье Пьер Эмиль Жан (Cartier Pierre Emile Jean; p. 1932) 404, 405, 414
Кассон Эндрю Джон (Casson Andrew John; p. 1943) 472
Кац Виктор Гершевич (p. 1943) 422
Квиллен Даниэль (Quillen Daniel; p. 1940) 53, 481
Кейнс Джон Мейнард (Keynes John Maynard; 1883–1946) 245
Келдыш Всеволод Михайлович (1878–1965) 281
Келдыш Леонид Вениаминович (p. 1931) 283
Келдыш Людмила Всеволодовна (1904–1976) 212, 217, 272, 281–283, 341
Келдыш Мстислав Всеволодович (1911–1978) 57, 66, 218, 271, 281, 287, 295, 300, 302, 313, 314, 319–321, 325, 326, 329, 352, 353, 556
Келлер Джозеф (Keller Joseph; p. 1923) 64
Кенион Ричард (Kenyon Richard) 525
Кеплер Иоганн (Kepler Johannes; 1572–1630) 28, 67, 537
Кетле Адольф Жак (Quetelet Adolph Jacques; 1796–1874) 244
Кёбе Пауль (Koebe Paul; 1882–1945) 42
Киллинг Вильгельм (Killing Wilhelm; 1847–1923) 146
Кирпичёв Виктор Львович (1845–1913) 291
Китайгородский Александр Исаакович (1914–1985) 29
Китов Анатолий Иванович (1920–2005) 351
Клайн Морис (Kline Morris; 1908–1992) 96, 115
Клейн Лоуренс (Klein Lawrence; p. 1920) 245
Клейн Оскар (Klein Oskar; 1894–1977) 430, 431
Клейн Феликс (Klein Felix; 1849–1925) 11, 20, 26, 37, 38, 71, 82, 100, 146, 148–153, 161–163, 166, 168, 175, 177, 230, 256, 332, 359, 361, 364, 378, 385, 454, 573
Клейнберг Джон (Kleinberg Jon; p. 1971) 60
Клеро Алексис Клод (Clairaut Alexis Claude; 1713–1765) 136
Клини Стивен Коул (Kleene Stephen Cole; 1909–1994) 91, 531
Клэй Лэндон (Clay Landon) 46, 470
Ковалевская Софья Васильевна (1850–1891) 66, 132, 136, 146, 175, 322, 330
Коваленко Игорь Николаевич (p. 1935) 263
Кодаира Кунихико (Kodaira Kunihiko; 1915–1997) 52, 62, 417, 461, 481, 482, 486
Козлов Владимир Яковлевич (1914–2007) 220

Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) 10,11,13, 21, 24, 40, 41, 56, 58, 61, 66–68, 193, 203–209, 211, 212, 215, 216, 218, 220, 229, 243–245, 250, 256, 257, 260, 262–264, 271, 276, 278, 287, 294, 305, 306, 317, 325–327, 345, 351, 352, 371, 379, 382, 408, 409, 456, 459, 508, 527, 531–533, 540, 595, 616, 617
Колывагин Виктор Александрович (р. 1955) 519
Кольман Эрнест Яромирович (1892–1979) 215
Конвей Джон Хортон (Conway John Horton; р. 1937) 475
Кон-Фоссен Стефан (Cohn-Vossen Stefan; 1902–1936) 162
Конн Ален (Connes Alain; р. 1947) 54, 356, 357, 408, 524
Концевич Максим Львович (р. 1964) 55, 66, 221, 450–453
Коркин Александр Николаевич (1837–1908) 21, 132, 133, 139, 326
Королёв Сергей Павлович (1906–1966) 321
Королюк Владимир Семенович (р. 1925) 263
Кортевег Дидерик Иоханнес (Korteweg Diederik Johannes; 1848–1941) 451
Коутс Джон Генри (Coates John Henry; р. 1945) 518
Кох Нильс Фабиан Хельге (Koch Niels Fabian Helge; 1870–1924) 603
Кочин Николай Евграфович (1901–1944) 193, 281, 303, 306, 313, 327
Кочина (Полубаринова-Кочина) Пелагея Яковлевна (1899–1999) 281, 327, 338, 341, 499
Коши Огюстен Луи (Cauchy Augustin Louis; 1789–1857) 20, 26, 76, 79, 147, 167, 177, 183, 308, 322, 330, 348, 393, 512, 513, 573, 583
Коэн Пол Джозеф (Cohen Paul Joseph; 1934–2007) 40, 53, 117, 340, 572, 584
Крамер Габриэль (Cramer Gabriel; 1704–1752) 243, 258
Красносельский Марк Александрович (1920–1997) 287, 307
Крафурд Хольгер (Crafoord Holger; 1908–1982) 66
Крейн Марк Григорьевич (1907–1989) 44, 56, 58, 62, 220, 306, 327
Крейн Селим Григорьевич (1917–1999) 287, 307
Крелль Август Леопольд (Crelle August Leopold; 1780–1855) 144
Кремона Луиджи (Cremona Luigi; 1830–1903) 228
Кржижановский Глеб Максимилианович (1872–1959) 216
Кристоффель Элвин Бруно (Christoffel Elwin Bruno; 1829–1900) 454
Кронекер Леопольд (Kronecker Leopold; 1823–1891) 41, 90, 93, 101, 145, 146, 153, 330, 359, 362, 493
Кронхаймер Питер Бенедикт (Kronheimer Peter Benedict) 58
Кроуэлл Ричард (Crowell Richard) 272
Крулль Вольфганг (Krull Wolfgang; 1899–1971) 377
Крылов Алексей Николаевич (1863–1945) 28, 132, 142, 190, 286, 288–291, 312
Крылов Владимир Иванович (1902–1994) 560
Крылов Николай Митрофанович (1879–1955) 191, 202, 214–216, 303, 305, 327, 329, 436, 437
Кузьмин Родион Осиевич (1891–1949) 218
Кук Стивен Артур (Cook Stephen Arthur; р. 1939) 47
Кулидж Уильям Дэвид (Coolidge Wiiliam David; 1873–1975) 275
Кулон Жан (Coulomb Jean; 1904–1999) 401
Куммер Эрнст Эдуард (Kummer Ernst Eduard; 1810–1893) 93, 145, 146, 153, 359, 362, 493, 512, 513
Купманс Тьяллинг (Koopmans Tjalling; 1910–1985) 561, 562
Купфер Адольф Яковлевич (1799–1865) 73
Курант Рихард (Courant Richard; 1888–1972) 28, 31, 59, 60, 155–158, 165–170, 222, 309, 322, 413, 616
Куратовский Казимир (Kuratowski Kazimierz; 1896–1980) 17, 205, 270
Курдюмов Сергей Павлович (1928–2004) 590, 592
Курош Александр Геннадиевич (1908–1971) 193, 220, 371

