

ОДЕССКОЕ ВЫСШЕЕ  
ИНЖЕНЕРНОЕ МОРСКОЕ УЧИЛИЩЕ  
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

А.И.КОХАНСКИЙ

# ОСНОВЫ АВТОМАТИЗАЦИИ СУДОВЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Учебное пособие

Поверніть книгу не пізніше зазначеного терміну.

[illegible]

Киево-Святошинська друк.

Москва  
В/О "Мортехинформреклама"  
1991

## УЧЕБНЫЙ ФОНД

Российская библиотека  
русского государства и  
морской академии

100-443887-100

Коханский А.И. Основы автоматизации судовых энергетических установок: Учеб. пособие. — М.: В/О "Мортехинформреклама", 1991. — 120 с.

Пособие предназначено для учащихся IV—V курсов судомеханических специальностей высших инженерно-морских училищ стационара и студентов с заочной формой обучения по специальности 14.03 "Эксплуатация судовых энергетических установок". Приступать к изучению предлагаемого материала возможно только после усвоения дисциплин по высшей математике, физике, котлам, турбинам, двигателям внутреннего сгорания и вспомогательным механизмам. Материал учебного пособия составляет основу линейной теории автоматического управления, необходимую для дальнейшего изучения дисциплины по автоматизации судовых энергетических установок.

Основные разделы иллюстрированы примерами, позволяющими закрепить пройденный материал. Учебное пособие построено на лекционных материалах, читаемых курсантам.

Ил. 56, табл. 6, список лит. 7 назв.

© В/О «Мортехинформреклама», 1991.

## Предисловие

Техническое перевооружение транспорта страны зависит от электронизации и комплексной автоматизации на основе компьютерной техники. Однако компьютеризация судовых технологических процессов требует дальнейшего развития локальных автоматизированных систем управления (АСУ) энергетической установкой и вспомогательными системами. При этом специалист по их эксплуатации, имея необходимые знания по основам теории управления, должен хорошо знать и современные средства автоматизации.

Основная задача пособия — дать необходимые сведения по теоретическим основам автоматического управления, которые являются базисом для приобретения специальных знаний в области устройств и эксплуатации АСУ судовыми энергетическими установками.

Будущий инженер-механик должен обеспечить надежную эффективную эксплуатацию автоматизированных энергетических установок, уметь настроить автоматические системы управления на требуемый режим работы. Успешное усвоение курса позволит понимать принципы построения и функционирования элементов, устройств и систем автоматики, решать задачи идентификации объектов, проектирования элементов и систем автоматического управления, проводить экспериментальные исследования элементов энергетических установок как объектов управления, устанавливать оптимальные настроечные параметры средств автоматики, обеспечивающие оптимальный режим работы автоматизированного оборудования, изучить методы теоретического описания и анализа функциональных характеристик АСУ.

Математический аппарат пособия основан на знании математического анализа, теории линейных дифференциальных уравнений и основ операционного исчисления в объеме курса для технических вузов и делает доступным пособие уже для студентов III курса.

Разделы пособия по исследованию объектов управления (аналитические и экспериментальные методы) требуют определенных

знаний в области специальных дисциплин — котлов, турбин, двигателей внутреннего сгорания. При этом студенты должны знать принципы работы механизмов, термодинамические процессы, протекающие в комплексе судовой энергетической установки.

Методический курс состоит из чередующихся функционально взаимосвязанных частей, позволяющих рассматривать материал в динамике перехода от простого к сложному. В первой части приведены основные понятия, определения, принципы построения систем, позволяющие любую систему управления представлять в виде двух функциональных блоков — объекта и регулятора. Изучение объектов управления требует знания теплофизических процессов, происходящих в них, которые предопределяют будущие свойства систем управления и позволяют их формализовать, т.е. создать математическую модель процесса (аналитически или экспериментально).

Изучив сравнительно небольшое количество законов регулирования, определяющих функционирование различных типов регуляторов, переходим к изучению поведения систем регулирования при различных настройках параметров.

Освоив типовые функциональные взаимосвязи объекта и регулятора, студент получает навыки формирования характеристик и построения различных систем из ограниченного количества функциональных элементов.

Основные разделы курса сопровождаются примерами, обеспечивая наглядность и информативность материала. Изучение материала учебного пособия следует сочетать с лабораторными и практическими занятиями согласно учебному плану.

## ГЛАВА I. АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ

### § 1. Цели автоматизации производственных процессов

Коренным образом изменяется роль человека в процессе производства — наступившее время автоматов требует повышения культурно-технического уровня подготовки работников, стирает грань между умственным и физическим трудом. В научно-технической революции, начавшейся в производственной сфере, генеральным направлением является автоматизация, цели которой подсказала практика. Их можно разделить на четыре группы.

Первая группа — автоматизация процессов, связанных с вредными, опасными для человека условиями труда; вторая — освобождение людей от ручной или умственной работы, вызывающей физическое или нервное перенапряжение; третья — автоматизация работы группы объектов, где вывести агрегат или установку на полную мощность человек просто не в состоянии; четвертая — автоматизация управления производством (комплексное, магистральное направление).

Пример. Мы знаем множество производственных процессов, крайне необходимых современному производству, но протекающих либо с выделением ядовитых веществ в атмосферу помещения, либо с излучением радиации. Человек там находиться не может. Кто будет обслуживать такие технологические циклы?

1. В Советский Союз по трансиранскому трубопроводу идет природный газ. Его трасса пролегает по пустынной, гористой местности. Для поддержания рабочего давления на трассе сооружены 34 компрессорные станции. Атмосфера на станции загазована, и температура там очень высокая. Все процессы пуска осуществляются дистанционно с диспетчерского пункта, а процессы на станции полностью автоматизированы.

2. Новолипецкий металлургический завод. Стан-200 — тонколистовой, горячей прокатки, самый мощный в стране. Максимальная скорость прокатки листов толщиной от 1 мм и более — 25 м/с. Такого режима при управлении станом вручную физически достичь нельзя.

Поэтому прокатку вели при пониженных скоростях. Это не позволяло использовать полную мощность агрегата, а фактор участия человека снижает качество продукции — высокий процент брака. Разработанная автоматическая система управления позволяет исключить вышеназванные недостатки.

3 Работа человека на конвейере связана с многократным повторением одинаковых операций. Созданы полностью автоматизированные конвейерные линии, станки-автоматы, станки и линии станков с программным управлением и робототехническими устройствами.

4. Миллионы людей в стране заняты учетными работами, которые не требуют творческого труда. За человеком надо оставить лишь такие задачи, которые требуют творческого подхода, — определение целей производства, выбор критериев оценки его продукции и т.д. Всю механическую работу следует автоматизировать. Нужно отдать машине составление оптимальных и оперативных планов, поиск наиболее выгодных условий. Тут мы выходим на комплексную проблему — кибернетизацию народного хозяйства.

Так что же такое автоматика?

Автоматика — это отрасль науки и техники, охватывающая совокупность технических средств и методов, позволяющих осуществлять технологические процессы без непосредственного участия человека.

Вопросы автоматического управления разрабатывались в самых разнообразных областях науки и техники, и комплекс исследований привел к созданию самостоятельной фундаментальной науки, называемой кибернетикой. Слово "кибернетика" происходит от двух греческих слов: "кибер" (в переводе "над") и "наутис" (моряк), т.е. "кибернаутис" — старший над морями. Греческий философ Платон использовал термин "кибернетика" для названия искусства управления обществом. В 1948 г. американский ученый Н. Винер снова ввел этот термин, определив кибернетику как науку об управлении в связи в живой и неживой природе. Поэтому, по определению Н. Винера, "кибернетика" — наука о самоуправляющихся системах и образованиях — машинах, организациях, обществах".

Одно из основных положений кибернетики состоит в том, что управление — это процесс переработки информации. Методы кибернетики находят применение не только при исследовании процессов управления в неживой природе, но и при исследовании процессов управления в живых организмах и в обществе.

Новое очень бурное развитие получила автоматика после появления ЭВМ, которые позволяют быстро переработать большой объем информации о происходящих процессах в системах.

Системы управления, основанные на использовании ЭВМ, целесообразно разделить на автоматизированные и автоматические.

Автоматизированная система управления представляет собой человеко-машинный комплекс, так как в ней в конечном итоге решения по вопросам управления принимает человек.

Автоматические системы управления технологическими процессами (АСУТП) с отдельными агрегатами осуществляют управление на основе заранее составленной программы. В этих системах персонал осуществляет контрольные функции.

Применение ЭВМ позволило перейти от частной к полной автоматизации технологических процессов в теплоэнергетических установках и системах. АСУТП — это система, предназначенная для выработки и реализации управляющих воздействий на технологический объект управления в соответствии с принятым критерием управления.

В зависимости от уровня решаемых задач АСУТП могут работать в следующих четырех режимах:

1) режим сбора данных или режим централизованного контроля. Это наиболее простой режим. На основе информации оператор принимает решение об управляющем воздействии;

2) режим советчика оператора. В составе АСУТП имеется модель процесса, набранная на ЭВМ, на вход которой поступает информация от процесса, а на выходе вырабатывается руководящая информация. Оператор использует ее для принятия решения, необходимого при управлении процессом;

3) режим автоматического супервизора. Он характеризуется тем, что ЭВМ непосредственно изменяет уставки (задания) локальным автоматическим устройствам. ЭВМ управляет регуляторами, а регуляторы — соответствующими параметрами процесса;

4) режим непосредственного цифрового управления. В этом режиме ЭВМ выполняет функции автоматических регуляторов параметров процесса. В этом случае критерием управления является, как правило, обобщенный критерий, сочетающий в себе технико-экономические показатели работы установки. Основное требование к работе АСУТП — обеспечить оптимальное (максимальное или минимальное) значение критерия управления.

С достижением определенного уровня автоматизации происходят соответствующие изменения в двух аспектах производственной деятельности — экономическом и социальном: во-первых, с помощью автоматизации достигаются более высокие экономические показатели производственной деятельности человека, повышение производительности и качества продукции; во-вторых, изменяется положение человека в производственной деятельности, он осво-

бождается от рутинных, однообразных, утомительных производственно-технических и управленческих процессов.

Однако ЭВМ способна к полезной работе только тогда, когда для каждого ее применения, для каждой решаемой ею задачи будет написана программа — точное и подробное описание всей последовательности операций, выполняемых машиной. Программирование становится массовой и в то же время одной из самых трудных интеллектуальных профессий. Программирование предъявляет высокие требования к внимательности, точности, к памяти, скорости восприятия и терпеливости. В то же время программирование не претендует на какие-то ранее невиданные способности человека. Умение планировать свои действия, предвидеть их последствия и отвечать за них всегда было присуще человеку умному, активному, порядочному. Проблема состоит в том, что ЭВМ потребовал развития этих способностей до нового высокого уровня. Таким образом, объективной основой для профессионального самоопределения программистов является появление в народном хозяйстве программ, создаваемых для многократного и деятельного применения. Сегодня проблема надежности работы ЭВМ имеет принципиальное значение, так как применение ЭВМ принимает другой характер. ЭВМ почти без посредничества человека управляет объектами хозяйства и техники. Она ведет на посадку самолеты и управляет технологическими процессами, где ошибка может повлечь за собой катастрофические последствия.

Вот почему ученые создали основы систематической и продуктивной разработки высоконадежных программ. Для профессионального программиста завершение программы — это выпуск продукции, отправная точка принятия на себя полной ответственности за поведение ЭВМ, которая "вооружена" его изделием. Сети ЭВМ, информационные системы, банки данных, системы управления — все это в совокупности образует своего рода нервную систему общества, содержит в себе огромную информацию о нем.

Программисты становятся обладателями знания доверенной информации и механизмов ее использования, перед ними во весь рост стоит серьезная этическая проблема — не злоупотреблять этим профессиональным знанием. Необходимо воспитывать людей, работающих с ЭВМ, укрепляя неразрывность знания и умения, способности и нравственности, предпримчивости и морали.

Таким образом, стратегия разрезывания научно-технической революции исходит из одновременного согласованного формирования всех ее направлений, комплексного развития производства. Однако сам процесс автоматизации только тогда будет протекать успешно, когда производство окажется для этого всесторонне

подготовленным. Задачу автоматизации невозможно решить только с помощью автоматических станков, линий, ЭВМ — т.е. современных средств автоматизации. Для этого требуется всесторонний подъем техники, организации производства, переход на качественно новый уровень управления хозяйством, массовая переквалификация рабочих, техников, инженеров в соответствии с требованиями научно-технического прогресса.

## § 2. Основные понятия и определения в системах автоматического регулирования

Правильность технической эксплуатации любого элемента судовой энергетической установки (СЭУ) определяется совокупностью физических величин, которые характеризуют протекающие в нем технологические процессы и называются показателями процесса. Надежная и экономичная работа СЭУ возможна лишь при определенных значениях показателей процесса в отдельных ее элементах.

Рассмотрим процессы в подогревателе топлива котельной установки, показанной на рис. 1, в которой подогрев топлива происходит до заданной температуры за счет скрытой теплоты парообразования греющего пара, высвобождающейся при его конденсации.

Все физические величины можно подразделить на две группы: качественные показатели, характеризующие внутреннее состояние объекта, режимы его работы (температура топлива, положение уровня конденсата греющего пара в корпусе), и количественные

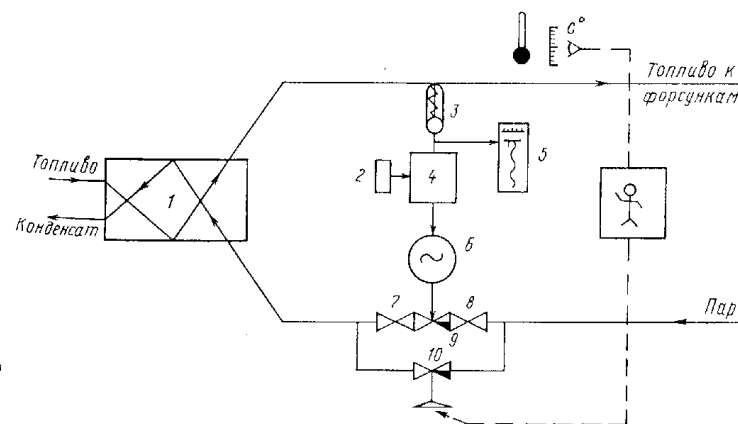


Рис. 1

показатели, характеризующие количество подводимой или отводимой из объекта энергии или среды (расходы топлива и греющего пара).

При изменении количественных показателей (параметров), характеризующих подвод или отвод энергии или среды из объекта, нарушается внутреннее равновесие в объекте, вследствие чего качественные показатели принимают другие значения. Изменение качественных параметров может отрицательно сказаться на работе агрегата — нарушаются экономичность и безопасность его работы. Недостаточная температура подогрева топлива ухудшает качество его распыливания и снижает экономичность котельной установки вследствие роста потерь тепла от химического недожога топлива. Чрезмерно высокий подогрев приводит к закоксовыванию отверстий форсуночных распылителей, что вызывает пульсацию факела горящего топлива и может явиться причиной пожара. При соблюдении материального и энергетического баланса, т.е. равенства подвода и отвода материи и энергии, процесс или состояние элемента СЭУ называется установившимся, или равновесным. Признаком установившегося процесса в подогревателе является неизменность температуры подогреваемого топлива. Нарушение материального и энергетического баланса приведет к изменению величин показателей процесса в результате накопления или уменьшения запаса материи и энергии в элементе. Процесс, при котором материальный и энергетический балансы нарушены, называется неустановившимся, или неравновесным.

Для восстановления заданных значений качественных показателей необходимо воздействовать на количественные параметры и восстановить тем самым нормальный режим работы объекта. В этом большинстве случаев и состоит процесс регулирования работы энергетических агрегатов и механизмов. Если это регулирование осуществляется вручную, то необходимо участие человека-оператора. Кроме того, необходимы измерительные приборы, позволяющие наблюдать за значением качественных параметров, и регулирующие органы (клапаны, задвижки и т.д.), позволяющие оператору изменять количественные параметры, чтобы качественные показатели оставались в допустимых пределах при изменении нагрузки, т.е. при любых изменениях отвода или подвода энергии или среды из объекта. Поясним сказанное на примере регулирования температуры топлива в подогревателе (см. рис. 1).

Человек наблюдает за температурой топлива на выходе из теплообменника (термометр показывает ему значение температуры топлива) и воздействует на паровой клапан 10, изменяя подачу пара в объект, чтобы поддержать температуру топлива в требуемых

пределах при любом количестве подаваемого топлива. Однако такое регулирование будет несовершенным, так как полностью зависит от профессиональной подготовки оператора, его состояния в данный момент, т.е. от субъективных свойств оператора. Чтобы исключить влияние оператора на процесс регулирования, передадим его функции механизмам, и система регулирования становится замкнутой: объект регулирования — чувствительный элемент (датчик) — регулятор — исполнительный механизм — объект. Датчик 3 (термометр сопротивления) передает регулятору 4 сведения о температуре топлива, в регуляторе происходит сравнение данной температуры с заданной 2 и в зависимости от полученной разности выдает сигнал на моторный исполнительный механизм 6, который воздействует на регулирующий орган (клапан 9), изменяя подачу пара в теплообменник, до тех пор, пока температура топлива не будет равна заданной.

Теперь рассмотрим элементы и величины, входящие в систему автоматического регулирования (САР) (см. рис. 1).

1. Объект управления. Элемент СЭУ, в котором происходит процесс, подлежащий управлению или только регулированию, называется соответственно объектом управления (ОУ) или объектом регулирования (ОР) — подогреватель топлива 1.

2. Регулируемая величина. Физическая величина, характеризующая состояние объекта и определяющая действие системы управления или регулирования, — температура топлива после подогревателя.

3. Регулирующая среда. Количественный параметр, посредством которого происходит изменение качественного параметра, — пар (расход пара).

4. Регулирующий орган. Устройство, посредством которого производятся количественные изменения регулирующей среды (клапан 9).

5. Датчик. Измерительное устройство, при помощи которого производится измерение регулируемой величины и преобразование ее в сигнал, удобный для дистанционной передачи (термометр сопротивления 3).

6. Исполнительный механизм (серводвигатель). Механизм, при помощи которого перемещается регулирующий орган под воздействием управляющего сигнала (электромотор 6).

7. Задатчик. Устройство для задания автоматическому регулятору необходимого значения регулируемого параметра 2.

8. Возмущения. Возмущающее воздействие служит причиной нарушения установившегося процесса в объекте регулирования. Задающие воздействия (возмущения) возникают со стороны регулятора в

процессе перенастройки режима работы. Возмущение — всякая причина (воздействия), влияющая на регулируемый параметр, вызывающая его отклонение от заданного значения. Возмущения бывают внутренними и внешними. Воздействия элементов САР друг на друга называются внутренними воздействиями. Связи САР с внешней средой определяют внешние воздействия. Возмущения могут проявляться (задаваться) как мгновенный скачок, периодически действующий, иррегулярного действия (в виде статистических функций от случайных величин).

9. Вторичный прибор. Прибор, на котором производится запись регулируемой величины и прочие показания.

10. Регулятор. Устройство, прибор или их совокупность, задача которых состоит в автоматическом поддержании регулируемого параметра в зависимости от закона функционирования его элементов (регулирующий блок 4). Закон функционирования (регулирования) формируется в блоке 4 и определяет сущность регулятора. Однако совокупность регулятора входят датчик 3, регулирующий блок 4, исполнительный механизм 6 с регулирующим органом 9.

11. Система автоматического регулирования (САР) и система автоматического управления (САУ). Взаимодействующие между собой объект управления и автоматическое управляющее устройство образуют систему автоматического управления. Система управления паровой турбиной, двигателями внутреннего или внешнего сгорания выполняет функции: пуск агрегата, регулирование его параметров, изменение режимов работы, реверс и остановку. Отсюда ясно, что САУ — это более общее понятие по сравнению с САР. В частности, когда задача автоматического управления заключается в поддержании постоянного значения некоторой величины (параметра), говорят об автоматическом регулировании. САУ могут быть замкнутые и разомкнутые. В разомкнутой системе управляющее воздействие вырабатывается на основе информации о величине возмущающих воздействий, характеристиках объекта и цели управления. В таких системах управляющее устройство не получает информации о результатах управления. Такое управление называется жестким. В замкнутой системе управляющее воздействие вырабатывается на основе информации о характеристиках объекта, цели управления. В таких системах осуществлен замкнутый цикл передачи воздействий (система с обратной связью). Значение управляемой величины на выходе объекта влияет на значение управляемой величины на входе объекта. Обратной связью называется подача сигнала с выхода какого-нибудь устройства на его вход. Таким образом, системы автоматического регулирования являются замкнутыми динамическими системами, состоящими из звеньев направленного действия.

12. Понятие "вход — выход" САР. Мы с этим понятием сталкиваемся при анализе САР. Оно может обозначать определенную точку САР и определять величину сигнала, приложенного в данной точке. Под входной величиной следует понимать независимую переменную или причину, под выходной — следствие или зависимую переменную. Для выявления характера влияния звена цепи на протекание процесса регулирования надо знать зависимость выходной величины от входной.

13. Связь между регулирующим воздействием (в месте установки регулирующего органа) и регулируемой величиной (в месте установки измерительного устройства) называется характеристикой управления.

14. Отклонение или рассогласование в САР. При рассмотрении принципа действия САР сталкиваемся с понятием отклонения (рассогласования) регулируемой величины. Отклонение регулируемой величины представляет собой разность между действительным измеренным ее значением и заданным. Обратная разность между заданным и действительными значениями называется ошибкой системы.

### § 3. Основные принципы построения систем регулирования

В существующих приемах построения систем автоматического регулирования различных процессов можно выделить в основном следующие три принципа их построения: регулирование по отклонению параметра от заданного значения; регулирование по причине, вызывающей отклонение параметра от заданного значения (по возмущающему воздействию); комбинированный принцип, сочетающий два предыдущих принципа.

**Принцип регулирования по отклонению.** Выше мы установили, что процесс регулирования складывается из воздействия объекта на регулятор и обратного воздействия регулятора на объект через регулирующий орган. Каким способом регулятор должен получать информацию о состоянии объекта?

Естественнее всего предположить, что регулятор должен изменять регулируемую величину, а вернее — ее отклонение от заданного значения. На этом принципе и был построен регулятор И.И.Ползунова (1765 г.). Данный принцип рассмотрим на примере регулирования уровня воды в резервуаре (рис. 2). При равенстве расхода притоку воды  $Q = Q_0$  в баке будет постоянный первоначальный уровень  $H_0 = \text{const}$ . При изменении нагрузки (расхода воды)  $Q_0$  уровень будет изменяться. Пусть мы уменьшим расход, прикрыв клапан 1. При этом  $Q > Q_0$  и уровень начнет расти на величину  $+\Delta H$ . Чувствительный

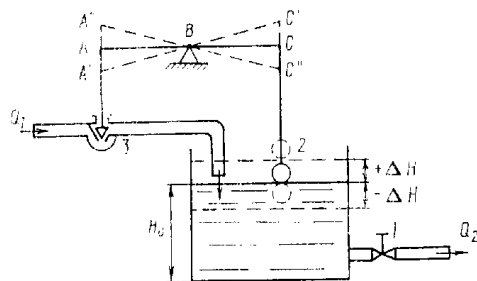


Рис. 2

элемент (поплавок регулятора) 2 переместится вверх на величину  $\Delta H$  и переместит клапан 3 на закрытие на величину  $y = (AB/BC)\Delta H$ , уменьшая приток воды  $Q_1$ . Приток воды уменьшив, уровень воды начнет падать до некоторой величины  $H = H_0 - \Delta H$ , т.е. когда уровень уменьшится на величину  $\Delta H$  относительно первоначального уровня  $H_0$ , регулятор переместится в обратном направлении, увеличивая приток воды  $Q_1$ . И так этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока уровень отклоняется от первоначального значения. Отклонение уровня происходит при воздействии на объект регулирования (бак с водой) возмущений, которые могут быть внутренними и внешними (воздействие окружающей среды). Однако какие бы воздействия ни вызывали изменение уровня, они будут скомпенсированы действием регулятора. Поэтому все регуляторы, которые вызывают перестановку регулирующего органа в зависимости от изменения значений отклонения регулируемой величины, называются регуляторами, основанными на принципе управления по отклонению регулируемой величины.

Достоинство данного принципа регулирования состоит в том, что по каким бы причинам ни произошло изменение регулируемой величины, автоматический регулятор реагирует на данное изменение и возвращает регулируемый параметр к заданному пределу определенной точностью.

Недостатки принципа следующие.

1. В основе действия регулятора заложено свойство, которое обязательно приводит его к работе со статической ошибкой, поэтому он не в состоянии точно поддерживать параметр на заданном уровне, так как система приходит в действие, когда появляется отклонение регулируемой величины. Установившееся положение равновесия по уровню  $H = \text{const}$  наступает, когда  $Q_1 = Q_2$ . Для сохранения этого равенства необходимо, чтобы клапан был открыт

на требуемую величину  $\Delta y = (AB/BC)\Delta H$ , которая пропорциональна определенному отклонению уровня  $\pm \Delta H$  от первоначального положения равновесия  $H_0$ . Ошибка  $\pm \Delta H$  всегда будет существовать в установившемся положении равновесия системы.

2. Регулятору, основанному на этом принципе, присуща некоторая неоперативность в работе — он начинает действовать лишь тогда, когда регулирующая величина уже отклонилась, регулятор не может предвосхитить возможного отклонения регулируемой величины и предупредить его в какой-либо степени, так как система динамически замкнута. Это свойство приводит к ухудшению быстродействия системы управления.

**Принцип регулирования по возмущению.** С целью устранения второго недостатка рассмотренного выше принципа работы регулятора был предложен принцип, в основу которого положена идея измерения не уровня (т.е. следствия возмущения), а самой причины, вызывающей изменение уровня, т.е. изменение нагрузки. Этот принцип получил название «принцип регулирования по возмущению» и впервые был предложен Ж.В.Понселе (1828 г.). Рассмотрим его на том же примере регулирования уровня в резервуаре (рис. 3). В этой системе основным возмущающим воздействием является расход воды из резервуара  $Q_2$ . Поэтому мембрана измеряет перепад давления на дроссельной шайбе, т.е.  $Q_2 = f(\Delta P)$ , пропорциональный расходу жидкости, или нагрузке объекта. При этом перемещение регулирующего органа  $\Delta y = a_2 \Delta Q$  (где  $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ ) будет пропорционально изменению расхода из резервуара. Так как уровень является функцией притока и расхода жидкости  $H = f(\Delta Q)$ , то он начнет изменяться и будет изменяться до тех пор, пока  $\Delta Q$  не станет равным нулю, т.е.  $Q_1 = Q_2$ . В этом случае перемещение

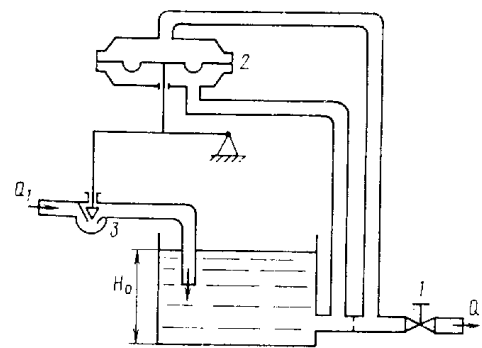


Рис. 3



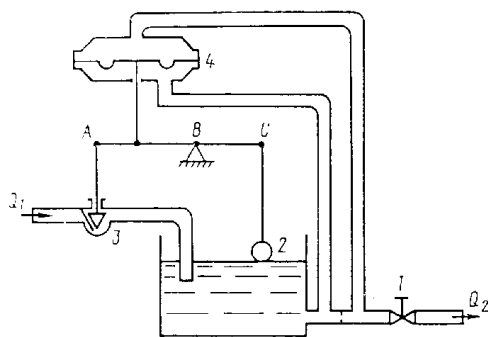


Рис. 4

регулирующего органа прекратится ( $\Delta y = 0$ ), а уровень займет новое установившееся положение равновесия  $H = \text{const}$ . Как было сказано выше, на систему действуют внутренние и внешние возмущающие воздействия, которые измерить невозможно. Неконтролируемые системой регулирования возмущающие воздействия приведут к непрерывному изменению уровня.

Достоинство принципа регулирования по возмущению состоит в том, что система регулирования разомкнута и имеется возможность повысить ее быстродействие, исключив из процесса регулирования динамические свойства объекта (его инерционность).

Недостатки принципа следующие: неизмеряемые возмущающие воздействия, действующие на объект регулирования, приводят к непрерывному изменению уровня; данный принцип регулирования не может быть применен с неустойчивыми объектами.

Чтобы устранить недостатки принципа регулирования по возмущению и сохранить его достоинства, был предложен комбинированный принцип регулирования, который показан на рис. 4. При комбинированном принципе регулирования контур регулирования по возмущению выступает как корректирующий контур по основным возмущающим воздействиям.

Анализ и сопоставление рассмотренных принципов регулирования. Принципы управления по возмущению и по отклонению различны, и эти различия сводятся к следующему.

1. Принцип управления по отклонению всегда приводит к замкнутой системе, так как измеряется такая координата, на которую оказывается управляющее воздействие — отклонение регулируемой величины. Принцип по возмущению реализуется в разомкнутой системе, так как в данном случае измеряется величина, отличная

от той, которая управляется (измеряется возмущающее воздействие — расход жидкости, а управлению подлежит управляемая величина — уровень). Принцип управления по отклонению позволяет реализовать универсальный кибернетический способ управления — по отрицательной обратной связи.

2. В замкнутой системе регулирования по отклонению единственная измерительная цепь, определяющая отклонение регулируемой величины, которой достаточно для осуществления целей управления при любых возмущениях. В отличие от этого при использовании принципа управления по возмущению измеряемая цепь по данному возмущению позволяет регулятору только на него и реагировать, поэтому при воздействии других возмущений потребуются ввести в систему специальное измерительное устройство для каждого из возмущений, что практически невозможно.

3. Вследствие замкнутости системы, основанной на принципе управления по отклонению, система способна самостоятельно компенсировать износ своих элементов. Если характеристики элементов меняются, то это служит дополнительным возмущением и приводит к дополнительному отклонению управляемой величины, которое автоматически учитывается и устраняется системой. Этим свойством не обладает разомкнутая система.

4. Принцип управления по отклонению, как уже отмечалось, предполагает необходимым возникновение в процессе работы отклонений управляемой величины от заданного значения. В отличие от этого регулятор по возмущению измеряет причину будущего отклонения регулируемой величины, что открывает возможности предотвращения возникновения отклонений.

#### § 4. Основные свойства систем автоматического управления

На рис. 5, а показана система автоматического регулирования температуры топлива в топливном подогревателе, работающая по принципу отклонения.

Температура в подогревателе топлива ПТ измеряется термометром сопротивления ТС с мостом М, питающимся переменным током от сети. Сигнал с моста подается на электронный усилитель ЭУ и релейный блок РБ, а дальше на моторный исполнительный механизм ИМ.

Когда температура топлива соответствует заданию моста и находится в равновесии, то на вход усилителя сигнал не подается и вал электродвигателя неподвижен. При отклонении температуры от задания на входе электронного усилителя появляется напряжение, фаза (направление) которого зависит от направления нарушения

УЧЕБНЫЙ ФОНД

Научная библиотека

Средней государственной  
морской академии

И.И.В. №

м/экз.

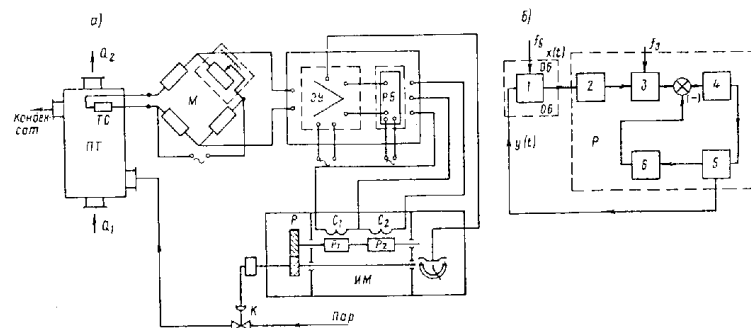


Рис. 5

равновесия моста в зависимости от изменения температуры. При изменении знака нарушения равновесия моста на обратный фаз напряжения меняется на  $\pi$  рад ( $180^\circ$ ). В зависимости от этого релейным блоком включаются под ток обмотки статора  $C_1$  или моторного исполнительного механизма МИМ. Вследствие этого выходной вал редуктора  $P$  совершает угловое перемещение в одну или другую сторону, клапан  $K$  тоже перемещается в соответствующем направлении, чем и поддерживается температура подогревателя на заданном уровне. Если требуется регулировать на постоянном уровне другое значение температуры, то это осуществляется посредством ручной настройки задания.

Таким образом, описанная система автоматического регулирования приходит в действие только тогда, когда температура отклоняется от задания, т.е. используется принцип отклонения параметра от заданного значения. Данная система представляет собой замкнутую цепь звеньев (цепь передачи регулирующего воздействия). При этом распространение регулирующего воздействия передается последовательно от звена к звену, меняя свою физическую природу. Распространение воздействия происходит в одном направлении, которое называется направлением распространения воздействия. Звенья, составляющие регулирующий контур, обладают свойством пропускать регулирующие воздействия только в одном направлении.

В замкнутой САР очень важное свойство — это свойство знака регулирующего воздействия. Для того чтобы процесс регулирования достиг своей цели, необходимо вызвать регулирующее воздействие такого знака, которое повлекло бы за собой изменение регулируемой величины, противоположное по знаку изменению, вызванному возмущающим воздействием.

Наконец, регулирование в САР должно происходить систематически, т.е. регулятор должен все время выполнять свои функции.

Итак, любая САР характеризуется следующими основными свойствами:

звенья системы регулирования образуют замкнутую цепь — регулирующий контур;

регулирующее воздействие передается вдоль контура в одном определенном направлении;

воздействия в системе должны быть согласованы так, чтобы сигнал в любой ее точке, пройдя через регулирующий контур, возвращался в эту точку с обратным знаком;

звенья системы должны выполнять свои функции все время, пока имеет место отклонение регулируемой величины от заданного значения.

Рассмотренные выше основные свойства САР не говорят о форме ее технического выполнения. Мы пока не касаемся физических принципов (механических, электронных, гидравлических и т.д.), на которых построено взаимодействие элементов и технических устройств системы. Представим себе, что отдельные звенья системы пока недоступны для нас и мы не можем выяснить, какова их конструкция, а можем лишь определить их величины на входе и выходе.

Графическое изображение системы автоматического регулирования позволяет отвлечься от конкретной физической природы ее элементов, но при этом дает наглядное представление о ней. Схематическое изображение (обычно в виде прямоугольников) отдельных элементов системы и воздействий их друг на друга (в виде стрелок), а также воздействий, получаемых системой из внешней среды ее функционирования, называют структурной схемой системы. Степень детализации отдельных элементов системы, а также сам принцип выделения из системы отдельных ее элементов могут быть различными.

Структурная схема САР, показанной на рис. 5, а, приведена на рис. 5, б, где 1 — объект регулирования; 2 — термометр сопротивления; 3 — мост; 4 — усилитель с релейным блоком; 5 — моторный исполнительный элемент; 6 — реостат обратной связи. Возмущающие  $f_s$  и задающие  $f_z$  воздействия приходят в контур извне. После этого становится ясным, что если бы нужно было отразить только принцип действия САР, то нет необходимости изображать ее в таком виде, как показано на рис. 5, а, а достаточно составить ее структурную схему, которая также с достаточной точностью раскрывает ее построение и принцип действия. Всякая система управления в наиболее укрупненном виде должна состоять из двух

основных элементов: управляемого объекта (в котором протекает подлежащий управлению процесс) и регулятора (осуществляющего функции управляющего этим процессом). Простейшая функциональная схема системы регулирования показана на рис. 5, б (пунктиром). Здесь регулятор  $P$ , получая информацию о цели регулирования в виде изменяющегося во времени  $t$  сигнала задания  $f_z(t)$ , формирует регулирующие воздействия  $u(t)$  на объект регулирования ОБ таким образом, чтобы управляемая величина  $x(t)$  менялась соответствии с изменением  $f_z(t)$ .

## § 5. Классификация систем автоматического регулирования

На практике задача управления расчленяется на несколько взаимосвязанных. Как правило, из общей задачи управления выделяется задача устранения (или сведения к допустимому минимуму) вредного влияния на достижение цели управления действующих на объект контролируемых возмущений, а также неконтролируемых погрешностей в задании модели объекта, т.е. задача, которая в структуре замкнутой системы управления решается на основе рабочей информации, получаемой контроллером по каналу обратной связи. Это относительно самостоятельная часть задачи (как уже ранее отмечалось) получила название задачи регулирования объекта, а часть системы управления, выполняющая эту задачу, — подсистемы регулирования.

В результате подобной декомпозиции задачи управления контроллер расчленяется на два соподчиненных блока: регулирующий, осуществляющий функции регулирования (блок называется автоматическим регулятором), и командный, вырабатывающий командное воздействие на регулятор таким образом, чтобы была достигнута цель управления.

Структурная система управления в этом случае приобретает вид, показанный на рис. 6. Командное воздействие  $u(t)$ , вырабатываемое командным блоком КБ, подается на вход подсистемы регулирования (на схеме ограничена штриховой линией), где на основании

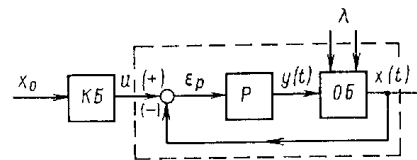


Рис. 6

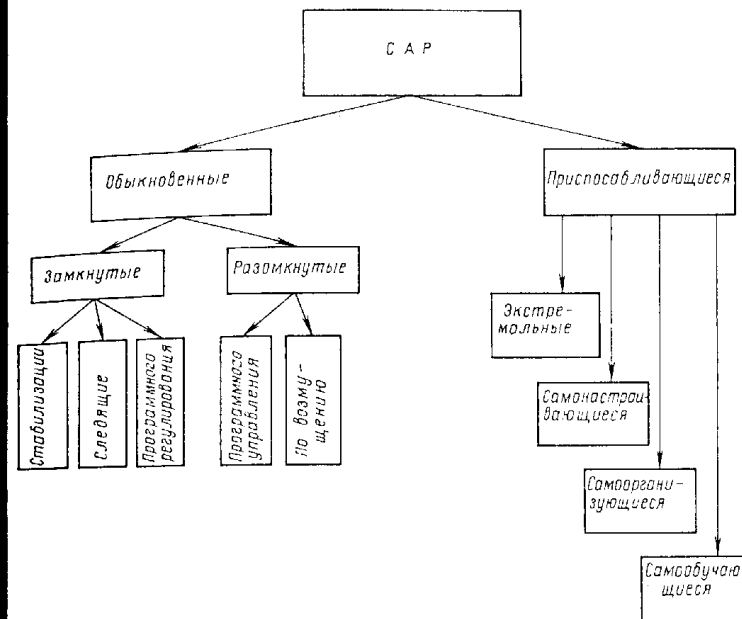


Рис. 7

выявленного отклонения управляемой величины от командного воздействия  $\epsilon_p(t) = u(t) - x(t)$  регулятор формирует управляющее воздействие  $u(t)$ . Управление, опосредствованное через подсистему регулирования, состоит в том, что отклонения управляемой величины от ее заданного значения, вызванные возмущениями и другими неучтенными факторами, достаточно эффективно устраняются регулятором. Поэтому такую систему управления можно рассматривать как систему управления объектом без возмущений, функции которого теперь выполняет подсистема регулирования в целом.

[На рис. 7 приведена классификация систем автоматического регулирования, которая ведется по функциональным признакам, определяющим взаимосвязь между переменными и характер преобразования сигналов при их прохождении в системе. Все системы можно подразделить на обыкновенные и приспосабливающиеся САР.

Приспосабливающиеся — это такие системы, которые обладают способностью приспосабливаться к изменяющимся условиям внешней среды.]

Они являются оптимальными. В реальных системах управления технологическими процессами цель управления практически никогда не выполняется точно. Поэтому вводится некоторый показатель качества функционирования системы регулирования, который численно характеризует степень достижения системы поставленной перед ней цели. В первую очередь качество регулирования определяется ошибкой регулирования  $\epsilon_p(t) = x_0 - x(t)$ , т.е. отклонением управляемой величины от ее желаемого значения. Так как ошибка регулирования в общем случае является функцией времени, т.е. принимает различные значения в различные моменты времени, показатель качества управления должен представлять собой некоторый функционал от ошибки регулирования  $F[\epsilon_p(t)]$ .

Поэтому системе управления, обеспечивающую в данных конкретных условиях наименьшее возможное значение этого функционала

$$\{F[\epsilon_p(t)] \rightarrow \min,$$

называют оптимальной.

Если нам необходимо, чтобы заданный показатель качества функционирования объекта регулирования принимал наибольшее или наименьшее из возможных значений, то САР, выполняющая данные функции, будет экстремальной:

$$Q_{об}[x_0, x(t), \lambda(t)] \rightarrow \text{extr},$$

т.е. экстремальная система регулирования должна самостоятельно формировать задающее воздействие так, чтобы выполнялось условие (2). Для этого в систему регулирования вводят блок адаптации (рис. 8), который по характеру изменения регулируемого параметра будет формировать функционал (1), меняя в процессе поиска задающее воздействие САР  $x_0$ , воздействуя на командный блок.

В самонастраивающейся системе блок адаптации по характеру изменения регулируемого параметра будет формировать функционал (1), меняя в процессе поиска параметры регулирующего устройства (см. рис. 8).

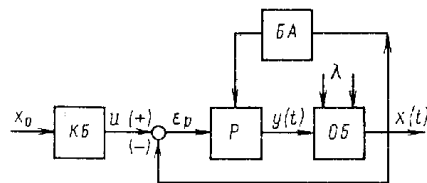


Рис. 8

В самоорганизующейся системе блок адаптации по характеру изменения регулируемого параметра будет формировать функционал (1), меняя в процессе поиска структуру регулирующего устройства (системы с переменной структурой).

Самообучающаяся система постоянно совершенствует алгоритм предписания, определяющее содержание и последовательность операций, переводящих исходные данные в исполнительный результат) своего действия, анализируя в течение некоторого промежутка времени опыт управления объектом и приводя показатель (2) к области его допустимых или экстремальных значений.

Ряд систем, которые не вошли в указанные группы как типовые, обладают тем не менее рядом особенностей и нашли широкое применение в тепловой и судовой энергетике.

Неполнота рабочей информации о состоянии объекта в рассмотренных системах стабилизации обусловлена тем, что в этих структурах регулятор контролирует лишь конечный эффект действия возмущений на объект — вызванное этими возмущениями нежелательное отклонение управляемой величины. В течение промежутка времени между проявлением какого-либо возмущения и началом вызванного этим возмущением отклонения регулируемой величины регулятор бездействует, несмотря на то что фактическое состояние объекта уже меняется. Неполнота рабочей информации может быть в значительной мере устранена, если осуществить непосредственный оперативный контроль возмущений.

Структура системы, осуществляющей контроль возмущений, приведена на рис. 9, где регулятор получает добавочную информацию об изменении возмущения  $\lambda(t)$ , соответствующим образом преобразованную в блоке компенсации возмущения KB. Такие системы получили название систем регулирования с компенсацией возмущений (комбинированный принцип построения систем регулирования).

Вместо непосредственного контроля возмущений можно осуществить контроль соответствующим образом подобранных вспомогательных переменных, характеризующих текущие изменения состояния объекта, вызванные действием этих возмущений. На рис. 10 приведена структурная схема системы, в которой регулирование осуществляется двумя соподчиненными регуляторами — главным РГ

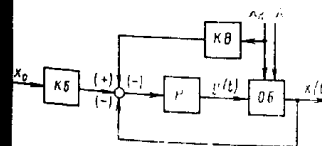


Рис. 9

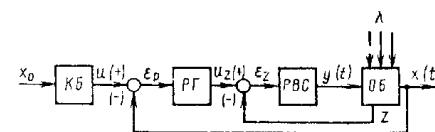


Рис. 10

и вспомогательным РВС (вспомогательных регуляторов может быть несколько). Главный регулятор, контролируя основную регулируемую величину  $x(t)$ , формирует командное воздействие  $u_1(t)$  для второго, который на основании контроля отклонения вспомогательной переменной состояния объекта  $z(t)$  от  $u_1(t)$  вырабатывает регулирующее воздействие  $y(t)$ .

## ГЛАВА II. ОБЪЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ ХАРАКТЕРИСТИК

### § 6. Основные свойства объектов управления

Как видно из функциональной структурной схемы регулирования (см. рис. 5), САР можно разделить на два самостоятельных функциональных блока — объект регулирования и регулятор. В связи с этим с целью изучения свойств системы регулирования целесообразно рассмотреть свойства объектов регулирования и регуляторов в отдельности. Каждый объект регулирования обладает тремя свойствами: емкостью объекта (аккумулирующая способность), самовыравниванием объекта и запаздыванием.

**Емкость объекта.** Рабочий процесс всякого объекта регулирования связан с притоком, расходом, преобразованием некоторой материальной среды или энергии. Эта среда называется регулируемой. Многие объекты обладают способностью аккумулировать рабочую среду, запасать ее внутри объекта. Поэтому запас энергии, накопленный объектом регулирования, или запас накопленного в нем вещества называется емкостью объекта. Величина емкости объекта определяется его геометрическими размерами. Объекты регулирования могут быть одноемкостными и многоемкостными. Обычно вместо понятия емкости пользуются так называемым коэффициентом емкости, который представляет собой отношение емкости к соответствующему значению регулируемой величины  $c = Q/x$ , где  $Q$  — емкость объекта;  $x$  — регулируемый параметр.

Величина  $c$  может быть переменной или постоянной и определяется количеством вещества или энергии, которое необходимо подвести объекту для изменения регулируемой величины на единичное измерение. Для уяснения физического смысла коэффициента емкости обратимся к примеру (рис. 11). В резервуаре регулируемой величиной является уровень воды  $H$ . Когда приток  $Q_1$  равен расходу  $Q_2$ , уровень остается постоянным. Для данного случая емкость равна  $Q = HF$ , поэтому коэффициент емкости  $c = (HF)/H = F$  определяется площадью резервуара (площадь поперечного сечения резервуара).

В установившемся состоянии равновесия объекта  $Q_0 = Q_2 = Q_1$  и уровень  $H = H_0$ . В неустановившемся состоянии, когда  $Q_1 \neq Q_2$ ,

за время  $dt$  количество воды в резервуаре увеличится на величину  $\Delta Q$ , а уровень — на  $dH$ , и в соответствии с определением емкости объекта уравнение, характеризующее данное состояние, будет иметь вид

$$F dH = \Delta Q = (Q_1 - Q_2) dt.$$

Это уравнение, характеризующее скорость изменения уровня воды в резервуаре, можно записать так:

$$F \frac{dH}{dt} = \Delta Q \quad \text{или} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{1}{F} \Delta Q,$$

где  $H$  — уровень воды в резервуаре, м;  $F$  — площадь поперечного сечения, м<sup>2</sup>;  $Q$  — приращение воды в резервуаре, м<sup>3</sup>/с.

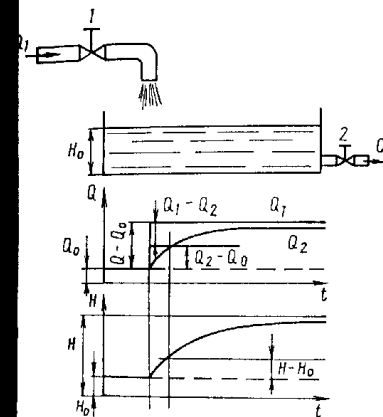


Рис. 11

В полученном выражении видно, что скорость изменения уровня (регулируемой величины) обратно пропорциональна коэффициенту емкости. Коэффициент емкости определяет чувствительность объекта к возмущению. Отсюда: чем больше площадь поперечного сечения резервуара, тем больше коэффициент емкости, тем меньше его чувствительность к возмущениям, т.е. меньше скорость изменения уровня при единичном возмущающем воздействии.

**Самовыравнивание объекта.** Самовыравниванием называется такое свойство объекта, вследствие которого возникшее несоответствие между притоком и расходом рабочей среды самостоятельно, без участия регулятора, стремится к нулю, а регулируемая величина — к новому установившемуся значению. Объект обладает свойством самовыравнивания, когда приток или расход рабочей среды при бездействии регулятора зависит от регулируемой величины.

Пусть приток и расход являются функциями регулируемой величины  $H$  (рис. 12), т.е.  $Q_1 = f(H)$  и  $Q_2 = g(H)$ . Получаем:  $Q_1 - Q_2 = \Delta Q$ . Продифференцируем выражение по  $H$  и запишем в виде

$$\frac{\partial Q_1}{\partial H} - \frac{\partial Q_2}{\partial H} = \pm \left| \frac{\partial \Delta Q}{\partial H} \right|.$$

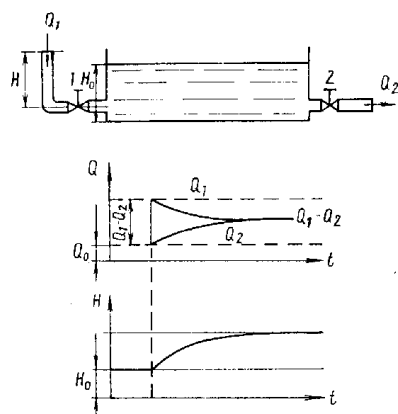


Рис. 12

Введя затем базисные значения  $Q_0$  и  $H_0$ , запишем выражение в виде

$$\frac{\partial Q_1}{\partial H} - \frac{\partial Q_2}{\partial H} = \pm \frac{Q_0}{H_0} \left| \frac{\partial \Delta q}{\partial h} \right|.$$

Знак "—" указывает, что  $\Delta Q$  убывает при увеличении  $H$ .

Рассмотрим 3 случая зависимости  $\Delta q$  от  $h$ .

1.  $\Delta q$  не зависит от  $h$ , т.е. самовыравнивание в объекте отсутствует. В этом случае  $\partial \Delta q / (\partial h) = 0$  и  $Q_1 - Q_2 = \text{const}$ . Это значит, что разность между притоком  $Q_1$  и расходом  $Q_2$  не зависит от регулируемой величины и все время остается постоянной. Так как мы имеем случай регулирования жидкости в резервуаре (рис. 13), то при увеличении притока жидкости ( $Q_1 > Q_2$ ) уровень будет неограниченно расти; при уменьшении притока жидкости ( $Q_1 < Q_2$ ) уровень будет уменьшаться.