Курчатов Игорь Васильевич (1903–1960) 349
Кусраев Анатолий Георгиевич (р. 1953) 575
Кутателадзе Семен Самсонович (р. 1945) 575
Кутта Мартин Вильгельм (Kutta Martin Wilhelm; 1867–1944) 286
Кэли Артур (Cayley Arthur; 1821–1895) 15, 37, 71, 149, 359, 361

Лавлейс Августа Ада (Lovelace Augusta Ada; 1815–1852) 530, 538
Лаврентьев Михаил Алексеевич (1900–1980) 43, 56, 66, 191, 193, 212, 213, 217–219, 287, 299, 300, 304, 313–316, 319, 325, 326, 337, 344, 380, 382, 467, 556
Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis; 1736–1813) 79, 83, 85, 136, 194, 195, 290, 361, 490, 507, 582, 583, 594
Лазарев Петр Петрович (1878 –1942) 275
Лайтхилл Майкл Джеймс (Lighthill Michael James; 1924–1998) 599
Лакс Питер Дэвид (Lax Peter David; p. 1926) 58, 62, 167
Ламе Габриель (Lame Gabriel; 1795–1870) 134, 184, 512, 513
Ландау Лев Давидович (1908–1968) 64, 65, 301, 323, 442, 468
Ландау Эдмунд (Landau Edmund; 1877–1938) 43, 46, 152, 168, 170, 333, 491, 539
Ландис Евгений Михайлович (1921–1997) 317
Ланжевен Поль (Langevin Paul; 1872–1946) 184
Лаплас Пьер Симон (Laplace Pieere Simon; 1749–1827) 72, 83, 128, 136, 256, 290, 540, 593, 594, 609
Лаппо-Данилевский Иван Александрович (1896–1931) 303, 306, 312, 313
Лаптев Борис Лукич (1905–1989) 379
Лаптев Герман Федорович (1909–1972) 386
Лармор Джозеф (Larmor Joseph; 1857–1942) 38
Лаумон Жерар (Laumon Gerard; p. 1952) 522, 524, 526
Лаффорг Лоран (Lafforgue Laurent; p. 1966) 410, 481, 487, 522
Лахтин Леонид Кузьмич (1863–1927) 197

Лебег Анри (Lebesque Henri; 1875–1941) 16–18, 67, 92, 94, 101, 129, 183, 186–188, 200, 204, 210, 216, 253, 270, 322, 325, 326, 333, 339, 411, 459
Лебедев Петр Николаевич (1866–1912) 192, 302
Лебедев Сергей Алексеевич (1902–1974) 219
Леверье Урбен Жан Жозеф (Le Verrier Urbain Jean Joseph; 1811–1877) 290
Леви Ганс (Levi Hans; 1904–1988) 62, 162, 167, 170, 309
Леви Поль Пьер (Levy Paul Pierre; 1886–1971) 243, 415
Леви-Чивита Туллио (Levi-Civita Tullio; 1873–1941) 454
Левитан Борис Моисеевич (1914–2004) 353
Лежандр Адриен Мари (Legendre Adrien Marie; 1752–1833) 46, 79, 146, 154, 498, 512
Лейбензон Леонид Самуилович (1879–1951) 195
Лейбниц Готфрид Вильгельм (Leibniz Gotfried Wihelm; 1646–1716) 13, 67, 94, 97, 99, 111, 186, 400, 485, 529, 530, 572–574, 577, 578, 580–583, 606
Ленг Серж (Lang Serge; 1927–2005) 405, 520
Ленглендс Роберт (Langlands Robert; p. 1936) 54, 64, 224, 357, 516, 517, 521–523, 623
Ленгмюр Ирвинг (Langmuir Irving; 1881–1957) 238
Лере Жан (Leray Jean; 1906 –1998) 58, 61, 308, 400, 401, 416, 417, 455, 456
Лефшец Соломон (Lefschetz Solomon; 1884–1972) 226–228, 280, 368, 480, 484, 556, 558
Лёвенгейм Леопольд (Lowenheim Leopold; 1878–1957) 585
Лёвнер Чарльз (Loewner Charles; 1893–1968) 55, 267
Ли Мариус Софус (Lie Marius Sophus; 1842–1899) 22, 146, 330, 359, 360, 385, 417, 454
Либман Карл Отто Генрих (Liebmann Karl Otto Heinrich; 1874–1939) 387
Лидский Виктор Борисович (1924–2008) 306