Физическая реализация такого объекта показана на рис. 13, где на стороне расхода жидкости поставлен насос, который обеспечивает постоянный расход  $Q_2$  при заданных оборотах насоса независимо от изменения уровня  $H$ . В этом случае  $Q_1$  и  $Q_2$  не зависят от уровня.

2.  $\Delta q$  зависит от  $h$ , но  $\partial \Delta q / (\partial h) < 0$ . Для упрощения представим, что  $-\partial \Delta q / \partial h = \rho$ , где  $\rho > 0$ , тогда можно записать:

$$Q_1 - Q_2 = (Q_1 - Q_2)_0 - \rho \frac{Q_0}{H_0} (H - H_0).$$

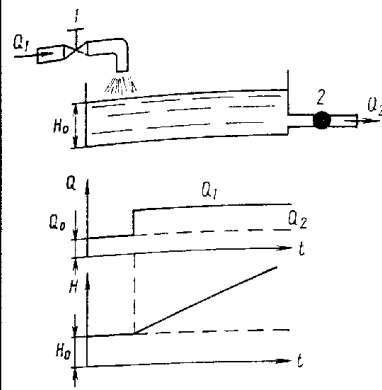


Рис. 13

Нулевой индекс означает первоначальное установившееся значение параметров в объекте. При открытии клапана 1 (см. рис. 11) увеличиваем приток жидкости  $Q_1$ , что приведет к изменению уровня  $H$ . Из выражения (3) видим, что разность между притоком и расходом будет уменьшаться по мере роста  $H$ , так как второе слагаемое в уравнении (3) растет. По мере роста  $H$  разность  $Q_1 - Q_2$  уменьшается, и наступает момент, когда она станет равной нулю; в это время уровень  $H$  займет новое установившееся положение равновесия. Такое самовыравнивание называется положительным.

Здесь новое положение регулируемой величины может быть достигнуто без помощи регулятора.

3.  $\Delta q$  зависит от  $h$ , но  $\partial \Delta q / (\partial h) > 0$ , при  $\rho < 0$ . Тогда аналогично уравнению (3) можно записать, что

$$Q_1 - Q_2 = (Q_1 - Q_2)_0 + \rho \frac{Q_0}{H_0} (H - H_0).$$

В этом случае с изменением энергии на притоке или расходе с ростом регулируемого параметра разность  $Q_1 - Q_2$  будет непрерывно расти. Это значит, что нового положения равновесия достигнуть нельзя без помощи регулятора.

Из изложенного следует, что производная  $\partial \Delta q / (\partial h)$  характеризует процесс самовыравнивания, а величина  $\partial \Delta q / (\partial h) = \rho$  называется степенью самовыравнивания.

Для объекта, обладающего самовыравниванием, у которого  $Q_1$  и  $Q_2$  являются функциями открытия клапанов 1 и 2 (см. рис. 12), можно допустить, что процентное отклонение клапанов  $m_1$  или  $m_2$  будет прямо пропорционально процентному отклонению регулируемого параметра  $H$  от первичного значения  $H_0$ , т.е.  $m = \rho h$ , где  $\rho = m/h$ ;  $m$  — отклонение клапана, %;  $h$  — отклонение уровня, %. Следовательно, чем меньше диапазон изменения значения регулируемой величины  $h$ , тем больше  $\rho$  и тем больше облегчается работа регулятора. Если  $\rho$  близок к единице, то можно обойтись без регулятора.

Таким образом, при положительном самовыравнивании ( $\rho > 0$ ) работа регулятора облегчается совпадающим действием самовыравнивания, причем, если степень самовыравнивания велика, можно

обойтись без регулятора; при отсутствии самовыравнивания ( $\rho = 0$ ) особенно при отрицательном самовыравнивании ( $\rho < 0$ ) обеспечить устойчивую работу объекта без регулятора невозможно.

Для одноемкостного объекта, обладающего положительным самовыравниванием (см. рис. 12), в установившемся состоянии равновесия подвод воды  $Q_0$  (м<sup>3</sup>/с) в зависимости от положения уровня  $H_0$  и открытия клапана 1, равного  $m_{10}$ , определяется формуле

$$Q_{10} = f_{10} \xi \sqrt{2g(H - H_0) / \gamma},$$

где  $f_{10}$  — площадь проходного сечения клапана 1, соответствующая  $m_{10}$  (м<sup>2</sup>);  $\xi$  — коэффициент расхода (безразмерная величина, определяемая экспериментально и равная отношению действительного расхода к теоретическому);  $g$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $H$  — постоянное положение уровня перед клапаном (постоянный подпор), кг/м<sup>2</sup>;  $H_0$  — давление после клапана создаваемое гидравлическим столбом жидкости  $H_0$ , кг/м<sup>2</sup>;  $\gamma$  — удельный вес воды.

Соответственно отвод воды из резервуара

$$Q_{20} = f_{20} \xi \sqrt{2gH_0 / \gamma}.$$

Используя уравнения (4) и (5), построим семейство характеристик подачи и отвода рабочей среды, определяющих зависимость положения уровня от количества подводимой и отводимой воды (рис. 14), где  $\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2$ .

Для оценки самовыравнивания (устойчивости) объекта заменим нелинейные функции  $Q_1 = f(H)$  и  $Q_2 = f(H)$  линейными  $Q_1 = f(H)$  и  $Q_2 = f(H)$ , для чего проведем касательные в точке  $0_1$  установившегося состояния.

Из рис. 14 видно, что  $\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \Delta H \operatorname{tg} \alpha' + \Delta H \operatorname{tg} \beta' - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \Delta H$ , где  $\alpha'$ ,  $\beta'$  и  $\alpha$ ,  $\beta$  — углы наклона линейных характеристик  $Q_1$  и  $Q_2$  к вертикали, проведенной через общую точку  $0_1$ , и к оси ординат. В этом случае (см. рис. 14)  $\Delta Q_1 < 0$  (уменьшая),  $\Delta Q_2 > 0$  (увеличивая). При этом степень самовыравнивания будет иметь вид

$$\rho = \frac{\Delta g'}{\Delta h} = \frac{H_0}{Q_0} \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} - \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right) = (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha).$$

В этом случае  $\rho > 0$  (объект обладает положительным самовыравниванием). В некоторых источниках [3] величину степени самовыравнивания интерпретируют как фактор устойчивости ( $\rho = 1$ ) по аналогии с понятием устойчивости автоматических систем

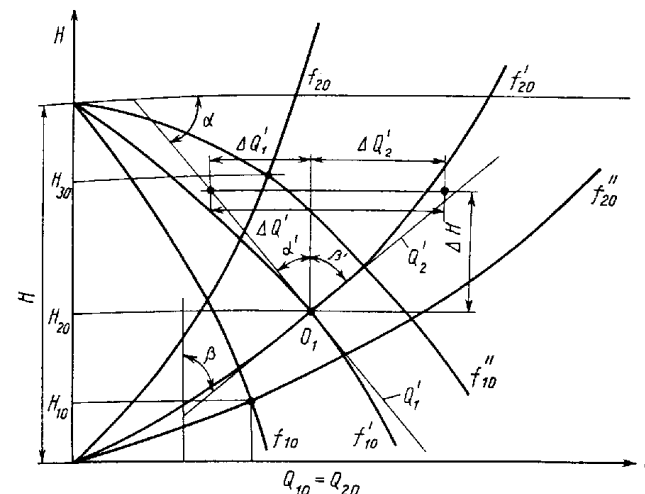


Рис. 14

регулирования. На рис. 12 показан объект, который обладает самовыравниванием на притоке и расходе, а на рис. 14 — только на расходе. Если объект не обладает самовыравниванием (см. рис. 13), то в этом случае  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$  и  $\rho = 0$ . Такой объект получил название нейтрального.

На приведенных примерах нельзя объяснить физическую сущность процесса с отрицательным самовыравниванием. Однако существуют объекты и некоторые режимы, характеризующиеся отрицательным самовыравниванием. Например, работа центробежных компрессоров в газотурбинных установках на нормальных эксплуатационных режимах обладает положительным самовыравниванием, в режиме помпажа — отрицательным самовыравниванием; воздушный турбокомпрессор с приводом от синхронного электродвигателя, работающий на ресивер, при малых нагрузках обладает отрицательным самовыравниванием.

Рассмотрим условия работы конденсатного и питательного центробежных насосов на магистраль. На рис. 15 показаны условия работы центробежного насоса, которые характеризуются изменением коэффициента самовыравнивания системы "насос — магистраль" [4]. Обозначим через  $dE$  разность между энергией, потребляемой магистралью, и энергией, сообщаемой жидкости насосом. Очевидно, что при положительных значениях этой разности движение потока жидкости будет замедленным, а при отрицательном — ускоренным:

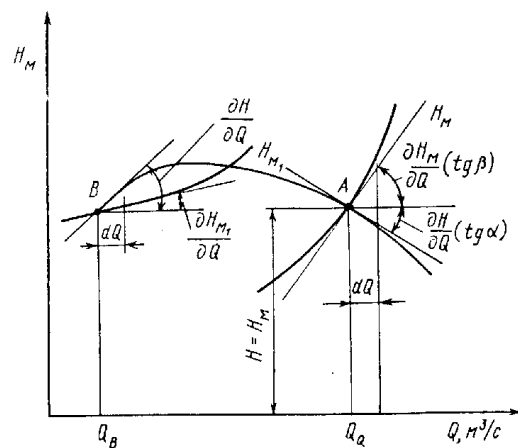


Рис. 15

$(1/\gamma)dE = Q_M H_M - QH$ . Продифференцировав уравнение по  $Q$  и разделив на  $Q$ , получим:

$$\frac{1}{Q_0 \gamma} \frac{dE}{dQ} = \frac{\partial H_M}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial Q},$$

где  $H, H_M$  — мгновенные значения напора, развиваемые насосом и поглощаемые магистралью. Знак производной  $dE/(dQ)$  определяется по коэффициентам  $\partial H/(\partial Q)$  и  $\partial H_M/(\partial Q)$  наклона касательных к характеристикам насоса ( $\text{tg} \alpha$ ) и магистрали ( $\text{tg} \beta$ ).

Система обладает положительным самовыравниванием и устойчива, если  $dE/dt > 0$  или  $\partial H_M/(\partial Q) - \partial H/(\partial Q) = (\text{tg} \beta - \text{tg} \alpha) > 0$ , т.е.  $\rho > 0$ . Это условие выполняется в точке А (см. рис. 15). В этом случае увеличение подачи насоса сопровождается замедлением потока жидкости, а уменьшение — его ускорением. Нарушение в системе равновесия восстанавливается независимо от знака возмущения.

В точке пересечения В изменения характеристики насоса и характеристики трубопровода  $H_M$  таковы, что оба коэффициента наклона положительные, но  $\partial H/\partial Q$  больше  $\partial H_M/\partial Q$ . Поэтому условие  $\rho > 0$  не выполняется и  $\rho$  становится меньше нуля. Работа насоса становится неустойчивой. Для центробежного насоса таким участком может быть зона от нулевой подачи до точки максимума характеристики насоса. Следствием неустойчивой работы является помпаж, который характеризуется резкими изменениями подачи и напора насоса и гидравлическими ударами вследствие разрыва сплошности потока, когда ускорение жидкости опережает разрыв

сопротивления магистрали. Помпаж недопустим по соображениям надежности всей системы.

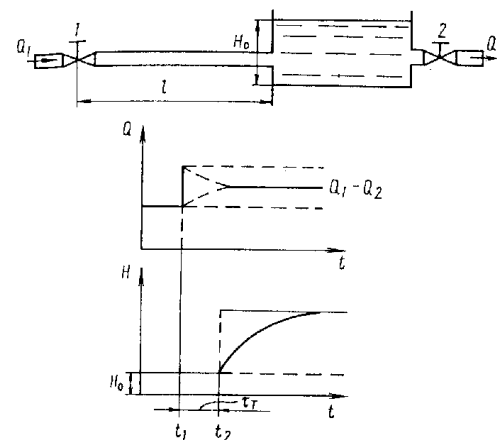


Рис. 16

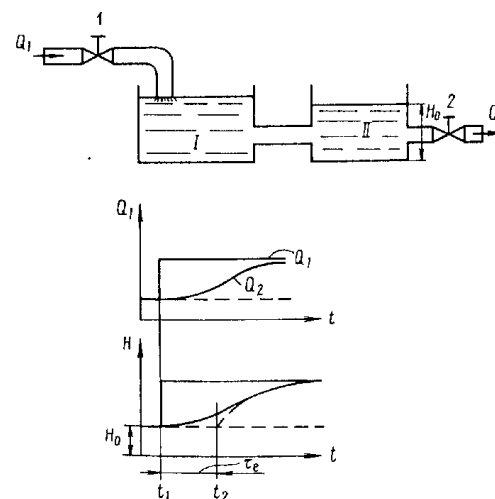


Рис. 17



Запаздывание объекта регулирования — это время с момента нанесения возмущения до момента начала изменения регулируемого параметра. Запаздывание в объекте можно подразделить на чистое (транспортное) и емкостное. На рис. 16 показано, как изменяется уровень в резервуаре при нанесении возмущения открытием клапана 1, который находится на расстоянии  $l$  от объекта. Величина чистого (транспортного) запаздывания будет характеризоваться временем за которое фронт жидкости от клапана достигнет резервуара. Оно будет равно  $l/a$ , где  $a$  — скорость течения жидкости в трубопроводе.

На рис. 17 показан характер изменения уровня  $H$  во второй емкости. При этом мы рассматривали уровень во второй емкости регулируемый параметр. Возмущение наносим открытием клапана 1. Пока данное возмущение достигнет второго резервуара и в нем начнет изменяться уровень, пройдет некоторое время, равное времени  $\tau_e$ , которое будет определяться параметрами первой емкости. Это запаздывание называется емкостным. Полное запаздывание объекта  $\tau_z = \tau_r + \tau_e$ .

## § 7. Методика вывода дифференциального уравнения объектов управления

Основные методологические положения теории автоматического управления, изначально изложенные в классических работах И.А.Вышнеградского и Д.Максвелла, могут быть сформулированы следующим образом [1]:

поведение объекта и регулятора (контроллера) в процессе регулирования (управления) следует рассматривать в неразрывной связи, ибо они образуют единую систему. Это положение отражает необходимость системного подхода к решению задач управления;

при изучении поведения систем управления не следует ограничиваться рассмотрением только их статических (установившихся) режимов — такие режимы являются частным случаем более общих неустановившихся (динамических) режимов. В связи с этим методическим аппаратом изучения систем управления должен быть дополнен аппарат дифференциальных уравнений;

дифференциальные уравнения объекта и контроллера являются математической записью их математических моделей. Поскольку среди всего многообразия видов дифференциальных уравнений общие методы решения имеют лишь линейные дифференциальные уравнения, при построении моделей объекта и регулятора следует всегда, когда это только возможно, стремиться к составлению линейных математических моделей (т.е. линейных дифференциальных уравнений).

При выводе дифференциального уравнения объекта или любого звена системы регулирования должны выполняться следующие этапы.

1. Составляется уравнение материального или энергетического баланса, характеризующее состояние равновесия (установившийся режим работы).

2. Записывается уравнение возмущенного состояния (при нанесении возмущения после имевшегося состояния равновесия).

3. Из второго уравнения (см. п. 2) вычитаем первое (см. п. 1) и получаем дифференциальное уравнение движения объекта или любого элемента САУ.

Методику вывода дифференциального уравнения рассмотрим на примере одноемкостного объекта с самовыравниванием (см. рис. 12). Скорость измерения регулируемого параметра в этом объекте характеризуется уравнением вида

$$dH/(dt) = (1/F)\Delta Q, \quad (6)$$

где  $1/F$  — коэффициент чувствительности регулируемого параметра к возмущению.

Полученное уравнение называется обобщенным уравнением, ибо оно справедливо для любого объекта или звена с различной физической природой. Если объект был бы теплообменником, а регулируемая величина — температура, то  $F$  — это теплоемкость,  $\Delta Q$  — тепловой поток. Если бы мы рассматривали поступательное движение тела, то  $H$  — линейная скорость движения,  $F$  — масса, а  $\Delta Q$  — сила, приложенная к телу. Как видно из уравнения (6), необходимым и достаточным условием постоянства выходной координаты (уровня) во времени является равенство нулю входной, т.е. при  $\Delta Q = 0$ :  $dH/(dt) = 0$  и  $H = H_0 = \text{const}$ . Это условие характеризует установившийся режим работы объекта (индекс 0). В общем случае установившийся поток энергии или вещества равен разности потоков при поступлении  $Q_1$  и при потреблении  $Q_2$ . Один из этих потоков (обычно  $Q_2$ ) является нагрузкой объекта. Таким образом, на уровень жидкости влияет разность поступающей и вытекающей жидкости. Этот результирующий количественный показатель режима объекта является результирующим воздействием

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2. \quad (7)$$

Следовательно, при установившемся режиме, когда результирующее воздействие равно нулю,

$$H_0 = \text{const}; \Delta Q = Q_{10} - Q_{20} = 0; Q_{10} = Q_{20} = Q_0. \quad (8)$$

Воздействие на процесс может быть приложено на стороне поступления энергии или вещества в объект или на стороне потребления. Воздействие на процесс может быть управляющим или возмущающим.

Управляющее воздействие порождается операциями управления, оно стремится приблизить процесс к заданному режиму работы. Возмущение, наоборот, стремится удалить процесс от заданного значения показателей режима и вывести его из установившегося режима. Поэтому управляющие воздействия направлены в сторону компенсации влияния возмущений на показатели режима. Возмущения, как правило, не могут быть предупреждены, они не связаны с управлением процессом и порождаются внутренними или внешними факторами (изменениями нагрузки).

Рассмотрим поведение объекта, когда управляющего воздействия (от регулятора) нет, т.е. когда это возмущение не компенсируется управлением процесса. Будем считать, что возмущение приложено к входу объекта (т.е.  $\Delta Q = \Delta Q_1$ ). При этом мгновенное значение количества жидкости на входе составляет  $Q_1 = Q_{10} + \Delta Q_1$ , а на выходе  $Q_2 = Q_{20}$ . Это возмущение начнет сказываться на выходной координате, приводя к немедленному росту уровня. В свою очередь  $Q_1$  и  $Q_2$  зависят от уровня в сосуде, и поэтому они не останутся постоянными после изменения уровня II:  $Q_1 = f(H)$  и  $Q_2 = f(H)$ . Эти функции в общем случае нелинейные. Для их линеаризации воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции одного независимого переменного и учтем лишь два первых члена разложения при достаточно малых значениях  $\Delta H$ .

Форма разложения в ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \dots$$

Согласно этому запишем функции  $Q_1 = f(H)$  и  $Q_2 = f(H)$  в виде:

$$Q_1 \equiv Q_{10} + \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 \Delta H + \Delta Q_{10} + \left( \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial H} \right)_0 \Delta H + \dots;$$

$$Q_2 \cong Q_{20} + \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_0 \Delta H + \dots$$

В выражении (9) четвертым слагаемым пренебрегаем в связи произведением бесконечно малых величин и уравнения запишем в следующем виде:

$$Q_1 \equiv Q_{10} + \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 \Delta H + \Delta Q_{10} \quad (10)$$

14

$$Q_2 \equiv Q_{20} + \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_0 \Delta H. \quad (11)$$

полученные выражения являются линейными функциями. Выбор метода линеаризации (метода приближенных функций) определяется конечной целью исследования. Естественно, что переход от исходной системы к линеаризованной всегда сопряжен с некоторой потерей точности решения. Важно, чтобы такой переход не привел к изменению качественного характера решения. Русский математик И.М.Ляпунов в основополагающих исследованиях по устойчивости движения, опубликованных в 1892 г., показал, что устойчивость линейной модели будет свидетельствовать об устойчивости исходной нелинейной тогда, когда линеаризация функций выполнена по "методу малых отклонений". Это значит, что линеаризируемая функция в окрестности точки исследования равновесного состояния системы  $(H_0, Q_0)$  представляется рядом Тейлора, причем в разложении ограничиваются только линейными членами. Поясним вышесказанное рис. 18.

Изменение функций  $Q = f(H)$  по кривой  $OB$  заменяется изменением по касательной  $OA$ , проведенной в точке  $O$ , которая соответствует первоначально установившемуся положению равновесия. Приращение функции  $AC < BC$  при том же приращении аргумента  $\Delta H$  на величину  $AB$ . Величина  $AB$  определяет ошибку при линеаризации и соответствует отброшенным членам высокого порядка разложения в ряд Тейлора.

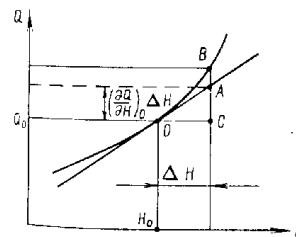


Рис. 18

Поэтому, чем меньше приращение аргумента  $\Delta H$ , тем меньше ошибка при линеаризации. Поэтому этот метод получил название "метода малых отклонений".

Теперь полученные уравнения (10) и (11) подставим в обобщенное уравнение (6) и согласно выражению (7) запишем:

$$F \frac{dH}{dt} = Q_{10} + \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 \Delta H + \Delta Q_1 - Q_{20} - \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right) \Delta H.$$

Из полученного уравнения вычтем уравнение (8) и получим уравнение движения регулируемого параметра, т.е. уравнение изменения уровня в резервуаре:

$$F \frac{dH}{dt} = \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 \Delta H - \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_0 \Delta H + \Delta Q_1.$$

Преобразуем данное уравнение и запишем в безразмерных координатах, для чего введем обозначения  $\Delta H = H_0 x$ ;  $dH = d(H_0 + \Delta H) = d\Delta H = H_0 dx$ ;  $\Delta Q_1/Q_0 = y$ ;  $\Delta Q_1 = yQ_0 = yQ_{10} = yQ_{20}$ :

$$FH_0 \frac{dx}{dt} = \left[ \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 - \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_0 \right] H_0 x + yQ_0,$$

или

$$\frac{FH_0}{Q_0} \frac{dx}{dt} + \frac{H_0}{Q_0} \left[ \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_0 - \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 \right] x = y.$$

Введем обозначения  $FH_0/Q_0 = T_a$ ;  $\rho = H_0/Q_0 \left[ \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_0 - \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 \right]$ , где  $T_a$  — постоянная времени разгона, с;  $\rho$  — степень самовыравнивания. Получим:

$$T_a \frac{dx}{dt} + \rho x = y. \quad (1)$$

Постоянная времени разгона — это время, необходимое для заполнения емкости объекта (до номинального значения выходной координаты  $H_0$ ) при поступлении жидкости на входе с постоянной скоростью и при отсутствии расхода.

Форма записи уравнения (12) впервые была предложена А.Стодолой. В теории автоматического регулирования большое применение нашла другая форма записи этого уравнения. Разделив коэффициенты в уравнении (12) на  $|\rho|$ :

$$\frac{T_a}{|\rho|} \frac{dx}{dt} \pm x = \frac{1}{|\rho|} y. \quad (1)$$

Знак "плюс" для  $\rho > 0$  и "минус" для  $\rho < 0$ . При этом получим

$$T \frac{dx}{dt} \pm x = ky, \quad (1)$$

где  $T = \frac{F}{\left[ \left( \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_0 - \left( \frac{\partial Q_1}{\partial H} \right)_0 \right]}$

— постоянная времени объекта, с.

Постоянная времени в отличие от времени разгона не зависит непосредственно от номинальных значений  $H_0$  и  $Q_0$ , а определяется

лишь значениями коэффициента емкости и функциональными зависимостями  $Q_1 = f(H)$  и  $Q_2 = f(H)$ , т.е. постоянная времени характеризует режим работы объекта и поэтому является переменной величиной. Постоянная времени — это время, в течение которого регулируемый параметр достиг бы нового установившегося положения равновесия, если бы он изменялся со скоростью постоянной и равной начальной. Безразмерная величина  $1/|\rho| = k$  называется коэффициентом усиления объекта регулирования.

## § 8. Анализ влияния параметров объекта на переходный процесс

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (14), описывающего переходный процесс в резервуаре, вызванный скачкообразным возмущением. Аналитически скачкообразное возмущение можно записать так:

$$\begin{cases} t < 0, y(t) = 0, \\ t \geq 0, y(t) = y_0 = \text{const.} \end{cases}$$

Решение уравнения (14) ищем в виде

$$x = Ce^{\tau t} + ky_0. \quad (15)$$

Общим решением линейного дифференциального уравнения первого порядка будет сумма интеграла  $x_1$ , соответствующего уравнению с нулевой правой частью

$$T(dx)/(dt) + x = 0, \quad (16)$$

и любого частного решения  $x_2$  исходного уравнения (14). Однородное уравнение (16) отражает свободное движение объекта (т.е. при отсутствии воздействия), а частное решение отражает вынужденное движение объекта под влиянием внешнего воздействия.

Решение однородного уравнения:

$$x_1 = Ce^{\tau t}. \quad (17)$$

Из характеристического уравнения определим значение корня  $\tau$ . Для этого продифференцируем выражение (17) и подставим значения  $dx/(dt)$  и  $x_1$  в уравнение (16):  $TC\tau e^{\tau t} + Ce^{\tau t} = 0$ . Отсюда  $\tau = -1/T$ . Таким образом,  $x_1 = Ce^{-t/T}$ .

Частное решение зависит от возмущения. Рассмотрим решение в случае возмущения в виде скачка, поэтому  $dx_2/dt = 0$  (рис. 19). Значит,  $x_2 = ky_0$ . Получаем общее решение уравнения (15):

$$x = x_1 + x_2 = Ce^{-t/T} + ky_0. \quad (18)$$

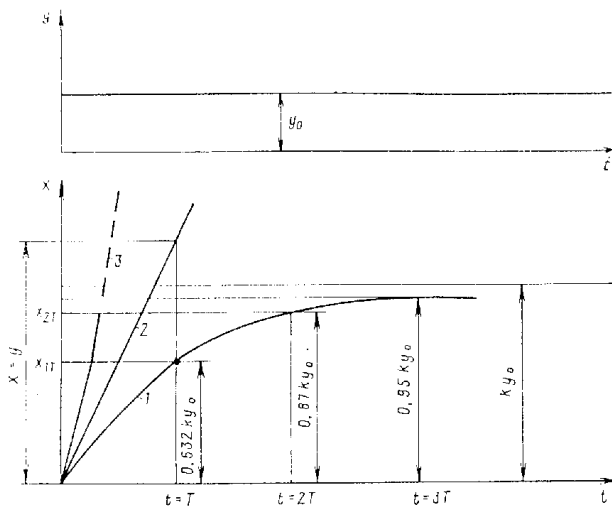


Рис. 19

Постоянную интегрирования  $C$  уравнения (18) определим при нулевых начальных условиях. То есть при  $t = 0$  рассматривается исходный установившийся режим  $x = x_0$ . Значит,  $\Delta x = 0$  и  $x = 0$  (см. рис. 19). Следовательно, из выражения (18) при подстановке  $x = 0$  и  $t = 0$  находим, что  $C = -ky_0$ . Окончательное решение имеет вид

$$x(t) = -ky_0 e^{-t/T} + ky_0 = ky_0 (1 - e^{-t/T}). \quad (19)$$

Решение уравнения (13) будет иметь тот же вид:

$$x(t) = \frac{y_0}{\rho} \left( 1 - e^{-(\rho/T_a)t} \right). \quad (20)$$

Итак, кривая, полученная на основе решений (19) и (20), называется переходной функцией объекта первого порядка с самовыравниванием и отражает относительное отклонение выходной координаты процесса во времени в зависимости от собственных свойств объекта  $\rho$  и  $T_a$  и внешних возмущений, приложенных в виде единичного скачка  $y_0$ .

Рассмотрим влияние степени самовыравнивания  $\rho$  на изменение переходной функции.

1. При положительном самовыравнивании ( $\rho > 0$ ) отклонение параметров объекта во времени изменяется по экспоненте и в пределе стремится к новому установившемуся положению равновесия с координатой  $ky_0$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{\rho > 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{y_0}{\rho} \left( 1 - e^{-(\rho/T_a)t} \right) \right]_{(\rho > 0)} = \frac{y_0}{\rho} = ky_0. \quad (21)$$

Как видно из уравнения (21), величина указанного предела не зависит от постоянной объекта  $T_a$ , которая влияет лишь на длительность переходного процесса. При рассмотрении длительности переходного процесса в объекте нет необходимости рассматривать время  $t \rightarrow \infty$ , ибо отклонение регулируемого параметра возрастает не безгранично, а уже через  $t = T$  достигает 0,632 — величины предельного отклонения и при  $t = 3T$  практически приходит к новому установившемуся значению:

$$x(t) = \frac{y_0}{\rho} \left( 1 - e^{-(\rho/T_a)t} \right)_{t=3T} = \frac{y_0}{\rho} \left( 1 - e^{-3} \right) \approx 0,95 \frac{y_0}{\rho}.$$

Таким образом, объекты, обладающие положительным самовыравниванием, называются статическими (см. рис. 19, кривая 1).

2. При  $\rho = 0$ , т.е. когда отсутствует самовыравнивание,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{\rho=0} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{y_0 \left( 1 - e^{-(\rho/T_a)t} \right)}{\rho} \right]_{(\rho=0)} = \frac{0}{0}.$$

Применив правило Лопиталя и устранив неопределенность, можно записать:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{\rho=0} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{y_0 \frac{t}{T_a} e^{-(\rho/T_a)t}}{1} \right]_{\rho=0} = \frac{y_0}{T_a} t.$$

Таким образом, при  $\rho = 0$  выходная координата  $x(t)$  будет неограниченно возрастать со временем по линейному закону с угловым коэффициентом  $y_0/T_a$  и за время  $t = T_a$  относительное изменение выходной координаты достигнет величины относительного возмущения  $x(t = T_a) = y_0$  (см. рис. 19, прямая 2). Поэтому такой объект называется астатическим или нейтральным.

3. При  $\rho < 0$ , когда объект обладает отрицательным самовыравниванием, подставляя значение  $\rho < 0$  в уравнения (20) и (21), увидим, что нового установившегося значения мы не достигнем и при  $t \rightarrow \infty$  переменная будет неограниченно возрастать. Такой объект будет неустойчивым (см. рис. 19, кривая 3).

Таким образом, наглядно убеждаемся, что при  $\rho = 0$  и особенно при  $\rho < 0$  объект не может работать без автоматического регулятора.

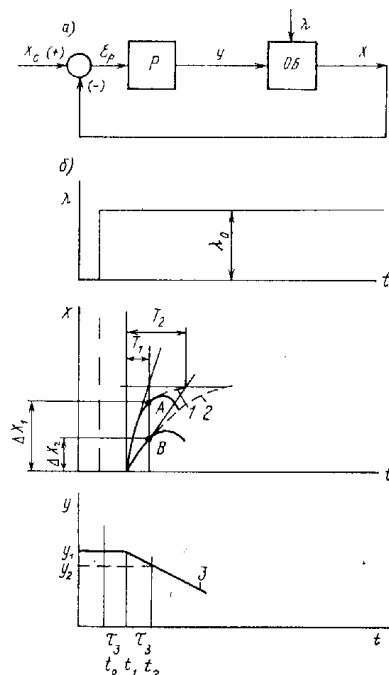


Рис. 20

**Запаздывание и его влияние на процесс регулирования.** Очень важным параметром при оценке динамических свойств объекта регулирования является не столько абсолютная величина запаздывания, сколько отношение  $\tau/T$  и его влияние на процесс регулирования. Чем больше это отношение, тем труднее обеспечить качественное регулирование параметра.

Рассмотрим этот тезис на примере работы системы автоматического регулирования с объектом первого порядка, обладающим запаздыванием (рис. 20).

Пусть в некоторый момент времени  $t_0$  нанесено возмущение  $\lambda_0$ . Через время, равное времени запаздывания  $\tau$ , начнет изменяться параметр  $x$  согласно переходной функции  $I$ . В момент времени  $t_1 = t_0 + \tau$  вступит в действие регулятор (прямая 3) и будет воздействовать на объект, чтобы вернуть параметр к первоначальному значению. Однако поскольку объект обладает запаздыванием, то действие регулятора, начавшееся в момент времени  $t_1$ , скажется на регулируемом параметре лишь через  $\tau$ . До этого отклонение параметра

будет происходить по переходной функции  $0.5$  и величина отклонения  $\Delta x_1$  будет тем больше, чем больше  $\tau$  и чем круче идет переходная функция, т.е. чем меньше  $T$ .

Таким образом,  $\tau/T_1 > \tau/T_2$  и  $\Delta x_1 > \Delta x_2$ , т.е. чем больше отношение  $\tau/T$ , тем больше отклонение параметра от заданного значения. Поэтому отношение  $\tau/T$  будет положено в основу выбора регулятора и его параметров настройки.

## § 9. Дифференциальное уравнение паровой турбины, работающей на винт фиксированного шага

Вывод уравнения турбины как объекта регулирования частоты вращения при изменении подачи пара рассмотрим для расчетной схемы, показанной на рис. 21.

При работе турбины происходит аккумуляция кинетической энергии ротором и связанными с ним вращающимися частями (редуктором). Если приведенный к валу турбины момент инерции этих частей обозначить  $I$ , а частоту вращения —  $\omega$ , то в соответствии с теоремой о моменте количества движения можно записать:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c, \quad (22)$$

где  $M_d$  — движущий момент, развиваемый паром на лопатках турбины;  $M_c$  — момент сопротивления со стороны гребного винта.

В установившемся режиме  $\omega = \text{const}$  и

$$M_{d0} - M_{c0} = 0. \quad (23)$$

Вычитая из уравнения (22) уравнение (23), получим:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \Delta M_d - \Delta M_c, \quad (24)$$

где  $\Delta M_d = M_d - M_{d0}$ ;  $\Delta M_c = M_c - M_{c0}$ .

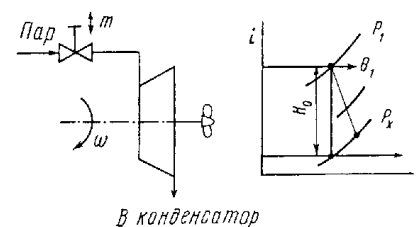


Рис. 21

Исходя из общей теории турбин, можно записать:  $M_d = a I_2 G (\eta_i / \omega)$ , где  $a$  — коэффициент пропорциональности;  $I_2$  — изоэнтропийный перепад;  $G$  — массовый расход пара на турбину;  $\eta_i$  — индикаторный КПД турбины.

Параметры  $P_1$  и  $\Theta_1$  на входе в турбину автоматически поддерживаются постоянными (САР давления пара), постоянными обычно считают и давление  $P_2$  в конденсаторе, определяемое температурой заборной воды. Поэтому  $H_2 = \text{const}$  и  $\eta_i = \text{const}$ . Таким образом,  $M_d = f(G, \omega)$ ;  $M_d = A (G/\omega)$ , где  $A = a I_2 \eta_i = \text{const}$ .

Если разложить выражение  $M_d$  в ряд Тейлора, сохранив в нем члены, лишь линейно зависящие от приращения аргументов, то можно записать:

$$M_d = M_{d0} + \left( \frac{\partial M_d}{\partial G} \right)_0 \Delta G + \left( \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega.$$

Получим

$$\Delta M_d = A \frac{\Delta G}{\omega_0} - A G_0 \frac{\Delta \omega}{\omega_0^2}$$

или преобразуем это уравнение и запишем:

$$\Delta M_d = \frac{A G_0 \Delta G}{G_0 \omega_0} - \frac{A G_0 \omega_0 \Delta \omega}{\omega_0 \omega_0^2},$$

$$\frac{\Delta M_d}{M_{d0}} = \frac{\Delta G}{G_0} - \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = k_{\text{кл}} \frac{\Delta m}{m_{\text{max}}} - \frac{\Delta \omega}{\omega_0},$$

где  $k_{\text{кл}}$  — коэффициент усилия клапана, связывающий перемещение регулирующего клапана с расходом  $G$  пара на турбину.

Момент сопротивления винта, состояние поверхностей которого удовлетворительное, а глубина погружения неизменна, пропорционален квадрату скорости судна, или квадрату частоты вращения гребного вала. Изменения сопротивления, вызванные увеличением шероховатости корпуса судна (обрастания), изменением глубины погружения ступицы винта, штормовыми условиями, приводят к отклонению от этой закономерности и в общем случае отражаются некоторой функцией времени  $f_c(t)$ :  $M_c = B \omega^2 + f_c(t)$ , откуда  $\Delta M_c = 2B \omega_0 \Delta \omega + \Delta f_c(t)$  и в относительных величинах

$$\frac{\Delta M_c}{M_{c0}} = 2 \frac{\Delta \omega}{\omega_0} + \frac{\Delta f_c(t)}{M_{c0}}.$$

Подставив выражения (26) и (27) в формулу (24), получим:

$$\frac{1}{M_0} \frac{d\omega}{dt} + 3 \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = k_{\text{кл}} \frac{\Delta m}{m_{\text{max}}} - \frac{\Delta f_c(t)}{M_0}, \quad (28)$$

где  $M_{d0} = M_{c0} = M_0$  в установившемся режиме.

В безразмерных координатах уравнение (28) будет иметь вид  $T(dx)/(dt) + x = k_{\text{кл}} \mu - f(t)$ , где  $T = I \omega_0 / 3 M_0$  — постоянная времени, с;  $k_{\text{кл}} = 1/3 k_{\text{кл}}$  — коэффициент усиления по регулирующему воздействию (открытию парового клапана);  $f(t) = \Delta f_c(t) / (3 M_0)$  — функция, характеризующая влияние на частоту вращения гребного винта. При движении судна на спокойной воде  $f(t) = 0$ , поэтому  $T(dx)/(dt) + x = k_{\text{кл}} \mu$ . Мы получаем то же уравнение, что и раньше для гидравлического объекта. Турбина по частоте вращения с воздействием на паровой клапан является объектом первого порядка с положительным самовыравниванием.

#### § 10. Применение преобразования Лапласа и передаточная функция

Линейные дифференциальные уравнения динамических систем решаются методами, которые подробно рассматриваются в курсе высшей математики. Однако для уравнений высокого порядка, какими являются дифференциальные уравнения САР, применение методов решения на базе классических методов интегрирования приводит к сложным и трудоемким решениям. С помощью методов операционного исчисления можно наиболее просто, экономично получить требуемые решения, так как они позволяют свести дифференциальные уравнения к алгебраическим и оперировать алгебраическими уравнениями в области изображения оригинала функции. Для теории автоматического управления наиболее удобным является метод решения, основанный на функциональном преобразовании с помощью интеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (29)$$

Эта формула устанавливает соответствие между правыми частями (при  $t \geq 0$ ) функции  $f(t)$  вещественного переменного  $t$  и функции  $F(p)$  комплексного переменного  $p = \sigma + j\omega$  ( $\sigma$  и  $\omega$  — вещественные переменные;  $\sqrt{-1} = j$ ). Функция  $f(t)$  называется оригиналом, функция  $F(p)$  — его изображением. Символически эта операция обозначается  $F(p) = L[f(t)]$ .

В области изображений дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические, а операции дифференцирования и интегрирования заменяются соответственно умножением и делением на оператор  $(d/dt = p)$ , с которым можно обращаться как с обычным числом. Это не только упрощает решение сложных задач, но и открывает новые

возможности переработки информации о динамических свойствах сложных систем по заданным характеристикам элементарных звеньев. Изображение некоторых элементарных функций можно получить, подставив соответствующий оригинал  $f(t)$  в формуле (29).

Отметим некоторые особенности преобразований Лапласа.

#### 1. Линейность преобразования

$$L\left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(p), \quad (30)$$

где  $a_k$  — постоянные коэффициенты.

2. Изображение постоянной. Если  $f(t) = M$  постоянна, то ее изображение есть также постоянная, равная этому числу:

$$F(p) = M. \quad (31)$$

3. Изменение масштаба независимой переменной. Пусть вместо  $f(t)$  рассматривается  $f(at)$ , где  $a$  — масштабный коэффициент. Тогда  $f(at) = F(p/a)$ . Отсюда следует, что  $\lim_{a \rightarrow \infty} f(at) = \lim_{a \rightarrow 0} F(p/a)$ ,

а также  $\lim_{a \rightarrow 0} f(at) = F(p/a)$ . Другими словами, предельному переходу  $t \rightarrow \infty$  в области оригинала соответствует переход  $p \rightarrow 0$  в области изображения и наоборот. Это свойство весьма облегчает нахождение выражений для установившихся режимов работы систем (при  $t \rightarrow \infty$ ) или начальных условий (при  $t \rightarrow 0$ ) по их изображениям.

#### 4. Изображение производной оригинала

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(-0), \quad (32)$$

где  $f(-0)$  — значение оригинала при подходе к точке  $t = 0$  слева.

Подобным образом:

$$L[f''(t)] = p[pF(p) - f(-0)] - f'(-0) = p^2 F(p) - pf(-0) - f'(-0); \quad (33)$$

$$\begin{aligned} L[f'''(t)] &= p[p^2 F(p) - pf(-0)] - f'(-0) - f''(-0) = \\ &= p^3 F(p) - p^2 f(-0) - pf'(-0) - f''(-0). \end{aligned}$$

Начальные значения оригинала при подходе к точке  $t = 0$  справа:

$$f(+0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Конечное значение оригинала:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$ . Если оригинал удовлетворяет условию  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , тогда формулы (32) и (33) упрощаются:

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= pF(p); \\ L[f''(t)] &= p^2 F(p). \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, для получения изображения  $k$ -й производной от оригинала достаточно умножить изображение на  $p^k$ .

5. Изображение интеграла. Если  $f(t) = F(p)$ , то

$$\int_0^t f(t) dt = (1/p)F(p), \quad \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} dt_1 dt_2 = (1/p^2)F(p) \quad \text{и т.д.}$$

6. Изображение функций с запаздывающим аргументом (теорема запаздывания). Если задана функция времени  $f(t)$ , то функция  $f(t - \tau_3)$  отличается от первой только тем, что ее аргумент отстает на постоянную величину  $\tau_3$ :

$$f(t - \tau_3) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_3; \\ f(t - \tau_3) & \text{при } t > \tau_3. \end{cases}$$

В области изображения факт запаздывания выражается умножением на экспоненциальную функцию:

$$e^{-\tau_3 p} F(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0; \\ f(t - \tau_3) & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

**Передаточная функция.** Обратимся теперь к уравнению динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_m y.$$

При этом ограничимся случаем, когда входное воздействие  $y(t)$  удовлетворяет условию  $y(t) = 0$  при  $t < 0$ , а система до момента времени  $t = 0$  находилась в состоянии покоя, т.е.  $x(-0) = x'(-0) = \dots = y^{(n)}(-0) = 0$ . Умножив левую и правую стороны этого уравнения на  $e^{pt}$  и проинтегрировав их в пределах от  $t = -0$  до  $t = \infty$ , а также принимая во внимание свойства выражений (30) и (34), получим следующее алгебраическое уравнение для изображения входной  $Y(p)$  и выходной  $X_p$  величин системы:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) x(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) Y(p). \quad (35)$$

Обозначив  $K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m$  и  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ , уравнение (35) запишем в виде

$$X(p) = \frac{K(p)}{D(p)} Y(p)$$

или  $X(p) = W(p)Y(p)$ , где  $W(p) = K(p)/D(p)$ . (36)

Функция (36) комплексной переменной  $p$  называется передаточной функцией.

Таким образом, передаточная функция системы (звена) определяется как отношение выходной величины к входной величине, записанных в операторной форме при нулевых начальных условиях.

Выводим простое правило получения передаточной функции по дифференциальному уравнению:

1) производные в левой и правой частях уравнения заменяются  $p$  в степени, равной порядку заменяемой производной;

2) полученный таким образом полином правой части есть числитель передаточной функции, а полином левой части — ее знаменатель. Передаточная функция для уравнений (35) и (14) имеет соответственно вид:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}; \quad (37)$$

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}.$$

## § 11. Решение дифференциального уравнения методом операционного исчисления

Приравняв полином знаменателя передаточной функции (37) нулю, получим характеристическое уравнение системы:  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$ . Корни этого уравнения называются полюсами передаточной функции. Процедура решения уравнения состоит в следующем: по данному входному воздействию  $y(t)$  с помощью таблицы соответствий находят изображение  $Y(p)$ ; по дифференциальному уравнению составляют передаточную функцию  $W(p)$ ; находят изображение  $X(p)$  как произведение  $Y(p)$  и  $W(p)$ ; определяют оригинал  $x(t)$ , соответствующий  $X(p)$ . При выполнении последней операции обычно приходится представлять предварительное изображение  $X(p)$  в виде суммы простых дробей:

$$X(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \dots + \frac{k_n}{p - p_n}, \quad (38)$$

где  $B(p)$  и  $A(p)$  — полиномы;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — корни полинома;  $k_1, \dots, k_n$  — постоянные коэффициенты.

Если такое разложение выполнено, то оригинал

$$x(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} \text{ при } t \geq 0. \quad (39)$$

Коэффициенты разложения определяем по формуле

$$k_n = \left[ (p - p_n) \frac{B(p)}{A(p)} \right]_{p=p_n}.$$

Если среди корней полинома  $A(p)$  имеется  $p_n$  кратности  $r$ , то соответствующая сумма простых дробей примет вид

$$\frac{k_{n1}}{(p - p_n)^r} + \frac{k_{n2}}{(p - p_n)^{r-1}} + \dots + \frac{k_{nr}}{p - p_n}.$$

Коэффициенты  $k_{n1}, k_{n2}, \dots, k_{nr}$  могут быть найдены из формулы

$$k_{in} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[ (p - p_i)^r \frac{B(p)}{A(p)} \right]_{p=p_i},$$

а соответствующие компоненты оригинала (см. табл. 1, поз. 7) — из формулы

$$[c_{i1} / (r-1)!] e^{p_i t} t^{r-1} + [c_{i2} / (r-2)!] e^{p_i t} t^{r-2} + \dots + c_{ir} e^{p_i t}.$$

Коэффициенты разложения на простые дроби могут быть найдены путем приведения правой части формулы (38) к общему знаменателю с последующим приравнованием числителей левой и правой частей при одинаковых степенях  $p$ .

Основная трудность в операторном методе заключается не в решении уравнения, а в переходах от изображения функции к ее оригиналу. Для облегчения этого вопроса изданы довольно обширные справочники, содержащие многие сотни лапласовых преобразований наиболее употребительных функций. Для решения задач, описываемых уравнениями до третьего порядка, будет достаточно преобразований, приведенных в табл. 1.

### Примеры.

1. При выводе дифференциальных уравнений объектов регулирования нами было получено уравнение изменения уровня (14)

$$Tx' + x = ky(t) \quad (40)$$

с начальными условиями при  $t = 0$   $x(0) = 0$ ;

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ y_0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$



Вместо подлежащей определению функции  $x(t)$  введем ее обозначение  $x(p)$ . Тогда  $x'(t) = px(p)$ . Поскольку возмущающая функция постоянна, то согласно формуле (31) можно записать:  $y(p) = y_0$ .

Уравнение (40) в изображениях будет иметь вид  $(Tp + 1)X(p) = ky_0$ . Отсюда запишем передаточную функцию  $W(p) = ky_0/(Tp + 1)$ .

Для определения оригинала полученной функции воспользуемся табл. 1, поз. 6 и запишем решение в виде

$$x(t) = ky_0(1 - e^{-t/T}). \quad (41)$$

Подставив численные значения постоянной времени  $T$ , коэффициента усиления  $k$  и величину возмущающего воздействия  $y_0$ , задаваясь  $t$ , строим переходную функцию. Выражение (41) является решением уравнения (40).

2. Пусть дифференциальное уравнение двухъёмкостного объекта регулирования имеет вид  $[1] x''(t) + 1,625x'(t) + 0,375x(t) = y_1(t) - 2y_2(t) - 1,25y_2(t)$ .

Найдем решение отдельно для каждого входного воздействия при условиях, данных в примере 1, т.е.  $y_1(t) = y_2(t) = y_0$  при  $t \geq 0$  и  $y(-0) = y'(-0) = 0$ .

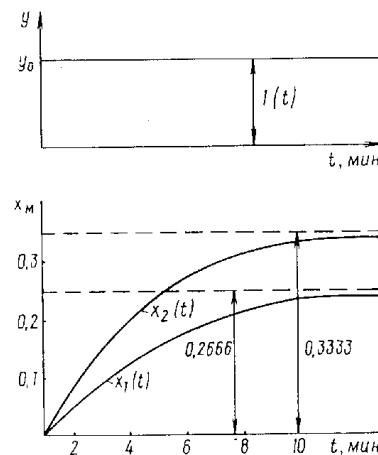


Рис. 22

В области изображения это уравнение имеет следующий вид:  $X(p) = W_1(p)y_1(p) + W_2(p)y_2(p)$ , где  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  — передаточные функции по каналам воздействия  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} W_1(p) &= 1 / (p^2 + 1,625p + 0,375); \\ W_2(p) &= -(2p + 1,25) / (p^2 + 1,625p + 0,375). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Таким образом, изображения изменения выходной величины, вызванного заданным воздействием  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  в виде скачка, могут быть представлены как  $x_1(p) = y_0/p(p^2 + 1,625p + 0,375)$  и  $x_2(p) = -y_0(2p + 1,25)/p(p^2 + 1,625p + 0,375)$ . Характеристическое уравнение  $p^2 + 1,625p + 0,375 = 0$  имеет два вещественных корня:  $p_1 = -\alpha = -1,3465$  и  $p_2 = -\beta = -0,2785$ . Следовательно, выражения для  $X_1(p)$  и  $X_2(p)$  могут быть представлены:  $X_1(p) = y_0/p(p + \alpha)(p + \beta)$ ;  $X_2(p) = -2y_0(p + b)/p(p + \alpha)(p + \beta)$ . Согласно табл. 1, поз. 13 и 14, можно записать, что

$$X_1(t) = y_0 \left[ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}) \right];$$

$$X_2(t) = -2y_0 \left[ \frac{b}{\alpha\beta} + \frac{b - \alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-\alpha t} + \frac{b - \beta}{\beta(\beta - \alpha)} e^{-\beta t} \right],$$

где  $b = 0,625$ ;  $y_0 = 0,1$ . Это решение показано на рис. 22.

## § 12. Частотные характеристики и их связь с передаточной функцией

Понятие частотных характеристик нашло широкое применение в теории автоматического управления. Преобразование Фурье правосторонних функций оказалось идентичным преобразованию Лапласа (табл. 1), поэтому целесообразность его использования для исследования линейных систем определяется теми же соображениями, что и применение операционного преобразования.