Линделёф Эрнст Леонард (Lindelöf Ernst Leonard; 1870–1946) 183
Линдеман Карл Фердинанд (Lindemann Karl Ferdinand; 1852–1939) 86, 152, 153, 492
Линденштраусс Элон (Lindenstrauss Elon; p. 1970) 55, 621
Линник Юрий Владимирович (1915–1972) 220, 382, 490, 507
Лионс Пьер Луи (Lions Pierre Louis; p. 1956) 54, 323
Листинг Иоганн Бенедикт (Listing Johann Benedict; 1808–1882) 268
Литлвуд Джон Идензор (Littlewood John Edensor; 1885–1977) 21, 163, 333, 490, 494, 496, 497, 506, 616
Лиувилль Жозеф (Liouville Joseph; 1809–1882) 81, 86, 308, 330, 354, 492, 506, 512
Лобачевский Николай Иванович (1792–1856) 66, 67, 70–75, 128, 138, 162, 191, 264, 286, 384, 398
Ловас Ласло (Lovasz Laszlo; p. 1948) 64
Ломнитский Антон (Lommtzky Anton; 1881–1941) 257
Ломоносов Михаил Васильевич (1711–1765) 138, 264, 316
Лоренц Гендрик Антон (Lorentz Hendrik Antoon; 1853–1928) 72, 150, 152, 160
Лоренц Эдвард Нортон (Lorenz Edward Norton; 1917–2008) 592, 611–613
Лузин Николай Николаевич (1883–1950) 17, 67, 183, 187, 189, 191, 193, 197–205, 209–217, 259, 260, 272, 275, 278, 282, 304, 310, 312, 317, 325, 326, 336–341, 343–345, 500, 533
Любищев Александр Александрович (1890–1972) 601, 602
Люстерник Лазарь Аронович (1899–1981) 43, 56, 162, 196, 202, 211–213, 216–218, 272, 278, 309, 326, 327, 337, 341, 343, 344, 500, 501
Ляпин Евгений Сергеевич (1914–2005) 373
Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) 20, 21, 66, 128, 132, 134–137, 139, 142, 176, 177, 190, 191, 227, 228, 243, 256, 258, 288, 305, 308, 311, 312, 591
Ляпунов Алексей Андреевич (1911–1973) 220, 351
Магницкий Михаил Леонтьевич (1778–1844) 72, 73
Мазур Станислав Мечислав (1905–1981) 335
Маккинси Дж. (McKinsey J.; 1908–1953) 548
Маклейн Сондерс (Mac Lane Saunders; 1909–2005) 238–240, 412, 416, 455
Маклеод Болл Джон (MacLeod Ball John; p. 1948) 475, 476
Маклорен Колин (Maclauren Colin; 1698–1746) 136, 581
Макмуллен Кёртис (Mcmullen Curtis; p. 1958) 55
Максвелл Джеймс Клерк (Maxwell James Clerk; 1831–1879) 16, 157, 243, 424, 425, 591, 593
Малаховский Владислав Степанович (p. 1929) 409
Малер Курт (Maler Kurt; 1903–1988) 170
Мальцев Анатолий Иванович (1909–1967) 44, 66, 219, 220, 345, 350, 372, 373, 379, 380, 382
Мамфорд Девид Брайант (Mumford David Bryant; p. 1937) 53, 65, 481, 483–485
Мангольдт Ханс Карл Эмиль (Mangoldt Hans Carl Emil von; 1824–1868) 491
Мандельбройт Шолем (Mandelbrojt Szolem; 1899–1983) 401
Мандельброт Бенуа (Mandelbrot Benoot; 1924–2010) 23, 274, 601, 602, 604, 605, 612, 614, 615
Мандельштам Леонид Исаакович (1879–1944) 303, 304
Манин Юрий Иванович (p. 1937) 452, 466, 523
Маргулис Григорий Александрович (p. 1946) 53, 57, 65, 221, 382, 383
Марджанишвили Константин Константинович (1903–1981) 220
Марков Андрей Андреевич (1856–1922) 21, 38, 66, 128, 132, 134, 139, 140, 190, 243, 256, 286, 311, 326, 390, 607
Марков Андрей Андреевич (мл.) (1903–1979) 118–123, 217, 219, 304, 305, 345, 371–373, 382, 531–533, 536
Марков Владимир Андреевич (1871–1897) 128

Маркушевич Алексей Иванович (1908–1979) 408
Марчук Гурий Иванович (р. 1925) 298–300, 350, 447
Мателски Питер (Matelski Peter) 615
Матиясевич Юрий Владимирович (р. 1947) 41, 117, 493, 508, 509
Мейер Ив (Meyer Yves; р. 1939) 60
Менгер Карл (Menger Carl; 1840–1921) 18, 283
Мендель Грегор Иоганн (Mendel Gregor Johann; 1822–1884) 206
Меньшов Дмитрий Евгеньевич (1892–1988) 56, 209–213, 216–219, 275, 277, 325, 336–338, 341
Мергелян Сергей Никитович (1928–2008) 219, 287, 382
Метрополис Николай Константин (Metropolis Nicholas Constantine; 1915–1999) 257
Мещерский Иван Всеволодович (1859–1935) 291
Мёбиус Август Фердинанд (Mobius August Ferdinand; 1790–1868) 230, 361, 454
Мизес Рихард Эдлер (Mises Richard Edler; 1883–1953) 168, 170, 243, 245
Миллс Роберт (Mills Robert; 1927–1999) 49, 399, 446
Милнор Джон Уиллард (Milnor John Willard; р. 1931) 52, 58, 60, 63, 230, 417, 457, 460, 462–464, 470, 487
Миндинг Эрнст Фердинанд Адольф (Minding Ernst Ferdinand Adolf; 1806–1885) 386
Минковский Герман (Minkowski Hermann; 1864–1909) 21, 72, 146, 152, 153, 159–161, 168, 180, 332, 378, 392, 397, 429
Митропольский Юрий Алексеевич (1917–2008) 307, 438
Миттаг-Лёффлер Магнус Густав (Гёста) (Mittag-Leffler Magnus Gustaf (Gösta); 1846–1927) 50, 266, 330, 331, 413
Мищенко Евгений Фролович (1922–2010) 306, 557
Мияока Иончи (Miyaoka Joichi; р. 1950) 519
Млодзиевский Болеслав Корнелиевич (1858–1923) 189, 197, 259
Мозер Юрген Курт (Moser Jürgen Kurt; 1928–1999) 63, 595, 616, 617
Моисеев Никита Николаевич (1917–2000) 563, 564, 590, 591
Монж Гаспар (Monge Gaspard; 1746–1818) 150, 185, 384, 393, 396, 479
Монтель Поль Антуан Аристи (Montel Paul Antoine Aristide; 1876–1975) 411
Мопертюи Пьер-Луи (Maupertuis Pierre-Louis; 1698–1759) 195
Морган Огастес (Август) (Morgan Augustus; 1806–1871) 77, 538
Моргенштерн Оскар (Morgenstern Oskar; 1902–1977) 233, 565
Морделл Луис Джоэл (Mordell Louis Joel; 1888–1972) 479, 481, 485
Мори Сигефуми (Mori Shigefumi; р. 1951) 54, 481, 482, 485, 486
Морс Марстон Харолд (Morse Marston Harold; 1892–1977) 224, 229–231, 234, 450
Мровка Т. (Mrowka T.) 58
Муавр Абрахам (Moivre Abraham, 1667–1754) 256
Мусин-Пушкин Михаил Николаевич (1795–1862) 73, 74
Мусхелишвили Николай Иванович (1891–1976) 193
Мышкис Анатолий Дмитриевич (1920–2009) 29

Навье Луи Мари Анри (Navie Louis Marie Henri; 1785–1836) 48, 49, 463
Наймарк Марк Аронович (1909–1978) 328, 329, 353
Намбу Йохиро (Nambu Yoichiro; р. 1921) 432
Нарышкина Екатерина Алексеевна (1895–1940) 341
Нго Бао Чау (Ngo Bau Chau; р. 1972) 56, 481, 522, 524
Неванлинна Рольф Герман (Nevanlinna Rolf Hermann; 1895–1980) 60, 183, 342, 343, 413, 502, 536
Нейгебауэр Отто Эдуард (Neugebauer Otto Eduard; 1899–1990) 166, 167
Нейман Джон фон (Neumann John von; 1903–1957) 11, 15, 24, 28, 40, 58, 68, 105, 107, 164, 169, 185, 224, 231–236, 259, 327, 329, 356, 373, 459, 507, 542, 551, 565, 572, 575, 595, 611