Если на вход линейной разомкнутой системы (рис. 23) подать гармоническое возмущение, то по истечении некоторого времени после подачи такого возмущения, когда затухнут все движения, определяемые переходным процессом, на выходе системы установится также гармоническое изменение выходной величины с той же частотой, которую имеет входная величина, но с иными амплитудой и фазой. По ним можно судить о динамических свойствах сложных замкнутых систем управления.

Преобразование Лапласа

Таблица

| № п/п | Изображение<br>$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$                                                                                                                                                              | Оригинал<br>$f(t)$ при $t \geq 0$                                                                                                                                                                                                 |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | $1/p$                                                                                                                                                                                                                | 1                                                                                                                                                                                                                                 |
| 2     | $1/p^2$                                                                                                                                                                                                              | $t$                                                                                                                                                                                                                               |
| 3     | $1/(p + \alpha)$                                                                                                                                                                                                     | $e^{-\alpha t}$                                                                                                                                                                                                                   |
| 4     | $\omega_0 / (p^2 + \omega_0^2)$                                                                                                                                                                                      | $\sin \omega_0 t$                                                                                                                                                                                                                 |
| 5     | $p / (p^2 + \omega_0^2)$                                                                                                                                                                                             | $\cos \omega_0 t$                                                                                                                                                                                                                 |
| 6     | $k / (pT + 1)$                                                                                                                                                                                                       | $k(1 - e^{-t/T})$                                                                                                                                                                                                                 |
| 7     | $n! / (p + \alpha)^{n+1}$                                                                                                                                                                                            | $t^n e^{-\alpha t} (n = 1, 2, \dots)$                                                                                                                                                                                             |
| 8     | $\frac{k}{p^2 + a_1 p + a_2}$<br>если: а) корни $p_1$ и $p_2$ характеристического уравнения $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$ вещественные;<br>б) корни $p_{1,2} = \sigma + j\omega$ характеристического уравнения комплексные | а) $\frac{k}{a_2} \left( 1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right)$<br>б) $\frac{k}{a_2} \left[ 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos \omega t + \frac{\sigma}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$ |
| 9     | $\frac{k}{(p^2 + a_1 p + a_2)}$<br>корни комплексные, кратные                                                                                                                                                        | $\frac{k}{\omega} e^{-\sigma t} \sin \omega t$                                                                                                                                                                                    |
| 10    | $\frac{pk}{p^2 + a_1 p + a_2}$                                                                                                                                                                                       | $ke^{-\sigma t} \left( \cos \omega t - \frac{\sigma}{\omega} \sin \omega t \right)$                                                                                                                                               |
| 11    | $\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)(p + \gamma)}$                                                                                                                                                                      | $\frac{1}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} e^{-\alpha t} + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} e^{-\beta t} + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} e^{-\gamma t}$                                                 |
| 12    | $\frac{1}{p(p + \alpha)^2}$                                                                                                                                                                                          | $\frac{1}{\alpha^2} [1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}]$                                                                                                                                                                           |
| 13    | $\frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)}$                                                                                                                                                                                 | $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t})$                                                                                                                       |
| 14    | $\frac{p + b}{p(p + \alpha)(p + \beta)}$                                                                                                                                                                             | $\frac{b}{\alpha\beta} + \frac{b - \alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-\alpha t} + \frac{b - \beta}{\beta(\beta - \alpha)} e^{-\beta t}$                                                                                          |

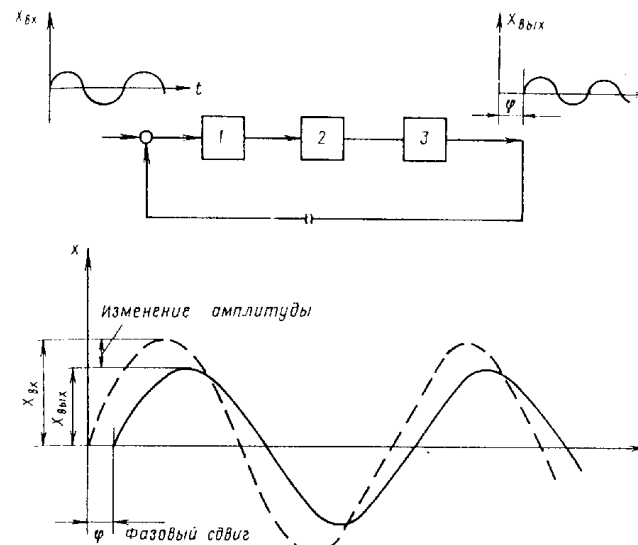


Рис. 23

На возможность такого суждения применительно к исследованию динамических свойств электронных усилителей с обратной связью в 1932 г. указал Х. Найквист, а на возможность применения частотных методов анализа к системам регулирования указал в 1939 г. А. В. Михайлов.

Пусть  $x_{\text{вх}} = X_{\text{вх}} e^{j\omega t}$ , тогда по истечении времени переходного процесса на выходе разомкнутой системы устанавливаются вынужденные колебания:

$$x_{\text{вых}} = X_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi)} = X_{\text{вых}} e^{j\omega t} e^{j\varphi}. \quad (43)$$

Пусть в общем случае разомкнутая система управления характеризуется дифференциальным уравнением (35). Подадим на вход этой системы гармоническое возмущение:  $x_{\text{вх}} = Y = Y_0 e^{j\omega t}$ . Известно, что

$$\left. \begin{aligned} p(Y_0 e^{j\omega t}) &= \frac{d}{dt} (Y_0 e^{j\omega t}) = j\omega Y_0 e^{j\omega t}; \\ p^2(Y_0 e^{j\omega t}) &= \frac{d^2}{dt^2} (Y_0 e^{j\omega t}) = (j\omega)^2 Y_0 e^{j\omega t}; \\ p^n(Y_0 e^{j\omega t}) &= \frac{d^n}{dt^n} (Y_0 e^{j\omega t}) = (j\omega)^n Y_0 e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

4\*

Продифференцировав аналогичным образом выражение (43) подставив значения (43) и (44) в уравнение (35), запишем:

$$a_0(j\omega)^n X_0 e^{j\omega t} c^{j\varphi} + a_1(j\omega)^{n-1} X_0 e^{j\omega t} c^{j\varphi} + a_{n-1}(j\omega) X_0 e^{j\omega t} c^{j\varphi} + a_n X_0 e^{j\omega t} c^{j\varphi} = b_0(j\omega)^m Y_0 e^{j\omega t} + b_1(j\omega)^{m-1} Y_0 e^{j\omega t} + \dots + b_{m-1}(j\omega) Y_0 e^{j\omega t} + b_m Y_0 e^{j\omega t}.$$

Сокращая полученное равенство на  $e^{j\omega t}$ , получаем выражение позволяющее определить при заданном периодическом возмущении на входе изменение амплитуды и фазы на выходе системы в зависимости от частоты:

$$W(j\omega) = \frac{X_0 c^{j\varphi}}{Y_0} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(j\omega) + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}.$$

Легко видеть, что полученное отношение представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы, в которой сделана подстановка  $p = j\omega$ . Следовательно, можно записать:

$$W(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{D(j\omega)} \text{ или } X(j\omega) = W(j\omega)Y(j\omega).$$

Выражение  $W(j\omega)$  называется комплексной частотной характеристикой звена или разомкнутой системы.

При сравнении выражения (36) и (45) видно, что действительные преобразования Фурье являются идентичными преобразованиями Лапласа и поэтому легко сделать переход от одного вида преобразования к другому. Несмотря на это, частотные характеристики обладают рядом преимуществ по сравнению с преобразованиями области изображения, особенно при решении дифференциальных уравнений высокого порядка, и поэтому нашли широкое применение в теории автоматического управления.

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) системы может быть представлена как в виде суммы ее вещественной и мнимых составляющих  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , так и в показательной форме  $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , где  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  — модуль и аргумент КЧХ, получившие название амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик. Они связаны с вещественной  $P(\omega)$  и мнимой  $Q(\omega)$  характеристиками обычными соотношениями:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \pm \begin{cases} 0 & \text{при } P(\omega) \geq 0, \\ \pi & \text{при } P(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$\text{и } P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

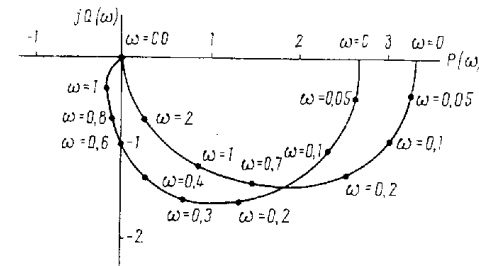


Рис. 24

**Пример.** Найдем КЧХ для объекта, описанного передаточными функциями вида (42). В передаточных функциях (45) проведем замену  $p = j\omega$  и запишем:

$$W_1(j\omega) = 1 / (-\omega^2 + 1,625j\omega + 0,375);$$

$$W_2(j\omega) = -(2j\omega + 1,25) / (-\omega^2 + 1,625j\omega + 0,375).$$

При подстановке  $\omega = 0 \dots \infty$  построим годографы, которые показаны на рис. 24.

## ГЛАВА III. АВТОМАТИЧЕСКИЕ РЕГУЛЯТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

### § 13. Классификация регуляторов

Существует большое количество различных типов автоматических регуляторов, отличающихся принципиальной схемой, характером работы, конструктивным исполнением и т.д. С целью облегчения изучения автоматических регуляторов произведем их классификацию.

1. По регулируемому параметру они делятся на регуляторы скорости, давления, уровня, температуры, расхода и т.д.

2. По характеру перемещения регулирующего органа регуляторы могут быть прерывного и непрерывного действия. Регуляторы прерывного действия характеризуются прерывным перемещением регулирующего органа при непрерывном изменении регулируемого параметра. Регуляторы непрерывного действия характеризуются непрерывным перемещением регулирующего органа в соответствии с непрерывным изменением регулирующего параметра.

3. В зависимости от связи чувствительного элемента с регулирующим органом регуляторы бывают прямого действия, когда регулирующий орган объекта перемещается усилием, развиваемым

чувствительным элементом, и непрямого действия, когда регулирующий орган перемещается при помощи вспомогательной энергии (помощью серводвигателя).

4. По типу связи задающего устройства регуляторы бывают стабилизирующие, программные, следящие и оптимизирующие.

5. По закону регулирования. Функциональная связь между выходной координатой перемещения исполнительного механизма и его входной координатой (отклонением регулируемого параметра от его равновесия) в установившемся движении регулятора называется законом регулирования.

Для регуляторов непрерывного действия имеются следующие пять законов регулирования:

а) по отклонению регулируемой величины (когда перемещение регулирующего органа зависит от величины и знака мгновенного отклонения регулируемой величины);

б) по отклонению и производной от отклонения (когда регулирующее воздействие связано не только с величиной и знаком мгновенного отклонения регулируемой величины, но и с производным — первой, второй — по отклонению);

в) по интегралу от отклонения регулируемой величины (когда регулирующее воздействие зависит от величины и знака интеграла по отклонению регулируемой величины по времени);

г) по отклонению и интегралу от отклонения регулируемой величины (когда регулирующее воздействие зависит от величины, знака отклонения и интеграла по отклонению регулируемой величины от заданного значения);

д) по отклонению, интегралу и производным регулируемой величины (когда регулирующее воздействие зависит от величины и знака отклонения, интеграла и производных регулируемой величины).

#### § 14. Астатический регулятор и его свойства

Регуляторы, в которых реализован закон регулирования по интегралу от отклонения регулируемой величины (И-регуляторы называют еще астатическим, так как у них регулирующее воздействие пропорционально интегралу от отклонения регулируемой величины или же скорость изменения регулирующего органа пропорциональна отклонению регулируемого параметра:

$$y(t) = k_{\text{и}} \int_0^t x(t) dt \quad (4)$$

или  $dy/dt = K_{\text{и}} x(t)$ , где  $K_{\text{и}} = 1/T_{\text{и}}$  — коэффициент усиления регулятора, имеет в размерности время;  $T_{\text{и}}$  — время интегрирования — параметр настройки регулятора.

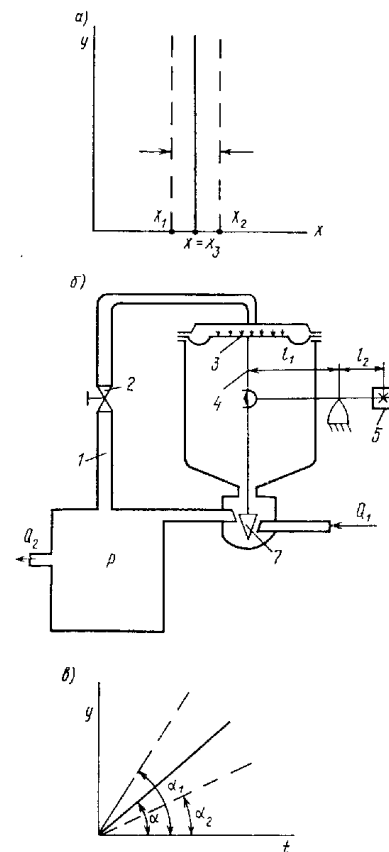


Рис. 25

различное положение ( $y$ ) при одном и том же значении регулируемой величины ( $x$ ) и различной нагрузке.

В качестве примера рассмотрим регулятор давления прямого действия, показанный на рис. 25, б, где 1 — импульсная трубка; 2 — дроссель; 3 — мембрана; 4 — шток; 5 — груз весом  $G$ ; 6 — рычаг; 7 — клапан регулирующего органа (р.о.);  $P$  — давление в объекте регулирования;  $Q$  — нагрузка.

В установившемся режиме усилие на штоке со стороны мембраны и усилие груза равны между собой, т.е.  $x = x_3 = P_3$ .

Из уравнения (46) очевидно, что регулирующий орган не может остановиться (т.е. регулятор не придет в установившееся состояние), пока имеется отклонение регулируемого параметра  $x(t)$ . Поэтому единственным достаточным и необходимым условием равновесия регулирующего органа является отсутствие отклонения регулируемого параметра. То есть при  $x = 0$   $dy/dt = 0$  и  $y = \text{const}$  его статическая характеристика имеет вид, показанный на рис. 25, а. Анализ статической характеристики показывает, что, во-первых, как бы ни отклонился регулируемый параметр от заданного значения  $x_3$  на величину  $-\Delta x = x_1 - x_3$  или  $+\Delta x = x_2 - x_3$ , И-регулятор стремится вернуть параметр к строго заданному значению, т.е. такой регулятор регулирует параметр без остаточного отклонения (неравномерности), и, во-вторых, в И-регуляторе отсутствует жесткая связь между изменением регулируемого параметра и положением регулирующего органа, т.е. регулирующий орган может занимать

Это равенство определяется весом груза 5 независимо от величины нагрузки. Заданное значение давления (регулируемого параметра) устанавливается или изменяется положением груза 5 на рычаге 6. Поэтому усилие, действующее на мембрану снизу, будет постоянным, т.е. соотношения плеч рычага  $\ell_1$  и  $\ell_2$  и веса груза  $G$ . Значит, регулятор придет в равновесие только тогда, когда усилие, создаваемое переменным давлением сверху на мембрану, достигнет постоянного усилия, действующего на мембрану снизу. Перемещение регулирующего органа осуществляется силой, пропорциональной отклонению давления  $\Delta P$  от первоначального значения, которое уравнивается грузом. Этой силе препятствует сила, пропорциональная нарастанию давления на мембране. Согласно закону Ньютона произведение массы движущихся частей на ускорение  $md^2h/dt^2$  равно силе, действующей на эту систему, т.е. разности сил  $md^2h/dt^2 = T_1 dF/dt - k_1 G$ , где  $k_1 = \ell_1/\ell_2$ ;  $T_1$  — время, характеризующее собой нарастание давления над мембраной при соответствующем положении дросселя. Но:  $dF/dt = k_2 dP/dt$  — скорость изменения этих сил, пропорциональная скорости нарастания давления на мембране.  $G = k_2 P_3$ , где  $P_3$  — заданное значение давления;  $k_2$  — площадь мембраны.

Тогда

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = T_1 k_2 \frac{dP}{dt} - k_1 k_2 P_3,$$

но

$$\frac{dF}{dt} = k \frac{dh}{dt},$$

где  $k$  — жесткость мембраны, кг/см;  $h$  — перемещение мембраны.

Поэтому можно записать:

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = T_1 k \frac{dh}{dt} - k_1 k_2 P_3,$$

где  $P_3$  — регулируемый параметр.

Масса мембраны очень незначительна, и ею можно пренебречь, поэтому

$$T_1 k \frac{dh}{dt} = k_1 k_2 P_3. \quad (47)$$

Так как безразмерные параметры  $P_3/P_0 = x$  и  $h/h_0 = y$ , то  $P_3 = P_0 x$  и  $h = h_0 y$ . Подставим  $P_3$  и  $h$  в выражение (47):

$$\frac{T_1 k h_0}{k_1 k_2 P_0} \frac{dy}{dt} = x,$$

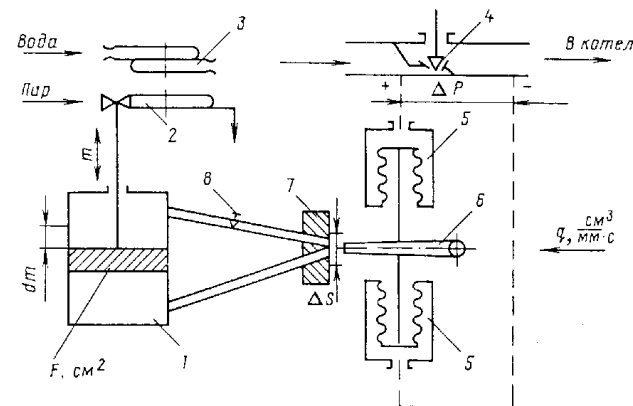


Рис. 26

где  $T_1 k h_0 / (k_1 k_2 P_0) = T_*$  — постоянная времени, с;  $T_* dy/dt = x$ , или  $dy/dt = (1/T_*) x$ .

Если внести возмущение скачком (изменить заданное значение давления), то переходная характеристика будет иметь вид прямой (рис. 25, в) с углом наклона, определяемым постоянной времени интегрирования  $T_*$ , т.е.  $k_p = 1/T_* = \operatorname{tg} \alpha / x_0$ . Время интегрирования, а значит, коэффициент передачи регулятора можно изменить, изменяя сечение дросселя 2 (см. рис. 25, б); при этом изменяется скорость нарастания сигнала на выходе регулятора  $y$  (см. рис. 25, в — углы  $\alpha_1, \alpha_2$ ). И-регулятор используется только с объектами, обладающими положительным самовыравниванием, и при медленных изменениях нагрузки. На рис. 26 показана схема регулирования постоянства перепада давления на питательном клапане.

Авторегулирование осуществляется интегральным регулятором непрямого действия. Постоянство разности давлений  $\Delta P$  на регулирующем питательном клапане 4 котла является условием нормальной работы САР уровня воды в его барабане. Эта разность измеряется сильфонами 5, воздействующими на гидравлический усилитель (струйную трубку) 6, к которому в качестве рабочей среды подводится под давлением конденсат. При нейтральном среднем положении струйной трубки давление в соплах к полостям сервомотора 1 одинаково, и по мере ее отклонения от среднего положения через плату 7 в полости сервомотора поступает конденсат под давлением с удельным расходом  $q$  (см³/с) на каждый миллиметр отклонения  $\Delta S$  трубки от нейтрального положения. Сервомотор управляет парорегулирующим клапаном турбопривода 2

насоса 3, осуществляющего подачу питательной воды в котел через регулирующий клапан 4.

Струйная трубка имеет единственное положение равновесия — среднее, а поэтому равновесие системы наступает только тогда, когда возвращается к первоначальному значению разность давлений  $\Delta P$ .

Объем, описываемый поршнем сервомотора, всегда равен объему жидкости, поданной через трубку. За время  $dt$  поршень сервомотора переместится на величину  $dm$ .

$$F dm = q \Delta s dt. \quad (48)$$

Перемещение струйной трубки всегда прямо пропорционально изменению давления  $\Delta P$ :  $\Delta s = k \Delta P$ . Данное выражение подставим в формулу (48) и получим  $dm = (qk/F) \Delta P dt$ .

Проинтегрировав полученное выражение, имеем:

$$m = \frac{qk}{F} \int_0^t \Delta P dt,$$

т.е. регулирующее воздействие  $m$  пропорционально интегралу от отклонения регулируемой величины  $\Delta P$ . Введем базовые величины и запишем уравнение в безразмерном виде:  $m/m_{\max} = y$ ;  $\Delta P/(\Delta P)_{\max} = x$ ;  $m = y m_{\max}$ ;  $\Delta P = x (\Delta P)_{\max}$ :

$$y m_{\max} = \left[ qk (\Delta P)_{\max} / F \right] \int_0^t x dt.$$

Величина  $k(\Delta P)_{\max} = (\Delta s)_{\max}$ , поэтому

$$y = \frac{q(\Delta s)_{\max}}{F m_{\max}} \int_0^t x dt = \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t x dt,$$

где  $T_{\text{и}} = F m_{\max} / [q(\Delta s)_{\max}]$  — постоянная времени интегрирования, выражающая продолжительность перемещения поршня сервомотора из одного крайнего положения в другое при максимальном отклонении струйной трубки.

Величина  $T_{\text{и}}$  является настроечным параметром И-регулятора непрямого действия и устанавливается посредством дросселя  $\delta$  (см. рис. 26). Сравнительно малая скорость сервомотора, определяемая значением постоянной  $T_{\text{и}}$  при настройке системы, обуславливает медлительность переходных процессов. Оптимальное значение  $T_{\text{и}}^{\text{опт}}$  определяется инерционностью объекта, к которому подключен И-регулятор [4]:  $T_{\text{и}}^{\text{опт}} = 0,19 T_0$ , где  $T_0$  — постоянная времени объекта регулирования.

## § 15. Статический регулятор и его свойства

Статическим (П-регулятором) называется такой регулятор, в котором регулирующее воздействие пропорционально отклонению регулируемого параметра:  $y(t) = k_c x(t)$ . В таком регуляторе скорость регулирующего воздействия пропорциональна скорости изменения регулируемого параметра:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_c \frac{dx(t)}{dt}.$$

Отсюда следует, что при неизменном (постоянном) отклонении регулируемого параметра ( $x_0 = \text{const}$ ) регулирующий орган неподвижен, т.е. не стремится устранить это отклонение.

Статическая характеристика пропорционального регулятора показана на рис. 27, а.

Из характеристики видим, что при отклонении регулируемого параметра от заданного значения ( $\Delta x = x - x_0$ ) регулятор начинает устранять это отклонение и доводит параметр до нового установившегося положения равновесия ( $x_{10}$  или  $x_{20}$ ). При этом в системе возникают остаточные отклонения  $\Delta x_1$  или  $\Delta x_2$ , которые зависят от угла наклона статической характеристики регулятора, т.е. от степени неравномерности регулятора  $\delta$ . Для астатического регулятора  $\delta = 0$ , для статического  $\delta \geq 0$ . Из статической характеристики можно записать, что  $\delta = (x_{\max} - x_{\min}) / x_{\text{ср}}$ , где  $x_{\text{ср}} = (x_{\max} + x_{\min}) / 2$ . Из статической характеристики видим, что в статическом регуляторе каждому значению регулируемого параметра  $x$  соответствует вполне определенное регулирующее воздействие (т.е. положение регулирующего органа  $y$ ).

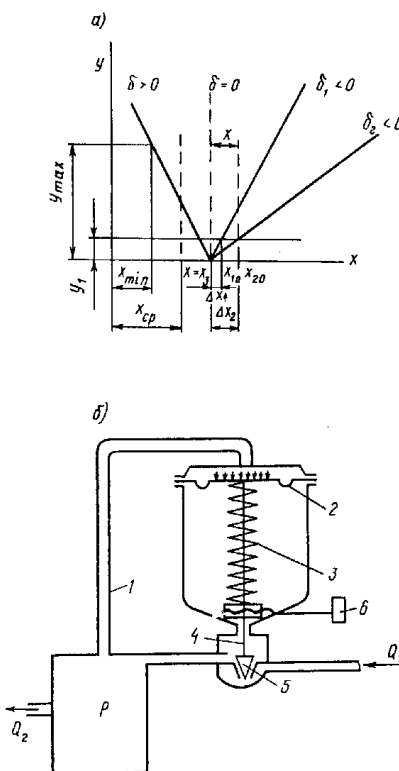


Рис. 27

Что же такое степень неравномерности регулятора?

Пределом пропорциональности, или степенью неравномерности, регулятора называется величина изменения регулируемого параметра на участке шкалы регистрирующего прибора (вторичного прибора), выраженная в процентах от всей шкалы, которая вызывает перемещение регулирующего органа из одного крайнего положения в другое.

Пример.  $\delta = 60\%$ . Это значит, что отклонение регистрирующей стрелки шкалы вторичного прибора на 60% вызовет перемещение регулирующего органа на весь ход, а при изменении на 1% шкалы р.о. совершит 1/60 его полного хода.

Пусть имеется регулятор температуры с вторичным прибором со шкалой от 0 до 160 °С. Заданная температура  $\Theta_z = 120$  °С при  $\delta = 60\%$ . Температура отклонилась на 2 °С, т.е.  $\Theta = 122$  °С. Тогда стрелка прибора переместится на величину  $2 \cdot 100 : 160 = 1,25\%$  шкалы, а р.о. переместится на  $1 : 60 \cdot 1,25 = 0,021$  полного хода. При  $\delta = 10\%$  и изменении температуры на 2 °С ход р.о. составит  $1,25 : 10 = 0,125$  полного хода (п.х.), а при зоне пропорциональности  $\delta = 1\%$  ход р.о. составит  $1,25 : 1 = 1,25$  п.х. (т.е. клапан полностью откроется или закроется на 100%). Таким образом, степень неравномерности (предел пропорциональности) является настроечным параметром П-регулятора и равна  $\delta = 1/k_c$  (если коэффициент передачи регулятора записан в безразмерной форме).

В качестве П-регулятора рассмотрим регулятор давления прямого действия, представленный на рис. 27, б. Принципиальное его отличие от ранее рассмотренного астатического регулятора (см. рис. 25, б) заключается в том, что груз с рычагом заменен пружиной. Наличие пружины приводит к тому, что усилие, действующее на мембрану снизу, создает переменное усилие, при котором происходит уравнивание сил, действующих на мембрану. Это приводит к изменению наклона статической характеристики. Первоначальная жесткость пружины определяет наклон статической характеристики и, естественно, степень неравномерности регулятора.

Если поставить пружину с переменной жесткостью (коническая пружина) или несколько пружин с различными начальными жесткостями, получим регулятор с переменной степенью неравномерности. В регуляторе (см. рис. 27, б) устройство б служит для сжатия пружины и этим самым изменяется задание регулятору.

При нарушении равновесия в системе усилия  $F_c$  (давление воздуха регулируемой среды) и  $F_{пр}$  (от пружины 3), приложенные к штоку 4, будут неравны. Разность их приведет к перемещению регулирующего органа с ускорением  $d^2h/dt^2$ , поэтому  $md^2h/dt^2 = \Delta F_c - \Delta F_{пр}$ , где  $\Delta F_c = k_2 \Delta P$ ;  $k_2$  — площадь мембраны ( $f_m$ );  $\Delta F_{пр} = k_3 \Delta h$ ;  $k_3$  — коэффициент

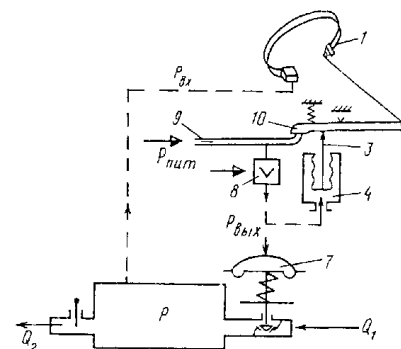


Рис. 28

упругости пружины. Отсюда  $md^2h/dt^2 = k_2 \Delta P - k_3 \Delta h$ . В связи с тем что масса пружины очень мала и ускорением регулирующего органа можно пренебречь,  $k_3 \Delta h = k_2 \Delta P$ . Введем базовые координаты и запишем:  $\Delta P = P_0 x$ ;  $\Delta h = H_0 y$ . Тогда  $k_3 H_0 y = k_2 P_0 x$ ;  $y = [k_2 P_0 / (k_3 H_0)] x$ , т.е.  $y = k_p x$ .

На рис. 28 приведена схема регулирования давления воздуха в емкости V с пневматическим пропорциональным регулятором непрямого действия [4]. Измерителем служит манометрическая трубка 1, шарнирно связанная с рычагом 2, который несет на себе заслонку 10 усилителя типа «сопло-заслонка». Питание рабочего воздуха к пневмоэлементу подается через пневмосопротивление 9. Давление, устанавливаемое между элементами 9 и 10, является выходным. Оно через пневмоусилитель второго каскада 8 передается к сервомотору 7 регулирующего органа и в наружную полость сильфона 4 жесткой отрицательной обратной связи регулятора. Давление в сильфоне 4 изменяется одновременно с входным и приводит к появлению на рычаге 2 момента, противоположного по знаку моменту со стороны трубки 1. Система приходит в равновесие, когда на рычаге 2 момент со стороны измерителя 1 уравнивается моментом со стороны штока 3 обратной связи. Поэтому каждому значению давления  $P_{вх}$  на входе регулятора соответствует определенное давление  $P_{вых}$  на выходе. Следовательно, в статическом регуляторе любое новое положение регулирующего органа может иметь место только при другом, отклонившемся значении параметра; пропорциональным регуляторам свойственно такое регулирование, когда при колебаниях нагрузки регулируемый параметр отклоняется от заданного значения и не может к нему возвратиться на величину остаточного отклонения.

## § 16. Пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор)

Ранее рассмотренные регуляторы с И- и П-законами регулирования отличаются совершенно противоположными положительными свойствами. Целесообразно создать регулятор, в котором сочетались бы положительные свойства обоих регуляторов. Поэтому в П-закон регулирования вводится воздействие по интегралу, и уравнение ПИ-регулятора принимает вид

$$y(t) = k_c \left( x(t) + \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t x(t) dt \right).$$

Согласно этому скорость перемещения регулирующего органа будет пропорциональной скорости отклонения и отклонению регулируемого параметра, т.е.

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_c \left[ \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{T_{\text{и}}} x(t) \right].$$

Поэтому единственное условие равновесия регулятора  $[dy(t)/dt = 0]$  — отсутствие отклонения регулируемого параметра  $x(t) = 0$ . Следовательно, в этом случае нет статической ошибки и регулятор становится астатическим, обладая достоинствами И- и П-регуляторов. (Переходная характеристика ПИ-регулятора при внесении возмущения на входе скачком описывается уравнением

$$y(t) = k_c \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{и}}} t \right) x_0 \quad (49)$$

Функциональная структурная схема регулятора показана на рис. 29, а. Принципиальная схема ПИ-регулятора угловой скорости вращения ротора паровой турбины показана на рис. 30, а. При заданном установившемся значении скорости вращения ротора турбины рычаг, связывающий муфту центробежного датчика (ЦД) с золотником,

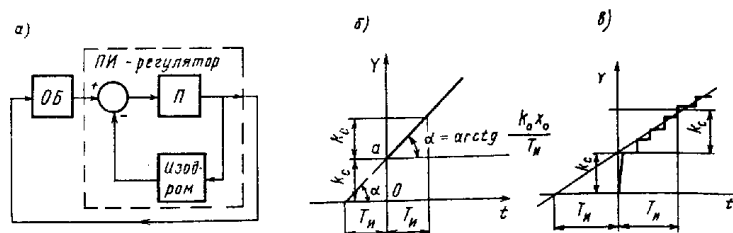


Рис. 29

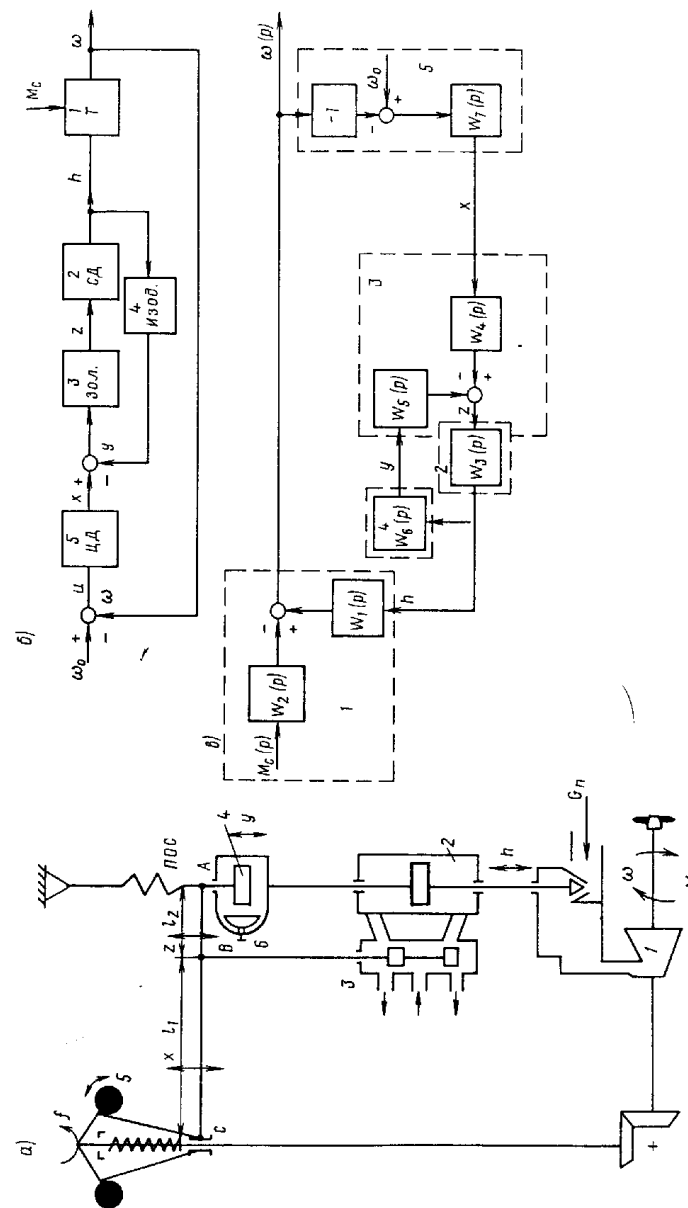


Рис. 30



находится в горизонтальном положении, обе трубки от золотника 3 к серводвигателю 2 перекрыты, поршень серводвигателя неподвижен, пружина обратной связи расслаблена.

Пусть теперь скорость вращения  $\omega$  ротора турбины изменится, например, увеличится. Тогда муфта ЦД 5 пойдет вверх, поворачивая рычаг вокруг точки А. Это приведет к тому, что точка В пойдет вверх, приоткрывая окна золотника таким образом, что масло начнет поступать в верхнюю полость серводвигателя и его поршень начнет перемещаться вниз, прикрывая клапан на линии подвода пара к турбине. Одновременно начнет перемещение вниз и стакан изодрома 4, который, увлекая за собой расположенный в нем поршень, будет стремиться сместить точку вниз, навстречу ее перемещению, вызванному движением муфты ЦД. При перемещении поршня серводвигателя (ПОС) вниз давление масла под поршнем изодрома 4 растет и масло начинает перетекать из нижней полости изодрома в верхнюю через дроссель 6. Когда давление в верхней и нижней полостях изодрома выравнивается, эффект действия изодрома (гибкой обратной связи) исчезает, а ПОС возвращается в расслабленное состояние, поднимая точку А, и золотник поворачивая рычаг вверх относительно точки С, возвращается в среднее положение. Такая обратная связь получила название исчезающей или гибкой. Однако первоначальное ее название, которое широко используется и сейчас, — изодромная обратная связь, а сам регулятор — изодромный.

Обычно действие корректирующей обратной связи подбирается таким образом, что в процессе регулирования шток золотника совершает лишь небольшие отклонения от среднего значения, поэтому перемещение поршня обратной связи в любой момент времени является пропорциональным смещению муфты ЦД, с коэффициентом пропорциональности  $k_c = l_1/l_2$ . Вес интегральной составляющей регулятора определяется постоянной времени изодрома  $T_i$ . Требуемые значения  $T_i$  устанавливаются изменением гидравлического сопротивления дросселя 6, снабженного игольчатым клапаном. На рис. 31 приведена схема пневматического ПИ-регулятора непрямого действия для регулирования давления в емкости [4]. Измерителем служит манометрическая трубка 1, свободный конец которой шарнирно связан с горизонтальным рычагом 2, пневмопреобразователь типа «сопло-заслонка» 10 имеет предвключенный дроссель 9. Между элементами 9 и 10 устанавливается выходное давление, которое через пневмоусилитель 8 передается к сервомотору 7 регулирующего клапана, а также в систему обратной связи.

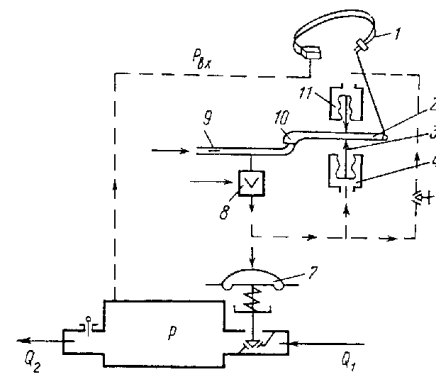


Рис. 31

Пропорциональная составляющая формируется за счет сигнала, поступающего в наружную полость сильфона 4. Давление в этой полости изменяется одновременно с выходным и приводит к появлению на рычаге 2 момента, который противоположен по знаку моменту со стороны трубки 1. За счет действия жесткой обратной связи изменение выходного сигнала  $\Delta y_1(\Delta P_{\text{вых}})$  пропорционально изменению входного  $\Delta x(\Delta P_{\text{вх}})$ , т.е.

$$\Delta y_1 = k_c \Delta x \quad (50)$$

Интегральная составляющая формируется за счет сигнала, поступающего в наружную полость сильфона 11 через дроссель 5. Эффект действия дросселя состоит в замедлении процесса накопления в этой полости давления, уменьшающего действие пропорциональной составляющей до ничтожно малой величины. Изменение давления в полости сильфона 11 приводит к появлению на рычаге 2 момента, совпадающего по знаку с моментом со стороны измерителя 1, в результате чего выходное давление регулятора дополнительно изменяется на некоторое значение в том же направлении, что и от входного сигнала  $\Delta x(P_{\text{вх}})$ , уменьшая неравномерность. Давление в сильфонах 4 и 11 выравнивается, когда регулирующая величина (давление) возвращается к значению, предшествовавшему возмущенному состоянию, а управляющее воздействие  $\Delta y(P_{\text{вых}})$  достигает значения, соответствующего новой нагрузке. Таким образом ПИ-регулятор обеспечивает постоянство регулируемой величины на всех нагрузках, т.е. астатическую характеристику регулирования. Действие интегральной составляющей определяется степенью открытия дросселя 5 и равно:

5-415

$$\Delta y_2(\Delta P_{\text{вых}2}) = \frac{k_c}{T_n} \int_0^t \Delta x(P_{\text{вх}}) dt.$$

Поэтому

$$y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = k_c \left( x + \frac{1}{T_n} \int_0^t x dt \right).$$

Таким образом, ПИ-регулятор обладает двумя параметрами настройки —  $k_c$  и  $T_n$ .

Переходная характеристика ПИ-регулятора согласно уравнению (49) показана на рис. 29, б. Как видно из переходной функции пропорциональная составляющая (0 а) и интегральная четко различны. Постоянная времени интегрирования  $T_n$  в данном случае определяет продолжительность периода выравнивания давлений в полостях сильфонов 4 и 11. Иногда  $T_n$  называется временем удвоения. Это время, в течение которого выходная координата достигает удвоенного значения за счет действия пропорциональной составляющей.

В тех случаях, когда в регуляторе используется гидравлический или пневматический серводвигатель, выходная характеристика регулятора будет иметь вид, показанный на рис. 29, б. Если исполнительном механизме регулятора используется серводвигатель с постоянной скоростью вращения (асинхронные электродвигатели), то переходная характеристика регулятора имеет вид, показанный на рис. 29, в. Вначале происходит перемещение выходного вала серводвигателя с постоянной скоростью до значения  $k_c$ , потом начинается скользящий режим работы, т.е. режим кратковременного включения серводвигателя. При этом регулятор автоматически выбирает соотношение между длительностью включения и паузами таким образом, что выходная величина меняется постоянной средней скоростью, обратно пропорциональной  $T_n$ . Алгоритм работы ПИ-регулятора можно получить из алгоритма ПИ-регулятора, если в последнем устремить  $T_n \rightarrow \infty$ , т.е. закрыть дроссель 5 (см. рис. 31). Все ранее приведенные рассуждения и полученные решения (49) и (50) рассмотрены с точки зрения принципиальных особенностей закона регулирования, т.е. мы рассматривали идеальный ПИ-регулятор. Что же касается существующих регуляторов, их элементы обладают определенной инерционностью, а это формирует их реальные динамические характеристики.

Поэтому рассмотрим передаточную функцию гидравлического регулятора, приведенного на рис. 30. Согласно его структурной схеме (рис. 30, в) запишем, что передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_p^{\text{ПИ}}(p) = \frac{W_3(p) W_4(p) W_7(p)}{1 + W_3(p) W_6(p) W_5(p)}.$$

Подставим значения передаточных функций элементов и после ряда преобразований запишем:

$$W_p^{\text{ПИ}}(p) = \frac{h(p)}{\omega(p)} = \frac{k_7 k_3 k_4 k_5 (T_n p + 1)}{p (T_3^2 p^2 + T_4 p + 1) [(T_n p + 1) T_2 + k_6 k_5 k_3]}.$$

Если пренебречь постоянными времени измерителя  $T_3$  и  $T_4$ , т.е.  $T_3 = T_4 = 0$ , получим:

$$W_p^{\text{ПИ}}(p) = \frac{k_3 k_7 k_4 k_5 (T_n p + 1)}{p [(T_n p + 1) T_2 + k_6 k_5 k_3]}.$$

Даже в этом случае дифференциальное уравнение ПИ-регулятора будет второго порядка. В эксплуатационных условиях можно изменить время изодрома  $T_n$  дросселем 6. Если настроить  $T_n = 0$ , то, как видно из передаточной функции, регулятор становится И-регулятором.

В передаточной функции  $k_3 = \beta T_n$ , где  $\beta$  — конструктивная характеристика изодрома, равная  $z_{\text{max}}/y_{\text{max}}$  (отношение максимального перемещения поршня изодрома к максимальному перемещению цилиндра или поршня серводвигателя) [3]. Если пренебречь  $T_2$ , то

$$W_p(p) = \frac{(T_n p + 1) k_7 k_4}{p k_6} = \frac{k_4 k_7 (T_n p + 1)}{\beta T_n p},$$

где  $k_4 k_7 / \beta k_6$  — интеграл от передаточной функции, характеризующий отклонение выходной координаты регулятора (перемещение клапана), при изменении входной координаты угловой скорости вращения примет вид  $h(t) = k_c (1 + (1/T_n) \int_0^t \omega dt)$ . Полученное уравнение при  $T_3 = T_4 = T_2 = 0$  становится уравнением идеального ПИ-регулятора.

Таким образом, ПИ-регулятор находит применение с устойчивыми и неустойчивыми объектами регулирования, обладает нулевой неравномерностью и двумя параметрами настройки, что существенно расширяет возможности его использования.

## § 17. Пропорционально-дифференциальный регулятор

В пропорционально-дифференциальном регуляторе (ПД-Регуляторе) регулируется отклонение параметров, при этом не только величина отклонения, но и его скорость, т.е.

$$y(t) = k_c x(t) + k_d \frac{dx(t)}{dt} = k_c \left( x(t) + T_d \frac{dx(t)}{dt} \right).$$

Согласно полученному выражению скорость регулирующего воздействия зависит не только от скорости изменения регулируемого параметра, но и от ускорения (второй производной):

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_c \left( \frac{dx(t)}{dt} + T_d \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right).$$

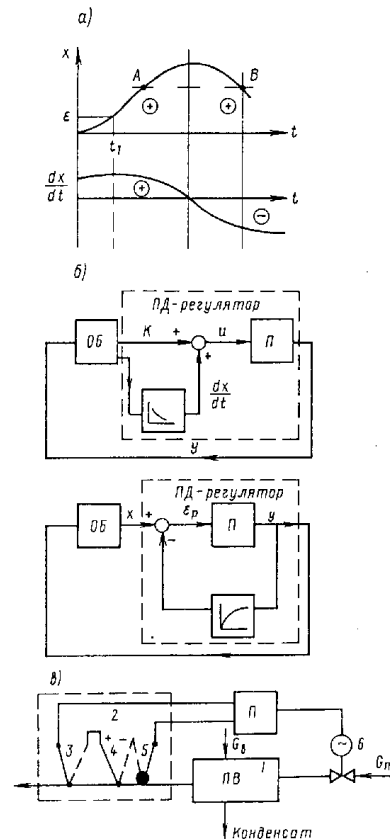


Рис. 32

в случае, когда отклонение регулируемого параметра еще только формируется (т.е. оно само и его скорость очень малы), но приложенное возмущение значительно, вторая производная отклонения параметра во времени тоже значительна. Физический смысл введения производной в закон регулирования можно пояснить на следующем примере (рис. 32, а). Регулятор по отклонению вследствие неидеальности (нечувствительности и инерционности) датчика вступает в действие, когда отклонение регулируемого параметра достигает некоторой величины: регулятор вступит в действие не во время  $t_0$ , а во время  $t_1$ , т.е. с некоторой задержкой. Кроме этого, регулятор по отклонению выдает воздействие на объект в точках А и В одинаковое по величине и направлению. Между тем полезно было бы, чтобы в точке А регулятор действовал сильнее для более эффективного противодействия нежелательному возрастанию отклонения регулируемой величины, а в точке В — слабее для предупреждения перерегулирования, т.е. возможного перехода кривой  $x$  через нуль в противоположном направлении. Обе эти цели достигаются введением производной в закон регулирования, так как регулятор реагирует на  $x$  и  $dx/dt$ . При этом действия регулятора проявляются сильнее в точке А ( $x$  и  $dx/dt$  одного знака — сигналы складываются) и слабее в точке В ( $x$  и  $dx/dt$  разных знаков — сигналы вычитаются).

В результате уменьшается максимум отклонения  $x$  и тормозится приближение  $x$  к нулю, что увеличивает степень затухания переходного процесса и ликвидации нежелательных колебаний регулируемой величины, если они до введения производной имели место.

Однако в таком регуляторе при  $x = x_0 = \text{const}$  по-прежнему  $dy/dt = 0$ , т.е. отклонение не устраняется, появляется остаточное отклонение параметра. Регулятор статический. Таким образом, введением производной улучшаются динамические характеристики САР.

Существуют два способа использования ПД-воздействия при формировании управляющего сигнала. При первом способе сигнал по производной используется как дополнение сигнала по отклонению, формируясь в отдельном датчике (см. рис. 32, б).

Регуляторы, построенные таким образом, получили наименование регуляторов с воздействием по производной. Второй способ основан на использовании сигнала по производной для кратковременной работы в начале переходного процесса с выключенной обратной связью (т.е. регулятор с инерционной обратной связью). В результате этого регулирующее воздействие на объект достигает максимального значения уже в этот начальный период. Далее по мере того, как отклонение регулируемой величины нарастает, это воздействие

уменьшается до значения, соответствующего пропорционально составляющей.

К первому способу можно отнести систему регулирования температуры, в которой чувствительным элементом, измеряющим отклонение температуры, является термопара, а чувствительным элементом, измеряющим скорость отклонения температуры, является скоростная термопара, которые включаются в батарею термопар. Формируют датчик, регистрирующий как отклонение, так и скорость отклонения регулируемого параметра (рис. 32, в), где 1 — объект регулирования (подогреватель воздуха); 2 — датчик температуры; 3—4 — обыкновенная термопара; 5 — термопара с массивным спаем; 4—5 — скоростная термопара; 6 — электромоторный серводвигатель.

Предположим, в установившемся режиме температура воздуха постоянная  $Q_a = 30^\circ\text{C}$ . При этом термопары 3, 4 и 5 вырабатывают одинаковую по величине ЭДС (20 мВ). Но термопары 4 и 5 компенсируют друг друга, и в регулятор поступает сигнал, равный 20 мВ, т.е. суммарная ЭДС равна:  $\sum E_d = 20 \text{ мВ} + 20 \text{ мВ} - 20 \text{ мВ} = 20 \text{ мВ}$ . Регулятор пропорционально сигналу  $e_3 = 20 \text{ мВ}$  вырабатывает регулирующее воздействие 6, и регулирующий орган занимает определенное положение, подавая такое количество пара, при котором воздух нагревается до  $Q_a = 30^\circ\text{C}$ .

Предположим, температура воздуха на выходе стала увеличиваться (уменьшился расход воздуха на теплообменник) с постоянной скоростью. Термопары 3 и 4 практически мгновенно измерили изменение температуры и выдали сигнал  $e_{3,4} = 23 \text{ мВ}$ , а термопара 5 за счет массивного спаи идет медленнее и  $e_5 = 21 \text{ мВ}$ , поэтому  $\sum E_d = 23 + 23 - 21 = 25 \text{ мВ}$ . Если бы была только одна термопара 3, то  $E_d = 23 \text{ мВ}$ , т.е. регулятор в этот момент получал усиленный (опережающий) сигнал и перемещает клапан на большую величину, уменьшая этим самым отклонение параметра от заданного.

В случае понижения температуры процедура формирования сигнала имеет обратный характер, т.е. при понижении температуры регулирующий сигнал будет  $\sum E_d = 18_3 + 18_4 - 20_5 = 16 \text{ мВ}$ , а если бы была одна термопара 3, то  $\sum E_d = 18 \text{ мВ}$ . Таким образом, при понижении температуры регулятор получает пониженный сигнал и на меньшую величину перемещает регулирующий орган.

Однако регулирование по второму способу нашло более широкое применение в судовой энергетике, так как гораздо проще реализовать инерционную обратную связь, чем создать датчик, измеряющий скорость изменения параметра.

Сущность регулирования по второму способу заключается в следующем. Имеется система регулирования, которая в статическом не отличается от САР с пропорциональным регулятором.