Нейман Ежи (Юрий Чеславович) (Neyman Jerzy; 1894–1981) 245–247, 253–255, 257
Некрасов Александр Иванович (1883–1957) 214
Некрасов Павел Алексеевич (1853–1924) 189
Нельсон Эдвард (Nelson Edward; p. 1932) 575
Немчинов Василий Сергеевич (1894–1964) 562
Немыцкий Виктор Владимирович (1900–1967) 212, 278, 294, 304, 305, 307, 327, 342
Нернст Вальтер Герман (Nernst Walther Hermann; 1864–1941) 151
Нётер Эмми Амалия (Noether Emmy Amalie; 1882–1935) 11, 168, 170, 238, 359, 360, 363–368, 371, 413, 480, 586
Нётер Макс (Noether Max; 1844–1921) 363
Никольский Сергей Михайлович (p. 1905) 220, 287, 379
Ниренберг Луис (Nirenberg Louis; p. 1925) 60, 284
Нобель Альфред (Nobel Alfred; 1833–1896) 50, 543
Новиков Петр Сергеевич (1901–1975) 56, 58, 212, 217, 219, 220, 281, 283, 326, 344–346, 373, 466, 533
Новиков Сергей Петрович (p. 1938) 53, 57, 65, 217, 220, 221, 269, 283, 457, 460, 466–469
Новожилов Виктор Валентинович (1892–1970) 562
Новожилов Юрий Викторович (p. 1924) 28
Нордгейм Лотар Вольфганг (Nordheim Lothar Wolfgang; 1899–1985) 233
Ньюкомб Саймон (Newcomb Simon; 1835–1909) 237
Ньюмен Макс (Newman Max; 1897–1984) 282
Ньютон Исаак (Newton Isaac; 1643–1727) 27, 96, 131, 136, 186, 286, 290, 400, 424, 444, 549, 550, 560, 574, 581, 582
Нэш Джон Форбс (мл.) (Nash John Forbes; p. 1928) 50, 475, 551, 565, 566, 616

Окуньков Андрей Юрьевич (p. 1969) 46, 55, 221, 481, 522, 525
Олейник Ольга Арсеньевна (1925–2001) 317–319
Ольденбург Сергей Фёдорович (1863–1934) 190
Оппенгеймер Джулиус Роберт (Oppenheimer Julius Robert; 1904–1967) 229, 235
Оскар II (Oscar II; 1829–1907) 177, 330, 331
Остроградский Михаил Васильевич (1801–1832) 67, 74, 128, 142, 264

Павлов Иван Петрович (1849–1936) 209
Пайтген Хайнц-Отто (Peitgen Heinz-Otto; p. 1945) 602
Панов Дмитрий Юрьевич (1904–1975) 338
Папалекси Николай Дмитриевич (1880 – 1947) 303
Паскаль Блез (Pascal Blais; 1623–1662) 67, 97, 100, 181, 185, 384
Пастер Луи (Pasteur Louis; 1822–1895) 185, 411
Паули Вольфганг Эрнст (Pauli Wolfgang Ernst; 1900–1958) 163, 441, 468
Пауэлл Сесил Фрэнк (Powell Cecil Frank; 1903–1969) 112
Паш Мориц (Pasch Moritz; 1843–1930) 23, 154
Пеано Джузеппе (Peano Giuseppe; 1858–1932) 16, 38, 78, 106, 110, 154, 186, 187, 393, 615
Пелль Джон (Pell John; 1620–1685) 530
Пенлеве Поль (Painleve Paul; 1863–1933) 38, 184, 185 , 347
Пенроуз Роджер (Penrose Roger; p. 1931) 429, 443–445
Перельман Григорий Яковлевич (p. 1966) 46, 49, 55, 56, 221, 282, 324, 357, 471, 474–477, 488, 622
Перрен Жан Батист (Perrin Jean Baptiste; 1870–1942) 184
Перрон Оскар (Perron Oskar; 1880–1975) 305
Петерсон Карл (Peterson Charles; 1828–1881) 386, 388, 484
Петров Георгий Иванович (1912–1987) 329
Петровский Иван Георгиевич (1901–1973) 41, 58, 66, 193, 213, 218, 220, 271, 304, 309, 316–319, 322, 349, 350, 382, 395, 465
Пиаже Жан (Piaget Jean; 1896–1980) 407
Пик Георг Александр (Pick Georg Alexander; 1859–1942) 342

Пикар Шарль Эмиль (Picard Charles Emile; 1856–1941) 38, 200, 309
Пикок Джордж (Peacock George; 1791–1858) 76
Пирс Чарльз Сандерс (Peirce Charles Sanders; 1839–1914) 77
Пирсон Карл (Чарлз) (Pearson Karl (Charles); 1857–1936) 245–255
Пирсон Эгон Шарп (Pearson Egon Sharpe; 1895–1980) 245, 246, 253–255
Пифагор (580–500 до н. э.) 70
Планк Макс (Planck Max; 1858–1947) 71, 151, 152, 205, 357
Плато Жозеф Антуан Фердинанд (Plateau Joseph Antoine Ferdinand; 1801–1883) 52, 507
Платон (427–347 до н. э.) 97, 540
Плейфер Джон (Playfair John; 1748–1819) 69
Племель Иосиф (Plemelj Joseph; 1873–1967) 42
Плеснер Абрам Иезекиилович (1900–1961) 459
Плюккер Юлиус (Plücker Julius; 1801–1868) 149
Погорелов Алексей Васильевич (1919–2002) 163, 220, 386 , 387, 395–397
Пойа Дьёрдь (Полиа Джордж) (Polya George; 1887–1985) 258, 267, 494
Полинг Лайнус Карл (Pauling Linus Carl; 1901–1994) 112
Понселе Жан Виктор (Poncelet Jean Victor; 1788–1867) 184, 185, 384, 479
Понтрягин Лев Семенович (1908–1988) 18, 40, 56–58, 209, 214, 219, 220, 271, 272, 278, 305, 327, 365, 372, 373, 409, 413, 416, 455–461, 463, 467, 468, 552–557, 583, 591
Поссель Рене (Possel Rene; 1905–1974) 401
Пост Эмиль Леон (Post Emil Leon; 1897–1954) 531–533
Постников Алексей Георгиевич (1921–1995) 44, 220
Прандтль Людвиг (Prandtl Ludwig; 1875–1953) 168
Привалов Иван Иванович (1891–1941) 197, 209, 211–213 , 325
Пригожин Илья Романович (Prigogine Ilya; 1917–2003) 590–592, 596, 598, 599, 609–611
Прохоров Юрий Васильевич (р. 1929) 220
Пуанкаре Анри Жюль (Poincare Henri Jules; 1854–1912) 11, 15, 18, 20, 30, 38, 42, 50, 55, 68, 72, 90, 99, 101, 113, 136, 150, 152, 153, 174–181, 184–186, 194, 199, 225, 228, 269–272, 278, 305, 309, 324, 329, 331, 332, 359, 393, 400, 405, 407, 416, 454, 455, 464, 469–471, 474, 475, 500, 591, 593–595, 599
Пуанкаре Раймон (Poincare Raymond; 1860–1934) 174
Пуассон Симеон (Poisson Simeon; 1781–1840) 80, 130, 243, 256, 305, 452
Пфлюгер Альберт (Pfluger Albert; 1907–1993) 347
Пятецкий-Шапиро Илья Иосифович (1929–2009) 44, 63, 220

Радон Иоганн Карл Август (Radon Johann Karl August; 1887–1956) 354
Разборов Александр Александрович (р. 1963) 60, 221
Райков Дмитрий Абрамович (1905–1981) 258, 328, 353, 391
Рам Джордж (Rham Georges; 1903–1990) 58
Рамануджан Шриниваса Айенгар (Ramanujan Srinivasa Aaiyangar; 1887–1920) 21, 484, 492, 494–498, 506
Рассел Бертран (Russel Bertrand; 1872–1970) 50, 77, 78, 89, 90, 92, 99, 100, 105, 106, 108–112, 124, 257, 403, 424, 539
Раус Эдуард Джон (Routh Edward John; 1831–1907) 378
Рашевский Пётр Константинович (1907–1983) 320, 352
Рейнольдс Осборн (Reynolds Osborne; 1842–1912) 48
Реллих Франц (Rellich Franz; 1906–1955) 616
Ремак Роберт Эрих (Remak Robert Erich; 1888–1942) 375, 377
Рентген Вильгельм Конрад (Röntgen Wilhelm Conrad; 1845–1923) 151
Рибет Кен (Ribet Ken; р. 1948) 520
Рид Констанс (Reid Constance) 155, 233
Рикье Шарль (Riquier Charles; 1853–1929) 139
Риман Бернхард Георг Фридрих (Riemann Berngard Georg Friedrich; 1826–1866) 14,

20, 47, 71, 113, 129, 146–151, 155, 165, 168, 187, 269, 332, 384, 393, 420, 454, 479, 491
Рисс Фридьеш (Riesz Frigyes; 1880–1956) 183, 270, 327
Ритц Вальтер (Ritz Walter; 1878–1909) 286, 291
Рихтер Ганс Питер (Richter Hans Peter; 1925–1993) 602
Рихтмайер Роберт (Richtmyer Robert; 1910–2003) 236
Ричардсон Левис Фрай (Richardson Lewis Fry; 1881–1953) 603
Риччи (Риччи-Курбастро) Грегорио (Ricci-Curbastro Gregorio; 1853–1925) 454, 474
Ришар Жюль (Richard Jules; 1862–1956) 90
Роббинс Герберт Эллис (Robbins Herbert Ellis; 1915–2001) 167, 246
Робинсон Абрахам (Robinson Abraham; 1918–1974) 572–574, 576, 577, 586, 587
Робинсон Джулия (Robinson Julia; 1919–1985) 508
Рожанская Юлия Антоновна (1901–1967) 212
Розенблют Артур (Rosenblueth Arturo; 1900–1970) 540
Рот Клаус Фридрих (Roth Klaus Friedrich; p. 1925) 52, 505–507
Рох Густав (Roche Gustav; 1839–1866) 420
Рохлин Владимир Абрамович (1919–1984) 305, 397, 416, 455, 456, 458–461, 472, 595
Румянцев Валентин Витальевич (1921–2007) 564
Рунге Карл Давид Тольме (Runge Carl David Tolme; 1856–1927) 152, 168, 286
Руст Бернгард (Rust Bernhard; 1883 –1945) 170
Руффини Паоло (Ruffini Paolo; 1765–1822) 361, 378
Рыжик Валерий Идельевич (p. 1949) 394
Рэлей Джон Уильям (Rayleigh John William; 1842–1919) 286
Рюэль Дэвид (Ruelle David; p. 1935) 592, 612

Саати Томас (Saaty Thomas) 548
Саган Карл Эдуард (Sagan Carl Edward; 1934–1996) 564
Садовский Леонид Ефимович (1916–1988) 29
Саймонс Джеймс Харрис (Simons James Harris; p. 1938) 507
Саккери Джироламо (Saccheri Girolamo; 1667–1733) 70
Салам Абдус (Salam Abdus; 1926–1996) 427, 428
Салливан Деннис Парнелл (Sullivan Dennis Parnell; p. 1941) 65
Салтыков Николай Николаевич (1872–1961) 347
Самарский Александр Андреевич (1919–2008) 220, 287, 288, 295, 301, 302, 590
Сато Микио (Sato Mikio; p. 1928) 65
Сахаров Андрей Дмитриевич (1921–1989) 321
Свиннертон-Дайер Генри Питер Фрэнсис (Swinnerton-Dyer Henry Peter Francis; p. 1927) 47, 48, 414, 481
Седов Леонид Иванович (1907–1999) 219, 220, 327
Сельберг Атле (Selberg Atle; 1917–2007) 52, 62, 224, 504, 505
Серпиньский Вацлав Франциск (Sierpinski Vaclav Francis; 1882–1969) 183, 209, 338–340, 602, 603, 615
Серр Жан-Пьер (Serre Jean-Pierre; p. 1926) 52, 59, 64, 400, 405–407, 416, 417, 455, 456, 461, 480, 482, 484
Сильвестр Джеймс Джозеф (Sylvester James Joseph; 1814–1897) 37
Симонов Иван Михайлович (1794–1855) 73
Синай Яков Григорьевич (p. 1935) 64, 221, 595
Синг Джон Лигтон (Synge John Lighton; 1897–1995) 27
Склодовская-Кюри (Кюри) Мария (Sklodowska-Curie Maria; 1867–1934) 184, 267
Сколем Альберт Туральф (Skolem Albert Thoralf; 1887–1963) 105, 573, 576, 585, 586
Скотт Дана Стюарт (Scott Dana Stewart; p. 1932) 240, 584
Слуцкий Евгений Евгеньевич (1880–1948) 244, 249–251
Смейл Стивен (Smale Stephen; p. 1930) 49, 53, 65, 230, 462, 463, 467, 470, 596