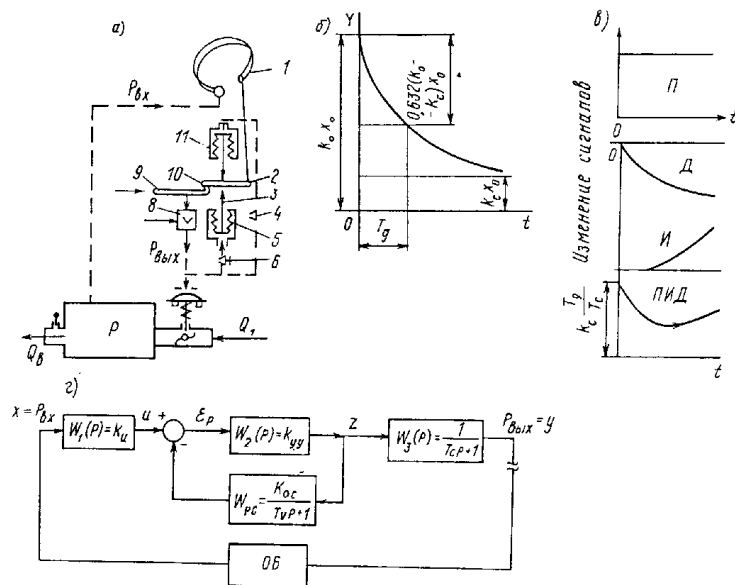


Рис. 33

Однако в момент, когда система подвергается возмущению и возникает переходный процесс, обратная связь в ней временно выключается. В результате этого коэффициент усиления становится большим и изменения регулирующего воздействия (значит, и положения регулирующего органа) значительно превышают изменения, которые произошли бы при тех же обстоятельствах в системе с пропорциональным регулятором. По мере отклонения регулируемой величины отключенная обратная связь вводится вновь; этот процесс протекает со скоростью, пропорциональной производной от отклонения. Переходный процесс заканчивается так же, как и в системе с пропорциональным регулятором. Функциональная схема такой САР показана на рис. 32, б, а сам регулятор — на рис. 33, а.

Регулятор, показанный на рис. 33, а, будет работать в режиме ПД-регулятора, если полностью закрыть дроссель 4, а наружную полость сильфона 11 сообщить с атмосферой. Величина управляющего сигнала, устанавливающегося между пневмосопротивлением 9 и элементом «сопло-заслонка» 10, зависит от зазора между соплом и заслонкой. Полное изменение этого сигнала соответствует приращению зазора между соплом и заслонкой, измеряемому десятками

долями миллиметра. Поэтому при бездействии обратной связи регулятора даже небольшие изменения входного сигнала (давление  $P_{\text{вх}}$ ) способны вызвать весьма существенные изменения выходного давления  $P_{\text{вых}}$  ( $y$ ).

Выходной сигнал  $P_{\text{вых}}$  после пневмоусилителя 8 подается к серводвигателю 7 регулирующего органа и в систему обратной связи, образованную дросселем 6, сильфоном 5 и штоком 3, упертым в рычаг 2.

В статике (когда давление воздуха по обе стороны дросселя выравнивается) регулятор работает как пропорциональный, а в динамике (в начальный период переходного процесса), когда действие обратной связи заблокировано дросселем 6, — с очень большим коэффициентом усиления. По мере уменьшения разности давления на дросселе 6 коэффициент усиления уменьшается, возвращаясь к такому же значению, как при пропорциональном регуляторе.

Предположим, что входное давление регулятора увеличилось на величину  $\Delta P_{\text{вх}}$ , это приведет в начальный момент к резкому уменьшению зазора между соплом и заслонкой 10, так как отрицательная обратная связь из-за дросселя 6 еще не вступила в работу. При этом давление на выходе регулятора будет:

$$\Delta P_{\text{вых}} = k_D \Delta P_{\text{вх}}. \quad (51)$$

На ту же величину в это время увеличится и давление сжатого воздуха перед дросселем 6. Давление в наружной полости сильфона 5 будет нарастать со скоростью, пропорциональной степени открытия и разности давления по обе стороны дросселя.

Скорость нарастания давления в камере сильфона 5

$$T_d \frac{d\Delta P_c}{dt} + \Delta P_c = \Delta P_{\text{вых}}, \quad (52)$$

где  $T_d$  — постоянная времени дифференцирования, которая прямо пропорциональна объему наружной полости сильфона 5 и обратно пропорциональна степени открытия дросселя 6.

К концу переходного процесса выходное давление  $P_{\text{вых}}$  регулятора изменится на величину

$$\Delta P_{\text{вых}} = k_c \Delta P_{\text{вх}}. \quad (53)$$

Поэтому, решая уравнение (52) с учетом уравнений (51) и (53) при начальных условиях  $t = 0$ ,  $y(0) = k_y$ , получим:

$$y(t) = \left[ (k_D - k_c) e^{-t/T_d} + k_c \right] x_0. \quad (54)$$

Переходный процесс согласно уравнению (54) при изменении давления на входе регулятора  $x_0(\Delta P_{\text{вх}})$  скачком показан на рис. 33, б.

Теперь рассмотрим регулятор, показанный на рис. 33, а, как реальный регулятор со структурной схемой, приведенной на рис. 33, г. Запишем передаточные функции элементов регулятора:

$$W_1(p) = \frac{k_{y,y} T_d p + k_{y,y}}{T_d p + (1 + k_{y,y} k_{o,c})};$$

$$W_p(p) = \frac{k_n (k_{y,y} T_d p + k_{y,y})}{T_c T_d p^2 + [T_c (1 + k_{y,y} k_{o,c}) + T_d] p + 1 + k_{y,y} k_{o,c}}.$$

Если принять, что  $k_{y,y} = 1$ , тогда

$$W_p(p) = \frac{k_n T_d p + k_n}{T_c T_d p^2 + [T_c (1 + k_{o,c}) + T_d] p + (1 + k_{o,c})}.$$

Таким образом мы получим передаточную функцию реального пропорционального регулятора.

Если постоянной времени сервомотора  $T_c$  пренебречь, то

$$W_p(p) = \frac{k_n (T_d p + 1)}{T_d p + (1 + k_{o,c})} = \frac{T_d p + 1}{\frac{1}{k_n} T_d p + \frac{1 + k_{o,c}}{k_n}},$$

где  $1/k_n = \delta_n$  — степень неравномерности измерителя;  $(1 + k_{o,c})/k_n = \delta_p$  — степень неравномерности регулятора.

$$\text{Тогда } W_p(p) = \frac{T_d p + 1}{\delta_n T_d p + \delta_p}.$$

Решение дифференциального уравнения, соответствующего данной передаточной функции и определяющего связь  $P_{\text{вых}}$  с  $P_{\text{вх}}$ , будет иметь вид

$$y(t) = \left[ \frac{1}{\delta_p} - \frac{1}{\delta_p} e^{-\frac{\delta_p}{\delta_n T_d} t} + \frac{1}{\delta_n} e^{-\frac{\delta_p}{\delta_n T_d} t} \right] x_0,$$

где  $1/\delta_p = k_c$ ,  $(1/\delta_n) = k_D$ , т.е. в первоначальный момент времени, когда отключена обратная связь, на рычаг 2 (см. рис. 33, а) действует только измерительный элемент, создавая максимальное воздействие на объект, беспрепятственно перемещая заслонку относительно сопла и обеспечивая максимальный коэффициент усиления:

$$y(t) = \left[ (k_D - k_c) e^{-\frac{\delta_p}{\delta_n T_d} t} + k_c \right] x_0,$$

т.е. мы получим ту же зависимость (54).

## § 18. Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор

Рассмотрев ПД-регулятор, мы видим его преимущества в улучшении динамических характеристик САР. Статические его свойства определяются пропорциональной составляющей, создающей в системе остаточную неравномерность. Поэтому желание улучшить статические свойства регулятора и использовать достоинства всех рассмотренных выше законов регулирования привело к созданию комбинированного пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора (ПИД-регулятора) с уравнением вида

$$y(t) = k_c \left( x(t) + T_d \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{T_n} \int_0^t x(t) dt \right). \quad (55)$$

Скорость перемещения регулирующего органа

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_c \left( \frac{dx(t)}{dt} + T_d \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{T_n} x \right).$$

Видно, что скорость перемещения регулирующего органа прямо пропорциональна отклонению регулируемого параметра  $x$ , вследствие чего остаточное отклонение равно нулю. Наличие воздействия по производной создает работу регулятора с предварением. Устройство такого регулятора показано на рис. 33, а. Это уже знакомая по анализу П-, ПИ-, и ПД-регуляторов схема, которая является их обобщением. Если полностью открыть дроссель 6, получим пропорционально-интегральный регулятор, а если перекрыть дроссель 4, а наружную полость сильфона сообщить с атмосферой, то получим ПД-регулятор. И наконец, если перекрыть дроссель 4 и полностью открыть дроссель 6, получим пропорциональный регулятор. У ПИД-регулятора дроссель 4 служит для настройки постоянной  $T_n$  времени интегрирования, а дроссель 6 — постоянной  $T_d$  — времени дифференцирования. Взаимодействие элементов регулятора при увеличении входного сигнала  $x(P_{\text{вх}})$  показано на рис. 33, в. В начальный период процесса выходное давление  $y(P_{\text{вых}})$  увеличится, как у регулятора, не имеющего обратной связи, поскольку из-за дросселей 4 и 6 (см. рис. 33, г) давление воздуха в сильфонных камерах не изменяется. Последующее накопление давления сжатого воздуха в этих камерах происходит с различной скоростью, поэтому дифференциальная составляющая создает дополнительные ускорения управляющего (выходного) сигнала, а интегральная проявляет себя несколько позже и обеспечивает нулевую (или весьма малую) нерав-

номерность регулирования. Согласно выражению (55) передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид  $W_p(p) = k_c (1 + T_n p + 1/T_d p^2)$ , или

$$W_p(p) = \frac{k_c (T_d T_n p^2 + T_n p + 1)}{T_n p}. \quad (56)$$

Как непосредственно следует из формулы (56), точная реализация ПИД-регулятора невозможна, поскольку степень полинома числителя оказывается выше степени полинома знаменателя. Решение (56) приводит к наличию дельта-функции, т.е.  $y(t) = k_c [1 - (1/T_n)t]x_0 + k_c T_d \delta(t)$ . Поэтому в структуре реальных ПИД-регуляторов всегда имеется более или менее одно ярко выраженное инерционное звено, с учетом которого передаточная функция (56) будет иметь вид

$$W_p(p) = \frac{k_c (T_d T_n p^2 + T_n p + 1)}{T_n (T_c p + 1)}. \quad (57)$$

В нашем примере (см. рис. 33, а) таким звеном является мембранный исполнительный механизм 7. В этом случае в решении уравнения регулятора (57) будет отсутствовать дельта-функция:

$$y(t) = k_c \left[ 1 - (1/T_n)t + (T_d/T_c) e^{-\frac{t}{T_c}} \right] x_0.$$

Переходная характеристика, построенная по данной формуле, будет иметь такой вид, как показано на рис. 33, в.)

## § 19. Регуляторы с компенсацией возмущений или регуляторы с дополнительным импульсом по нагрузке

Как уже отмечалось ранее, система управления является разомкнутой (рис. 34, а) и в такой системе генерироваться колебания не могут, если обеспечивается  $x = x_0$ , при этом  $x = W_p(p) W_o(p) x_0$ . Однако для обеспечения  $x = x_0$  необходимо, чтобы  $W_p(p) W_o(p) = 1$ , где  $W_p(p)$  — передаточная функция регулятора;  $W_o(p)$  — передаточная функция объекта. Следовательно,

$$W_p(p) = 1 / W_o(p). \quad (58)$$

В идеальных условиях, когда нет возмущений, это условие выполнимо. При наличии внешних возмущающих воздействий система, показанная на рис. 34, а, становится неработоспособной. При наличии возмущений (рис. 34, б) в системе управления объект будет рассматриваться по двум каналам — по возмущающему воздействию

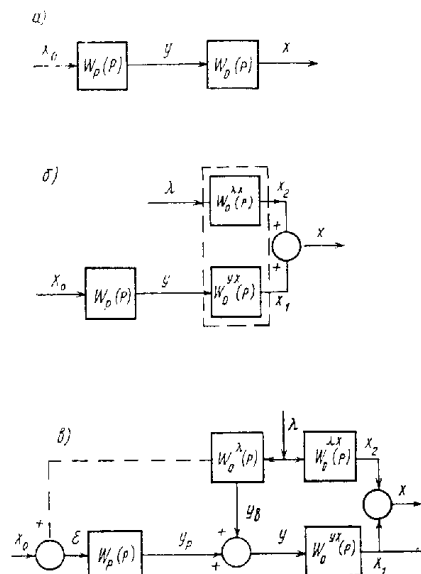


Рис. 34

$W_o^{\lambda x}(p)$  и по регулируемому воздействию  $W_o^{yx}(p)$  с соответствующими передаточными функциями.

При этом можно записать:  $x = W_p(p) W_o^{yx}(p) x_0 + W_o^{\lambda x}(p) \lambda_0$ . Для выполнения условий (58) необходимо скомпенсировать внешнее возмущение.

Рассмотрим структурную схему рис. 34, в, на которой показано устройство ввода с передаточной функцией  $W_o^{\lambda x}(p)$ , подающее сигнал, соответствующий возмущающему воздействию как на объект, так и в систему регулирования. В этом случае управляющий сигнал на объект  $y = y_p + y_p$ . Весь смысл заключается в том, чтобы синтезировать передаточную функцию  $W_o^{\lambda x}(p)$  такой, которая позволит скомпенсировать воздействия внешних возмущений. При этом возможны две схемы: 1) выходной сигнал устройства ввода возмущающего воздействия подается на объект (канал  $\lambda - y_p$ , рис. 34, в); 2) выходной сигнал устройства ввода возмущения передается на вход регулятора (канал  $\lambda - y_p$ , рис. 34, в).

Синтез структуры компенсации возмущения и передаточной функции устройства ввода определяется свойствами объекта управления. В системах регулирования турбин сигнал устройства ввода возмущения подается на объект, а в котлах — на регулятор, так

как выходной сигнал  $W_o^{\lambda x}(p)$  маломощный и усилитель устройства управления используется для усиления также сигнала компенсации:  $x = x_1 + x_2 = W_o^{\lambda x}(p) \lambda + W_o^{yx}(p) y$ , где  $y = y_p + y_p = W_p(p) x_0 + W_o^{\lambda x}(p) \lambda_0$ . Отсюда  $x = W_o^{yx}(p) W_p(p) x_0 + W_o^{yx}(p) W_o^{\lambda x}(p) \lambda_0 + W_o^{\lambda x}(p) \lambda$ .

Для обеспечения  $x = x_0$  необходимо, чтобы

$$\left. \begin{aligned} W_o^{yx}(p) W_p(p) &= 1; \\ W_o^{yx}(p) W_o^{\lambda x}(p) + W_o^{\lambda x}(p) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем условия инвариантности относительно внешних возмущающих воздействий.

1. Для первой схемы устройство ввода должно иметь передаточную функцию

$$W_o^{\lambda x}(p) = -\frac{W_o^{\lambda x}(p)}{W_o^{yx}(p)}.$$

2. Для второй схемы устройство ввода должно иметь передаточную функцию

$$W_o^{\lambda x}(p) = -\frac{W_o^{\lambda x}(p)}{W_p(p) W_o^{yx}(p)},$$

если  $W_o^{yx}(p) W_p(p) = 1$ , то  $W_o^{\lambda x}(p) = -W_o^{\lambda x}(p)$ .

Однако надо помнить, что добиться полной инвариантности невозможно, так как параметры объекта и возмущающего воздействия — переменные в процессе эксплуатации.

При учете основных возмущений и высокой точности компенсации система оказывается работоспособной, если объект обладает большим самовыравниванием. Однако разомкнутые системы с компенсацией способны устранить воздействие на систему большей части внешних возмущений. Влияние остальных возмущений будет скомпенсировано действием замкнутой САР, которая определит работоспособность системы, а разомкнутая система с компенсацией возмущений выступит в роли корректирующей системы с целью улучшения характеристик САР.

**Система регулирования уровня воды в барабане котлов как пример комбинирования САР.** Функциональная структурная схема автоматической системы регулирования в барабане котла показана на рис. 35, а. Здесь РП — регулятор питания; ПП — пароперегреватель;  $G_n$  и  $G_a$  — массовый расход пара и воды;  $W_{\text{вв}}$  — устройство ввода внешнего возмущения, расход пара;  $\lambda$  — возмущение;  $Q$  —

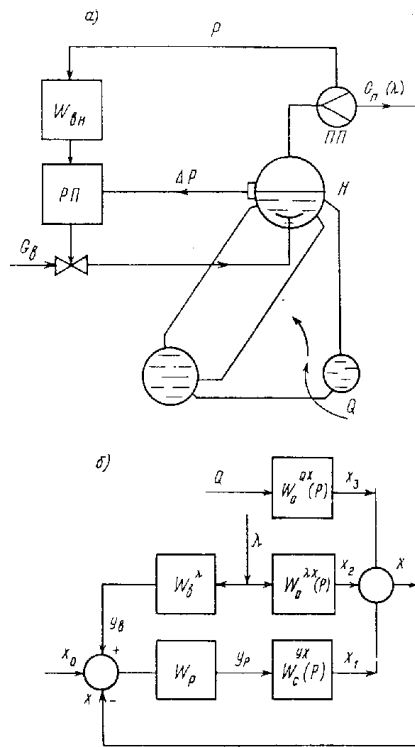


Рис. 35

возмущающее воздействие по тепловой нагрузке;  $P$  — давление пара;  $\Delta P$  — перепад давления.

Сначала мы должны провести идентификацию котла как объекта регулирования и записать передаточные функции:  $W_0^{\lambda x}(p) = -1/(T_1 p)$  (при условии увеличения расхода пара);  $W_0^{yx}(p) = k_0/(T_1 p) (\Delta y k_p = \Delta G)$  — количество воды, подаваемой в котел — управляющее воздействие);  $W_0^{Qx}(p) = k_2/(T_2 p + 1)$  (по каналу изменения теплоподвода).

Структурная схема котла по регулированию приведена на рис. 35, б. Согласно структурной схеме можно записать:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = W_0^{\lambda x}(p)\lambda_0 + W_0^{yx}(p)y_p + W_0^{Qx}(p)Q;$$

$$y(p) = W_p(p)[(x_0 - x) + \lambda W_B^{\lambda}(p)].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= W_0^{\lambda x}(p)\lambda + W_0^{yx}(p)\{W_p(p)[(x_0 - x) + \lambda W_B^{\lambda}(p)]\} + \\ &+ W_0^{Qx}(p)Q = W_0^{\lambda x}(p)\lambda + W_0^{Qx}(p)Q + W_0^{yx}(p) \times \\ &\times W_p(p)x_0 - W_0^{yx}(p)W_p(p)x + W_0^{yx}(p) \times W_p(p)W_B^{\lambda}(p)\lambda. \end{aligned} \quad (59)$$

Чтобы внешнее возмущающее воздействие не оказывало влияния на  $x$  (регулируемый параметр), необходимо иметь

$$W_0^{\lambda x}(p) + W_0^{yx}(p)W_p(p)W_B^{\lambda}(p) = 0.$$

Отсюда передаточная функция устройства ввода внешнего воздействия будет иметь вид

$$W_B^{\lambda}(p) = -\frac{W_0^{\lambda x}(p)}{W_0^{yx}(p)W_p(p)}. \quad (60)$$

Рассмотрим возможности формирования данной функции для П- и ПИ-регуляторов соответственно:

1)  $W_p(p) = k_p$ ,  $W_0^{yx}(p) = k_0/(T_1 p)$ , поэтому

$$W_B^{\lambda}(p) = -\frac{-1/T_1 p}{k_0 k_p / T_1 p} = 1/k_0 k_p. \quad (61)$$

Реализация такого ввода (60) трудности не составляет.

2)  $W_p(p) = k_c(T_n p + 1)/(T_n p)$ ,

$$W_B^{\lambda}(p) = \frac{1/T_1 p}{\frac{k_0}{T_1 p} \left[ \frac{k_c(T_n p + 1)}{T_n p} \right]} = \frac{T_n p}{k_0 k_c(T_n p + 1)} = k \frac{T_n p}{T_n p + 1}, \quad (62)$$

где  $k = 1/k_c k_0$ . Таким образом, передаточная функция (62) соответствует реальному дифференцирующему звену, реализация которого показана на рис. 36, а.

Данную систему можно синтезировать инвариантной относительно возмущения по тепловоду  $Q$  (по подаче топлива в топку). При этом согласно выражению (59) можно записать:

$$W_B^{Qx}(p) = -\frac{W_0^{Qx}(p)}{W_0^{yx}(p)W_p(p)} = -\frac{k_2/(T_2 p + 1)}{\frac{k_0}{T_1 p} \frac{k_c(T_n p + 1)}{T_n p}} = -\frac{k_2}{k_0 k_c} \frac{T_1 p T_n p}{(T_n p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (63)$$



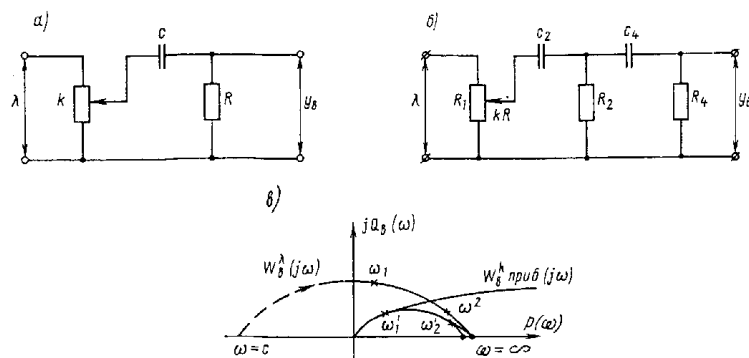


Рис. 36

Пусть  $T_1 = k_1 T_2$ . Тогда  $W_B^{\lambda}(p) = -k(T_2 p T_u p) / [(T_2 p + 1)(T_u p + 1)]$ , где  $k = (k_1 k_2) / (k_0 k_c)$ .

По сути, передаточная функция (63) представляет собой последовательное соединение трех звеньев — усилительного и двух дифференциальных. Реализация подобного звена показана на рис. 36, б, где  $c_2 R_2 = T_2$ ,  $c_4 R_4 = T_u$ . В случае сложности реализации функции ввода возмущающего воздействия  $W_B^{\lambda}(p)$  прибегают к реализации приближенной передаточной функции.

Для этого находим КЧХ передаточной функции ввода. Так как устройство ввода не входит в замкнутый контур САР, то частоты переходных процессов САР определяются свойствами элементов, входящих в замкнутый контур. Рассматривая КЧХ замкнутого контура, определяем  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — рабочий диапазон частот в замкнутом контуре. Зная этот диапазон рабочих частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для замкнутого контура, можно подобрать такое новое устройство ввода, КЧХ которого соответствовали бы КЧХ расчетного устройства ввода; т.е. теперь нас будут интересовать не все КЧХ устройства ввода, а только та часть, которая находится в диапазоне рабочих частот (как показано на рис. 34, в). Здесь КЧХ реального дифференциального звена ввода будет близка к КЧХ расчетного звена ввода. При этом инвариантность будет не полной, а с некоторой погрешностью (т.е. с инвариантностью до  $\varepsilon$ ).

На рис. 37, а показана принципиальная схема пропорционального регулятора уровня воды в котле с дополнительным импульсом по нагрузке (основному возмущающему воздействию), в котором реализована передаточная функция  $W_B^{\lambda}(p)$ .

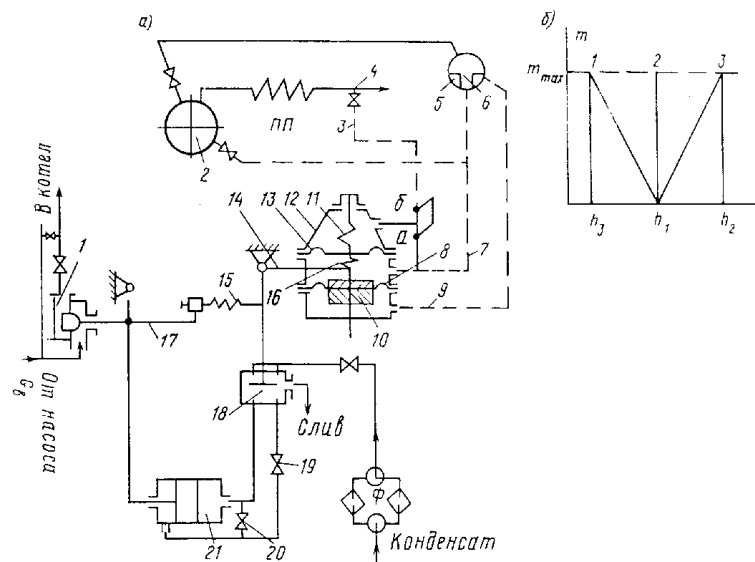


Рис. 37

Корпус измерительного устройства 12 разделен мембранами 8 и 13, измеряющими соответственно отклонения уровня и расхода пара, на три полости. Нижняя полость соединена трубопроводом 9 с конденсационным сосудом 5, средняя — трубопроводом 7 с водным пространством котла 2 и верхняя — трубопроводом 3 с паропроводом 4. Уровень в конденсационном сосуде поддерживается постоянным благодаря непрерывной конденсации в нем пара, поступающего из котла, и отводу конденсата через сливную трубку 6. Мембрана уровня, к которой прикреплен груз 10, рычажной системой жестко связана с заслонкой усилителя 18, расположенной между соплами. Мембрана расхода воздействует на усилитель через ту же рычажную систему с помощью импульсной пружины 16. Жесткая обратная связь, состоящая из рычажной системы и пружины 15, оказывает воздействие по положению поршня исполнительного механизма 21 или регулирующего органа 1 на валик 14, соединяющий измерительный орган и усилитель. Пружина 11 имеет переменную жесткость  $c_p$ , пропорциональную перемещениям  $m_p$  мембраны расхода, что достигается либо конической формой пружины, либо тем, что пружина собрана из нескольких рессорных пружин. Это обеспечивает равные относительные величины расхода пара и перемещения мембраны расхода и линейную статистическую характеристику регулятора.