Смирнов Владимир Иванович (1887–1974) 138, 140–142, 306, 312, 348
Смирнов Николай Васильевич (1900–1966) 220, 246, 260
Смирнов Станислав Константинович (р. 1970) 56, 221, 357, 358
Смирнов Юрий Михайлович (р. 1921) 270
Смит Генри (Smith Henry; 1826–1883) 159
Смолуховский Мариан (Smoluchowski Marian; 1872–1917) 205, 540
Снедекор Джорждд Уоддел (Snedecor George Waddel; 1881–1974) 252
Соболев Владимир Иванович (1913–1995) 344
Соболев Сергей Львович (1908–1989) 11, 29, 56, 58, 141, 193, 216, 218, 299, 308, 318, 326, 327, 347–351, 415, 500, 588
Соловьёв Александр Дмитриевич (1927–2001) 264
Соловэй Роберт Мартин (Solovay Robert Martin; р. 1938) 240, 584
Спенсер Дональд Клейтон (Spencer Donald Clayton; 1912–2001) 482
Спиелман Даниэль Алан (Spielman Daniel Alan; р. 1970) 60
Стеклов Владимир Андреевич (1864–1926) 128, 135, 137–139, 140, 190–192, 201, 286, 290, 307, 607
Степанов Вячеслав Васильевич (1889–1950) 197, 204, 209, 212, 218, 275, 304, 305, 307
Стилтьес Томас Иоаннес (Stieltjes Thomas Johannes; 1856–1894) 308
Стинрод Норман Эрл (Steenrod Norman Earl; 1910–1971) 228, 239, 455, 461, 463, 467
Стоммел Генри (Stommel Henry Melson; 1920–1992) 613
Стокс Джордж Габриель (Stokes George Gabriel; 1819–1903) 48
Стратонов Всеволод Викторович (1869–1938) 213
Судан Мадху (Sudan Madhu; р. 1966) 60
Суслин Михаил Яковлевич (1894–1919) 209, 210, 216, 277, 338–340, 487
Сюняев Рашид Алиевич (р. 1943) 66

Тагор Рабиндранат (Tagore Rabindranath; 1861–1941) 250
Тайхмюллер Освальд (Teichmüller Oswald; 1913 –1943) 55
Такаги Тейи (Takagi Teiji; 1875–1960) 359, 366
Такенс Флорис (Takens Floris; 1940–2010) 592
Тамаркин Яков Давидович (1888–1945) 608
Танияма Ютака (Taniyama Yutaka; 1927–1958) 41, 514–517
Тао Теренс (Tao Terence; р. 1975) 55, 508–510
Тарский Альфред (Tarski Alfred; 1901–1983) 117, 380
Тартаковский Владимир Абрамович (1901–1973) 371
Тарьян Роберт Андре (Tarjan Robert Endre; р. 1948) 60
Таубса Клиффорд Генри (Taubes Clifford Henry; р. 1954) 66
Тейлор Брук (Taylor Brook; 1685–1731) 582
Тейлор Ричард Лоуренс (Taylor Richard Lawrence; р. 1962) 516, 520
Тейт Джон Торренс (Tate John Torrence; р. 1925) 59, 60, 65, 405, 418, 419
Теллер Эдвард (Teller Edward; 1908–2003) 235
Тёрстон Уильям (Thurston William; р. 1946) 54, 471, 472, 474, 615
Тимошенко Степан Прокофьевич (1878–1972) 291
Тинбергер Ян (Tinbergen Jan; 1903–1994) 245
Тирринг Вальтер (Thirring Walter; р. 1927) 432
Титс Жак (Tits Jacques; р. 1930) 59, 63, 369, 408, 422, 423
Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993) 212, 218, 220, 270, 278, 287, 288, 293–296, 301, 302, 305, 318, 327, 345, 350, 382, 579
Тихонравов Михаил Клавдиевич (1900–1974) 321
Толстой Алексей Константинович (1817–1875) 98
Толстой Лев Николаевич (1828–1910) 410
Том Рене Фредерик (Thom Rene Frederic; 1923–2002) 52, 58, 400, 455, 456, 460–462, 466–468, 470, 600

Томонага Синъитиро (Tomonaga Sinitiro; 1906–1979) 441, 442
Томпсон Джон Григс (Thompson John Griggs; p. 1932) 53, 59, 63, 369, 370, 417, 423
Тумаркин Лев Абрамович (1904–1974) 212, 563
Туполев Андрей Николаевич (1888–1972) 196
Туэ Аксель (Thue Axel; 1863–1922) 52, 506
Тьюринг Алан Матисон (Turing Alan Mathison; 1912–1954) 527, 531, 541, 542

Уайлс Эндрю Джон (Wiles Andrew John; p. 1953) 55, 57, 58, 64, 413, 418, 475, 516, 518–522 , 622
Уайтхед Альфред Норт (Whitehead Alfred North; 1861–1947) 98, 106, 109–111, 124, 416
Уайтхед Джон Генри Константин (Whitehead John Henry Constantine; 1904–1960) 455, 456, 470
Уитни Уильям Дуайт (Whitney William Dwight; 1827–1894) 237
Уитни Хасслер (Whitney Hassler; 1907–1989) 18, 58, 62, 237, 238, 455, 462, 599, 600
Улам Станислав Мартин (Ulam Stanislaw Martin; 1909–1984) 257, 517
Ульянов Пётр Лаврентьевич (1928–2006) 337
Умов Николай Алексеевич (1846–1915) 189
Урысон Павел Самуилович (1898–1924) 17, 18, 210–212, 269, 270, 275–278, 337
Успенский Владимир Андреевич (p. 1930) 207, 531, 532, 577, 578
Успенский Яков Викторович (1883–1947) 139, 190, 390, 498
Уэлдон Вальтер (Weldon Walter; 1860–1906) 247

Фаддеев Дмитрий Константинович (1907–1989) 66, 220, 373, 445
Фаддеев Людвиг Дмитриевич (p. 1934) 445–447
Фалтингс Герд (Faltings Gerd; p.1954) 54, 481, 485
Фату Пьер Жозе Луи (Fatou Pierre Joseph Louis; 1878–1929) 200, 303, 604, 605, 615
Фейгенбаум Митчел (Feigenbaum Mitchell; p.1944) 463, 590, 596
Фейгин Борис Львович (p. 1953) 221
Фейнман Ричард Филлипс (Feynman Richard Phillips; 1918–1988) 399, 426, 440–442, 446, 468, 576
Фейт Уолтер (Walter Veith; p. 1949) 369
Фекете Михай (Fekete Mihaly; 1886–1957) 231
Ферма Пьер (Fermat Pierre; 1601–1665) 67, 96, 267, 478, 495, 511–514, 517–520
Ферми Энрико (Fermi Enrico; 1901–1954) 235, 257
Ферсман Александр Евгеньевич (1883–1945) 216
Фефферман Чарльз Луис (Fefferman Charles Louis; p. 1949) 53, 355, 510
Фёдоров Евграф Степанович (1853–1919) 150, 361, 385, 390
Филдс Джон Чарльз (Fields John Charles; 1863–1938) 51
Фиников Сергей Павлович (1883–1964) 197, 386–389
Фихтенгольц Григорий Михайлович (1888–1959) 141, 327, 560
Фишер Роналд Эйлмер (Fisher Ronald Aylmer; 1890–1962) 245, 247, 248, 251–255
Фишер Эмиль Герман (Fischer Emil Hermann; 1852–1919) 151
Флах Матиус (Flach Matthias) 519
Флоренский Павел Александрович (1882–1937) 164, 209
Фокс Ральф (Fox Ralph; 1913–1973) 272
Фома Аквинский (1225–1274) 94
Фоменко Анатолий Тимофеевич (p. 1945) 469
Франк Джеймс (Franck James; 1882–1964) 152
Франциск I (François I; 1494–1547) 172
Фреге Фридрих Людвиг Готлоб (Frege Friedrich Ludwig Gottlob; 1848–1925) 78, 91, 99, 100, 110, 155, 403
Фредгольм Эрик Ивар (Fredholm Erik Ivar; 1866–1927) 18, 156, 327, 329
Фрей Герхард (Frey Gerhard; p.1944) 517, 519
Френель Огюстен Жан (Fresnel Augustin Jean; 1788–1827) 185

Френкель Абрахам Галеви (Адольф) (Fraenkel Abraham Halevi (Adolf); 1891–1965) 105, 117
Фреше Морис Рене (Frechet Maurice Rene; 1878–1973) 185, 204, 205, 243, 269, 270, 275, 278, 327, 404, 415
Фридман Александр Александрович (1888–1925) 300, 608
Фридман Майкл (Friedman Michael; p. 1951) 54, 471–473
Фридрихс Курт Отто (Friedrichs Kurt Otto; 1901–1982) 167, 309, 348
Фриз Густав (Vries Gustav; 1866–1934) 451
Фриш Рагнар Антон Киттиль (Frisch Ragnar Anton Kittil; 1895–1973) 245
Фробениус Фердинанд Георг (Frobenius Ferdinand Georg; 1849–1917) 332, 361–363
Фройденталь Ганс (Fraudental Hans; 1905–1990) 170, 407
Фукс Лазарь Иммануэль (Fuchs Lazarus Immanuel; 1833–1902) 141, 175
Фуллер Ричард Бакминстер (Fuller Richard Buckminster; 1895–1983) 597
Фуртвенглер Филипп (Furtwangler Philipp; 1869–1940) 123
Фурье Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768–1830) 17, 61, 63, 79, 354, 484, 540
Фусс Николай Иванович (1755–1826) 73
Фюрстенберг Гарри (Furstenberg Harry; p. 1935) 65

Хаар Алфред (Haar Alfred; 1885–1933) 403
Хаббард Джон (Hubbard John; p. 1945) 615
Хайкин Семён Эммануилович (1901–1968) 303
Хайнеман Дэнни (Heineman Danny; 1872–1962) 485
Хакен Вольфганг (Haken Wolfgang; p. 1928) 537
Хакен Герман (Haken Hermann; p. 1927) 590, 597, 598, 610
Халмош Пол Ричард (Halmos Paul Richard; 1916–2006) 595
Хальд Андерс (Hald Anders; 1913–2007) 247
Хан Ганс (Hahn Hans; 1879–1934) 327, 584
Харди Годфри Харолд (Hardy Godfrey Harold; 1877–1947) 21, 97, 98, 163, 333, 355, 490, 492–498, 506, 539, 608
Хариш-Чандра Мехротра (Harish-Chandra Mehrotra; 1923–1983) 224, 521
Хассе Гельмут (Hasse Helmut; 1898–1979) 41, 359, 365, 366, 414
Хаусдорф Феликс (Hausdorf Felix; 1868–1942) 17, 90, 269, 270, 271–276, 278, 339, 602, 604, 608, 615
Хевисайд Оливер (Heaviside Oliver; 1850–1925) 415
Хейлс Каллистер Томас (Hales Callister Thomas; p. 1958) 537
Хёрмандер Ларс (Hörmander Lars; p. 1935) 52, 63, 224, 309, 322, 323, 331, 354, 465
Хиггс Питер (Higgs Peter; p. 1929) 428
Хинчин Александр Яковлевич (1894–1959) 21, 43, 56, 156, 205, 209–213, 216 , 243, 244, 250, 256, 258–262, 277, 305, 317, 326, 336, 351, 490, 500, 595
Хитчин Нигель (Hitchin Nigel; p. 1946) 466
Хиронака Хейсуке (Hironaka Heisuke; p. 1931) 53, 481–483
Хирцебрух Фридрих Эрнст Петер (Hirzebruch Friedrich Ernst Peter; p. 1927) 63, 400, 456, 460, 465, 481
Ходж Вильям Воланс Дуглас (Hodge William Vallance Douglas; 1903–1975) 48, 65, 418, 464, 482
Хокинг Стивен Уильям (Hawking Stephen William; p. 1942) 443–445
Холдейн Джон Бердон Сандерсон (Haldane John Burdon Sanderson; 1892–1964) 607
Холл Эдвин С. (Hall Edwin S.; 1855–1938) 356
Хопф Хейнц (Hopf Heinz; 1896–1971) 179, 205, 227, 278, 280, 416, 455, 467
Хопф Эберхард Фридрих Фердинанд (Hopf Eberhard Frederich Ferdinand; 1902–1983) 539, 595
Хрбачек Карел (Hrbacek Karel; p. 1944) 575
Христианович Сергей Алексеевич (1908–2000) 314

Цейтлин Георгий Евсеевич 547
Цетлин Михаил Львович (1924–1966) 354
Цермело Эрнст Фридрих Фердинанд (Zermelo Ernst Friedrich Ferdinand; 1871–1953) 88–90, 92, 117, 152, 575
Цингер Василий Яковлевич (1836–1907) 189

Ципф Джордж (Zipf George; 1902–1950) 614
Цорн Макс Август (Zorn Max August; 1906–1993) 274

Чаплыгин Сергей Алексеевич (1869–1942) 190, 191, 196, 197, 216, 286, 313, 319
Чеботарёв Николай Григорьевич (1894–1947) 191, 215, 366, 370, 377–379, 391
Чебышёв Пафнутий Львович (1821–1894) 21, 66, 123, 128–133, 135, 243, 255, 256, 264, 286, 288, 300, 310, 311, 326, 351, 490
Черчмен Чарльз Уэст (Churchman Charles West; 1913–2004) 548
Чёрч Алонзо (Church Alonzo; 1903–1995) 117, 531, 532, 541
Чжоу Вейлинг (Zhou Weiliang; 1911 –1995) 41
Чжэнь (Черн) Шэньшэнь (Chern Shiing-Shen; 1911–2004) 18, 58, 60, 62, 228, 283, 284, 448, 480
Чигорин Михаил Иванович (1850–1908) 133

Шабат Борис Владимирович (1917–1987) 316, 563
Шаль Мишель (Chasles Michel; 1793–1880) 384
Шанин Николай Александрович (р. 1919) 345, 533
Шао (Шоу) Ифу (Shao Yifu; р. ок. 1907) 66
Шаудер Юлиуш Павел (Schauder Juluis Pavel; 1898–1943) 304
Шафаревич Игорь Ростиславович (р. 1923) 41, 179, 219, 220, 373, 380–382, 391, 408, 418, 485
Шварц Джон Генри (Schwarz John Henry; р. 1941) 432, 433
Шварц Карл Герман Амандус (Schwarz Karl Hermann Amandus; 1843–1921) 146, 148, 165, 332
Шварц Лоран (Schwartz Laurent; 1915–2002) 52, 309, 405, 408, 415, 416, 420
Швингер Джулиус (Schwinger Djulius; 1918–1994) 441, 442
Шевалле Клод (Chevalley Claude; 1909–1984) 359, 378, 401, 414
Шела Саарон (Shelah Saharon; р. 1945) 64
Шеннон Клод Элвуд (Shannon Claude Elwood; 1916–2001) 58, 261, 534, 540, 543, 544
Шерк Джоэл (Sherk Joel; 1946–1980) 432
Шёнфлис Артур (Schönflies Arthur; 1853–1928) 113
Шилов Георгий Евгеньевич (1917–1975) 328, 354
Шимура Горо (Shimura Goro; р. 1930) 41, 514–517
Ширшов Анатолий Илларионович (1921–1981) 220
Шкабара Екатерина Алексеевна (р. 1913) 263
Шмидт Отто Юльевич (1891–1956) 192, 213, 215, 216, 370, 371, 374–377
Шмидт Эрхард (Schmidt Erhard;1876–1959) 158, 168, 327, 329
Шнайдер Теодор (Schneider Theodor; р. 1911) 506
Шнирельман Лев Генрихович (1905–1938) 56, 58, 212, 214, 216, 272, 278, 327, 491, 500, 501
Шор Питер (Shor Peter; р. 1959) 60
Шрамм Одед (Schramm Oded; 1961–2008) 267, 358
Шрёдер Эрнст (Schroder Ernst; 1841–1902) 24, 77
Шрёдингер Эрвин Рудольф Йозеф Александр (Schrödinger Erwin Rudolf Josef Alexander; 1887 –1961) 157, 163, 233, 259, 442, 469
Штаудт Карл Георг Христиан (Staudt Karl Georg Christian;1798 –1867) 23
Штейн Элиас (Stein Elias; р. 1931) 64
Штейнгауз Гуго (Steinhaus Hugo; 1887–1972) 156, 334, 335
Штейниц Эрнст (Steinitz Ernst; 1871 –1928) 19, 360, 362
Штурм Шарль-Франсуа (Sturm Charles-François; 1803–1855) 354

Эйген Манфред (Eigen Manfred; р. 1927) 597
Эйзенштейн Фердинанд Готтхольд Макс (Eisenstein Ferdinand Gotthold Max; 1823–1852) 521

Эйленберг Самуэль (Eileberg Samuel; 1913–1998) 58, 62, 238, 405, 411, 412, 416, 455
Эйлер Леонард (Euler Leonard; 1707–1783) 66, 67, 76, 128, 130, 137, 177, 195, 269, 286, 332, 351, 361, 381, 393, 447, 489, 490, 494–496, 502, 512, 530, 574, 581, 582
Эйнштейн Альберт (Einstein Albert; 1879–1955) 20, 21, 28, 72, 112, 115, 125, 157, 158, 160, 162, 164, 180, 205, 234, 258, 265, 333, 424, 425, 430, 431, 445, 447, 461, 468, 601
Элиашберг Яков Матвеевич (р. 1946) 460
Эмпедокл (ок. 490 – ок. 430 до н. э.) 592
Энрикес Федериго (Enriques Federigo; 1871–1946) 42
Энфло Пэр (Enflo Per; p. 1944) 335
Эратосфен Киренский (276–194 до н. э.) 501
Эрдёш Пол (Erdös Paul; 1913–1996) 62, 505
Эренфест Пауль (Ehrenfest Paul; 1880–1933) 152, 607
Эресманн Шарль (Ehresmann Charles; 1905–1979) 401
Эрланг Агнер (Erlang Agner; 1878–1929) 553, 554
Эрлих Пауль (Ehrlich Paul; 1854–1915) 151
Эрмит Шарль (Hermite Charles; 1822–1901) 38, 132, 153, 177, 330, 492, 601
Эррио Эдуард (Herriot Edouard; 1872–1957) 184

Юкава Хидэки (Yukawa Hideki; 1907–1981) 112
Юнг Алфред (Young Alfred; 1873–1940) 525
Юшкевич Адольф Павлович (1906–1993) 201, 207
Ющенко Екатерина Логвиновна (1919–2001) 263, 547

Яглом Акива Моисеевич (1921–2007) 207, 353
Якоби Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob; 1804–1851) 136, 176, 195, 290, 330, 479
Якубович Владимир Андреевич (р. 1926) 306
Янг Чжэньнин (Yang Chen-Ning; p. 1922) 49, 66, 399, 446
Яненко Николай Николаевич (1921–1984) 220, 299
Янишевский Зигмунд (Janiszewski Zygmunt; 1888–1920) 201
Яновская Софья Александровна (1896–1966) 215, 216
Яу Шинтан (Yau Shig Tug; p. 1949) 54, 65, 224, 284, 433, 448, 449, 475, 476

Научно-популярное издание

Панов Владилен Федорович

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ТВОРЦЫ

Редактор *В.С. Буравлева*
Технический редактор *Э.А. Кулакова*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *К.А. Осипова*
Компьютерная графика *В.А. Филатовой*
Компьютерная верстка *И.Д. Звягинцевой*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003961.04.08 от 22.04.2008 г.

Подписано в печать 12.12.11. Формат 70×100 1/16.
Усл. печ. л. 52,25. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
E-mail: press@bmstu.ru
http://www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
E-mail: mgtupress@mail.ru