На измерительное устройство действуют четыре силы — пружины обратной связи и импульсной, груза  $G$  и сила  $P_k$ , определяемая разностью столбов воды — постоянного  $H$  в конденсационном сосуде и переменного  $h$  в котле. Первые три силы стремятся переместить мембрану вниз и уравновешиваются  $P_k$ , поэтому

$$P_k = (H - h)F_y \rho, \quad (64)$$

где  $F_y$  — активная площадь мембраны уровня;  $\rho$  — плотность воды.

Заслонка усилителя в равновесном состоянии находится в среднем положении. Поэтому правая подвеска пружины обратной связи находится в одном и том же положении при любой установившейся нагрузке, а левая с увеличением открытия питательного клапана перемещается влево, увеличивая растяжение пружины. Сила воздействия пружины обратной связи на мембрану уровня  $P_0 c = c_0(z_0 + i_1 m_w) i_2$ , где  $c_0$ ,  $z_0$  — соответственно жесткость и начальная деформация пружины обратной связи (о.с.);  $i_1$ ,  $i_2$  — соответственно передаточные числа рычажных устройств, соединяющих шток питательного клапана с пружиной о.с. и последнюю с мембраной уровня;  $m_w$  — перемещение штока 17 отсчитываемое от его положения, соответствующего полному закрытию питательного клапана.

Мембрана уровня, жестко соединенная с заслонкой усилителя, в установившихся состояниях находится в одном и том же положении, а мембрана расхода будет перемещаться вверх пропорционально увеличению нагрузки или перемещению питательного клапана по линейной его расходной характеристике. При этом сжатие импульсной пружины уменьшится и сила воздействия на мембрану уровня будет  $P_n = c_n(z_n - b m_w)$ , где  $c_n$ ,  $z_n$  — соответственно жесткость и начальная деформация импульсной пружины;  $b$  — коэффициент пропорциональности между открытием питательного клапана и перемещением мембраны расхода.

В установившемся режиме работы регулятора сумма всех сил действующих в измерительном устройстве и приведенных к его осям, равна нулю, поэтому  $(H - h)F_y \rho - G - c_0(z_0 + i_1 m_w) i_2 - c_n(z_n - b m_w) = 0$ . Из этого уравнения получим:

$$\Delta m_w = \frac{F_y \rho}{bc_n - c_0 i_1 i_2} \Delta h, \quad (65)$$

или в безразмерных координатах  $y_i = k_c x$ , где  $y = \frac{\Delta m_w}{m_{w \max}}$ ;  $x = \frac{\Delta h}{h_{\max}}$ ;

$$k_c = \frac{F_y \rho h_{\max}}{(bc_n - c_0 i_1 i_2) m_{w \max}}.$$

Уравнение (65) показывает, что с увеличением уровня клапан 1 открывается, если  $bc_n > c_0 i_1 i_2$  (рис. 37, б, линия 3), и закрывается, если  $bc_n < c_0 i_1 i_2$  (линия 1). Регулятор становится астатическим при  $bc_n = c_0 i_1 i_2$ . Изменением  $i_1$  можно обеспечить любую статическую характеристику регулятора, а значит, и статическую характеристику САУ уровня воды в котле.

Изменение задания по уровню на определенную величину, постоянную для всех значений нагрузки, достигается путем изменения натяжения пружины 15 обратной связи, одновременно являющейся и задающим устройством. Коэффициент усиления по уровню определяется передаточным отношением рычажной системы 17 от клапана 1 к пружине 15.

Все сказанное выше позволило записать выражение (65) для статической характеристики регулятора по изменению уровня. Теперь определим выражение для статической характеристики по расходу пара, т.е. если уровень постоянен, то изменение усилия будет равно нулю (64). При увеличении расхода пара на измерительное устройство будут действовать тоже четыре силы, кроме силы  $P_k$ , хотя направление действия сил остается прежним, так как увеличение нагрузки пара приводит к перемещению вверх мембраны расхода. Отсюда можем записать, что  $P_k = (P_k - P_{\text{пп}})F_\lambda$ , где  $P_k$  — давление в котле;  $P_{\text{пп}}$  — давление за пароперегревателем;  $F_\lambda$  — активная площадь мембраны расхода. Перепад давления на пароперегревателе определяется на основании зависимости расхода пара через служащее устройство, откуда

$$P_k - P_{\text{пп}} = \Delta P = \frac{G_n^2}{\mu_{\text{пп}}^2 f^2 \rho_n}, \quad (66)$$

где  $G_n$  — расход пара;  $f$  — площадь проходного сечения пароперегревателя;  $\mu_{\text{пп}}$  — коэффициент расхода (сопротивление) пароперегревателя.

На основании формулы (66) запишем, что

$$P_k = \frac{G_n^2 F_\lambda}{\mu_{\text{пп}}^2 f^2 \rho_n}.$$

Подставим полученное значение в выражение баланса сил, действующих на измерительное устройство:

$$\frac{G_n^2 F_\lambda}{2 \mu_{\text{пп}}^2 f^2 \rho_n} - G - c_n(z_0 - i_1 m_w) i_2 - c_n(z_n - b m_w) = 0.$$

Из этого уравнения получим:

$$\Delta m_{\text{ш}} = \frac{G_{\text{п}} F_{\lambda} / \mu_{\text{пп}}^2 f^2 \rho_{\text{п}}}{b c_{\text{и}} - i_1 i_2 c_0}.$$

Данное выражение запишем в безразмерном виде:  $y = -k_{\lambda} \lambda$ , где

$$k_{\lambda} = \frac{k_{\text{пп}} F_{\lambda} G_{\text{п}}}{(c_{\text{и}} b - i_1 i_2 c_0) m_{\text{ш}}};$$

$k_{\text{пп}} = G_{\text{п}} / (\mu_{\text{пп}}^2 f^2 \rho_{\text{п}})$  — коэффициент пароперегревателя, определенный при номинальном расходе пара.

Таким образом,  $y = y_1 + y_2 = k_{\lambda} x - k_{\lambda} \lambda$ .

Динамические характеристики регулятора будут определяться инерционностью (постоянной времени) сервопривода, который является астатическим звеном, охваченным обратной связью. Действие обратной связи мы уже показали в выводе  $k_{\lambda}$  и  $k_{\lambda}$  регулятора, поэтому рассмотрим серводвигатель как звено, охваченное единичной обратной связью, и поэтому окончательно запишем:  $T(dy/dt) = dy/dt + y = k_{\lambda} x - k_{\lambda} \lambda$ .

## § 20. Показатели качества регулирования

При выборе регулятора следует прежде всего определить, исходя из условий технологического процесса в объекте регулирования, основные требования к переходному процессу, т.е. сформулировать необходимые требования к показателям качества регулирования.

Переходным процессом называется изменение во времени состояния динамической системы с момента приложения возмущения до начала установившегося движения. Если рассмотреть статический объект без регулятора, то, если возмущение конечно, самовывравнивание приостанавливает через некоторое время дальнейшее отклонение регулируемой величины от задания, однако возникшее при этом отклонение нового установившегося значения от заданного обычно технологически недопустимо.

Чтобы уменьшить отклонение или полностью устранить его, т.е. вернуть регулируемую величину после возмущения к заданному значению, необходимо ввести регулирующее воздействие, что и является задачей автоматического регулятора. Степень этого воздействия может быть различной, и она определяется типом регулятора и его настройками, при этом получается различный характер переходного процесса. Вид переходного процесса при регулировании, т.е. характер возвращения регулируемой величины к заданному значению после некоторого возмущения, определяет качество регулирования. [Оценка переходных процессов в

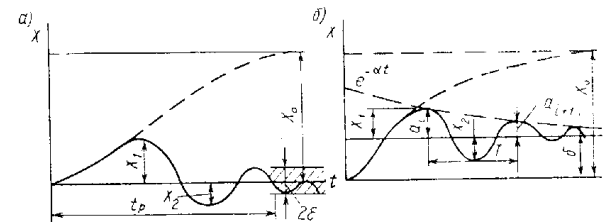


Рис. 38

устойчивых САР обычно определяется следующими показателями качества.

1. Максимальное динамическое отклонение  $x_1$  (или динамическая ошибка) — наибольшее отклонение регулируемой величины в переходном процессе относительно ее значения в новом равновесном состоянии. Определяется величиной  $x_1$ , приходящейся на единицу возмущения (рис. 38, где  $a$  — переходный процесс в астатической САР;  $b$  — переходный процесс в статической САР). Максимальное отклонение  $x_1$  часто рассматривается не в относительных величинах, а в абсолютных. Максимальное динамическое отклонение является важным показателем качества переходных процессов, допустимая величина которого определяется надежностью и экономичностью работы регулируемого объекта и обеспечивается соответствующей настройкой регулятора. Например, при регулировании давления пара в котле при полном сбросе нагрузки максимальное отклонение не должно превышать 3% рабочего давления в котле во избежание подрыва предохранительного клапана.

2. Степень воздействия регулятора, понижающего динамическое отклонение параметра, характеризуется динамическим коэффициентом регулирования  $R_d$ , который представляет собой отношение максимального отклонения регулируемой величины  $x_1$  от задания в переходном процессе регулирования к отклонению от задания  $x_0$  при том же возмущении, но без регулирующего воздействия:  $R_d = x_1/x_0 = x_1/k_{\text{ст}} y_{\text{с}}$ . Это выражение для статических объектов регулирования, а для астатических объектов  $R_d = \text{tg} \alpha_{\text{дин}} / (\text{tg} \alpha_{\text{ст}})$ .

3. Перерегулирование. Колебательность переходного процесса удобно характеризовать величиной перерегулирования — отношением второй, противоположной по направлению амплитуды колебаний  $x_2$  к первой максимальной амплитуде  $x_1$ , выраженное в процентах:  $\xi = (x_2/x_1) 100$ .

В зависимости от настроек регулятора величина перерегулирования изменится от 0% (апериодический переходный процесс) до 100% (автоколебательный процесс). Чем больше перерегулирование, тем больше  $x_2$  и тем больше длительность переходного процесса, но чем меньше  $x_2/x_1$ , тем меньше длительность переходного процесса.

4. Декремент затухания — отношение последующей амплитуды колебаний к предыдущей амплитуде одного знака:  $\chi = a_{i+1}/a_i$ . Затухание колебаний определяется множителем  $e^{-\alpha}$  (см. рис. 38, б), где  $\alpha$  — вещественная часть комплексного корня, который определяет уравнение огибающей  $x = e^{-\alpha t}$ . Мнимая часть этого корня  $\omega$  определяется из выражения периода колебаний  $T = 2\pi/\omega$ , поэтому указанное выражение можно записать:

$$\chi = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{e^{-\alpha(t+T)}}{e^{-\alpha t}} = e^{-\alpha T} = e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}}.$$

Мы видим, что декремент затухания определяется отношением действительной части  $\alpha$  комплексного корня к мнимой  $\omega$ . Поэтому этот показатель иногда называют корневым показателем качества. Качество колебательного процесса с декрементом  $\chi = 1/4$  и меньше считается хорошим, и значение  $\chi = 1/4$  (0,25) используется как стандартное в различных методиках выбора настроек САР. Близкой к данному показателю, характеризующей колебательность, является степень затухания колебаний  $\Psi = (a_i - a_{i+1})/a_i$  или  $\Psi = 1 - e^{-2\pi\alpha/\omega}$ . Величина  $\alpha/\omega = \tau$  называется корневым показателем колебательности, так как является отношением положительного значения вещественной части корня к мнимой.

5. Время переходного процесса (время регулирования)  $t_p$  определяется как время от начала переходного процесса, за которое отклонение регулируемой величины от ее заданного значения в новом установившемся состоянии становится меньше определенной величины  $\pm \varepsilon$  (обычно 5% максимального отклонения для астатических систем и соответственно статической ошибки — для статических). Время переходного процесса определяет быстроту действия системы.

6. Остаточное отклонение (статическая ошибка). Если регулятор не возвращает регулируемую величину к заданному значению и новое установившееся положение равновесия отличается от заданного, то в конце процесса регулирования имеет место остаточное отклонение (остаточная неравномерность)  $\delta$  (см. рис. 38, б).

Более информативными являются показатели качества, при которых оценки переходного процесса связаны с площадями, образованными этим процессом и осью времени. Показатели этого рода носят название интегральных и представляют собой откло-

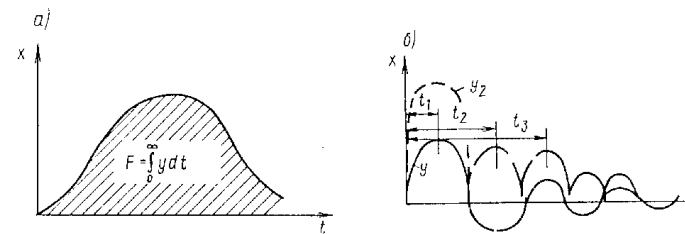


Рис. 39

нения действительных переходных процессов от идеальных, под которыми обычно понимаются ступенчатые процессы.

В случае, если известно, что переходный процесс представляет знакопостоянную функцию (рис. 39, а), его качество может быть оценено интегралом  $I = \int_0^{\infty} x dt$ , который выражает площадь под кривой переходного процесса.

Однако для колебательных процессов используются интегральные оценки, применяемые для знакопеременных функций:

1) интеграл от абсолютной величины отклонения

$$I_a = \int_0^{\infty} |x| dt, \quad (67)$$

2) от квадрата отклонения

$$I_{кв} = \int_0^{\infty} x^2 dt, \quad (68)$$

3) интеграл, учитывающий моменты площадей отклонений относительно оси ординат (рис. 39, б),

$$I_{ат} = \int_0^{\infty} x |t| dt. \quad (69)$$

Данная оценка рекомендуется для систем, находящихся под воздействием периодических помех (судовые САР в условиях качки).

В дальнейшем при предварительной оценке в выборе регулятора мы будем пользоваться понятиями оптимальных переходных процессов. Оптимальные (граничные) переходные процессы представлены на рис. 40, где:

а — граничный апериодический переходный процесс с минимальным временем регулирования  $t_{pmin}$  и максимальным динамическим отклонением  $x_{imax}$ ;

б — процесс с 20%-ным перерегулированием и минимальным временем первого отклонения;

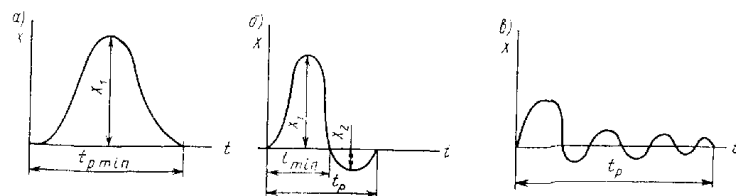


Рис. 40

в — процесс с минимальной квадратичной площадью отклонения, т.е.  $\min \int_0^{\infty} x^2 dt$ . Он отличается максимальным временем переходного процесса и минимальным динамическим отклонением  $x_{1min}$ .

## § 21. Выбор регулятора при проектировании систем автоматического управления

При выборе регулятора следует прежде всего определить необходимый вид регулирующего воздействия на объект — непрерывный, релейный или импульсный. Такой выбор может быть ориентировочно сделан по величине отношения запаздывания к постоянной времени объекта —  $\tau_s/T$ : непрерывный, если  $\tau_s/T < 1,0$ ; релейный, если  $\tau_s/T < 0,2$ ; импульсный, если  $\tau_s/T > 1,0$ . Затем необходимо выбрать закон регулирования (т.е. тип регулятора). Чтобы выбрать регулятор непрерывного действия (П, И, ПИ или ПИД), нужно знать:

- 1) динамические и статические характеристики объекта ( $\tau_s$ ,  $T$  и  $T_s$ ,  $k_{об}$ ). Если объект нелинеен и  $k_{об}$  изменяется в пределах эксплуатационных режимов, при расчете следует принимать наибольшее из возможных значений;
- 2) максимально возможные значения возмущающих воздействий;
- 3) необходимые показатели качества регулирования (максимальное допустимое динамическое отклонение  $x_1$ , допустимое или желательное перерегулирование, допустимое остаточное отклонение  $\Delta$ , предельно допустимое время регулирования  $t_p$ ).

Пользуясь этими данными, следует прежде всего определить необходимый динамический коэффициент регулирования  $R_d$  для статических объектов, при котором может быть достигнуто требуемое значение динамического отклонения  $x_1$ :

$$R_{дс} = \frac{x_1}{k_{об} y_n},$$

где  $y_n$  — наибольшее значение возмущения по ходу регулирующего органа.

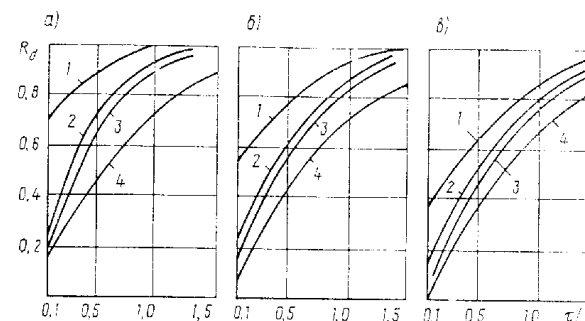


Рис. 41

Для выбора регулятора имеются графики  $R_d = f(\tau/T)$ . Для одного и того же регулятора они различны при разном характере типового оптимального процесса регулирования (см. рис. 40, а, б, в) [7].

Динамический коэффициент регулирования, а значит, и  $x_1$  всегда значительно больше при установке И-регулятора. Применение П-регулятора или ПИ-регулятора позволяет обеспечить при тех же типовых процессах регулирования меньшее значение  $x_1$ . Причем практически  $R_d$  при П-регуляторе мало отличается от  $R_d$  при ПИ-регуляторе. Однако ПИ-регулятор не обладает остаточным отклонением. Но если остаточное отклонение не превышает  $\pm \Delta_{ад}$ , то нет необходимости в установке ПИ-регулятора, кроме того, ПИ-регулятор увеличивает время регулирования. Наилучшее, минимальное значение  $R_d$  может быть получено при использовании ПИД-регулятора. Пользуясь графиком  $R_d$  для требуемого характера переходного процесса регулирования выбирают регулятор, обеспечивающий при данном  $\tau/T$  необходимое значение динамического коэффициента регулирования  $R_d$  (рис. 41). После этого, пользуясь графиком  $t_p/\tau$  (рис. 42), необходимо проверить, обеспечит ли выбранный таким образом регулятор требуемое время регулирования. Если выбранный по необходимому значению  $R_d$  регулятор не обеспечит требуемое время регулирования  $t_p$ , следует использовать более сложный регулятор.

В случае, если будет выбран П-регулятор, необходимо в заключение проверить величину остаточного отклонения  $\Delta$ , которую можно выбрать по графику или рассчитать по формуле

$$\Delta = \frac{k_{об}}{1 + k_c} y_n,$$

где  $k_c = k_{об} k_p$  — коэффициент передачи системы, зависит от характера принятого типового переходного процесса регулирования; для

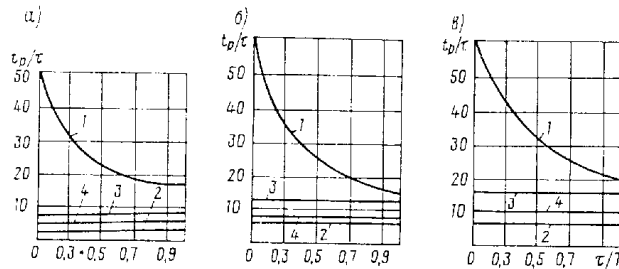


Рис. 42

апериодического процесса  $k_c = 0,3/(\tau/T)$ , для 20%-ного перерегулирования  $k_c = 0,7/(\tau/T)$ , для процесса с  $\min \int_0^\infty x^2 dt$   $k_c = 0,9/(\tau/T)$ . Найденную таким образом фактическую величину  $\Delta$  следует сравнить с заданной допустимой величиной  $\Delta_{\text{зад}}$ . Если  $\Delta > \Delta_{\text{зад}}$ , должен быть установлен ПИ-регулятор.

Все вышесказанное относится к статическим объектам регулирования. Для астатических объектов тип регулятора выбирают по отношению  $\tau/T_a$ . При этом динамический коэффициент регулирования будет иметь вид

$$R_{\text{да}} = \frac{x_1}{y_{\text{в}} \tau / T_a}.$$

Зная  $R_{\text{да}}$  и типовой переходный процесс, по табл. 2 выбирают тип регулятора, а по табл. 3 — время регулирования (см. в конце настоящей главы).

## § 22. Выбор оптимальных параметров настройки автоматических регуляторов

Для определения параметров настроек имеются специальные графики, которые построены в логарифмических координатах в функции  $\tau/T$ , или же приближенные значения оптимальных настроек могут быть подсчитаны по формулам из табл. 4 (для статических объектов) и табл. 5 (для астатических объектов).

**Пример.** В работе [4, с. 84] приведена передаточная функция системы охлаждения главного двигателя как объекта регулирования:

$$W_p = \frac{0,75e^{-\tau/p}}{3p+1}, \quad (70)$$

где  $\tau = 1$  мин;  $T = 3$  мин;  $k_{\text{ог}} = 0,75$ .

Выполним расчет настроек для ПИ- и ПИД-регуляторов с учетом  $\min \int_0^\infty x^2 dt$  (см. табл. 4).

$$1. \text{ ПИ-регулятор: } k_p = \frac{1,0}{0,75 \cdot 1/3} = \frac{1}{0,247} = 4,0;$$

$$T_{\text{и}} = \tau + 0,35 \cdot 3 = 1 + 1,05 = 2,05 \text{ мин.}$$

$$2. \text{ ПИД-регулятор: } k_p = \frac{1,4}{0,247} = 5,6;$$

$$T_{\text{и}} = 1,3\tau = 1,3 \cdot 1 = 1,3 \text{ мин;}$$

$$T_d = 0,5\tau = 0,5 \text{ мин.}$$

## § 23. Выбор параметров настройки регуляторов по переходной функции разомкнутой САР

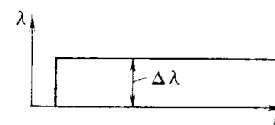


Рис. 43

Расчет параметров настройки по переходному процессу в разомкнутой САР [4] требует наличия переходной функции разомкнутой системы, снятой экспериментально. Этот метод удобен тем, что в процессе эксперимента участвует вся цепочка звеньев реальной системы за исключением регулятора, параметры настройки которого мы должны рассчитать. Это удобно также тем, что в процессе эксперимента, разомкнув систему, переводим объект на ручное управление сервомотором регулирующего органа, не нарушая технологического процесса. Нанося на объект возмущающие

воздействия и воздействуя на регулирующий орган, стабилизируемого положение до окончания изменения выходного параметра, который фиксируем на регистрирующем приборе. Переходные характеристики разомкнутых САР судовых энергетических установок соответствуют характеристикам объектов, состоящим из нескольких звеньев.

Пусть переходная функция разомкнутой системы при подаче на выход возмущения скачком имеет вид, показанный на рис. 43, где  $z$ ,  $u$ ,  $s$  и  $x_{\infty}$  — параметры, определенные по кривой разгона. Значения величин  $z$  и  $u$  выражены в секундах или минутах в зависимости от

градуировки шкал регулятора, а значение  $s$  пересчитывается в процентах от отклонения  $x_\infty$ :

$$s = \frac{s}{x_\infty} 100.$$

Величина возмущения  $\Delta\lambda$  тоже выражена в процентах по отношению к полной нагрузке объекта. Определим отношение  $R = s/u$  — угловой коэффициент наклона касательной  $ab$  к кривой разгона в точке перегиба  $B$ .

Определив все вышеприведенные зависимости, определим параметры настройки регулятора из следующих выражений:

1) для П-регулятора коэффициент передачи  $k_p = \frac{\Delta\lambda}{zR}$

или ширина зоны пропорциональности  $b = \frac{100zR}{\Delta\lambda}$ ;

2) для ПИ-регулятора  $k_p = \frac{\Delta\lambda}{1,1zR}$ ,  $b = \frac{110zR}{\Delta\lambda}$ ,

время интегрирования  $T_{\text{и}} = z/0,3$ ;

3) для ПИД-регулятора  $k_p = \frac{1,2\Delta\lambda}{zR}$ ,  $b = \frac{83zR}{\Delta\lambda}$ ,

время интегрирования  $T_{\text{и}} = 2z$ , время дифференцирования  $T_{\text{д}} = 0,5z$ .

**Пример.** На рис. 44 показана функциональная структурная схема исследования автоматической системы регулирования вязкости тяжелого топлива двигателя 9ДКРН80/160-Ч на т/х «Капитан В.Ушаков», где 1 — прибор регистрации температуры топлива на выходе из подогревателя; 2 — пневматический указатель действительного и заданного значений вязкости типа А2Р фирмы «Евроконтроль»; 3 — вискозиметр (ВИСК 21Р) — датчик вязкости; 4 — топливный

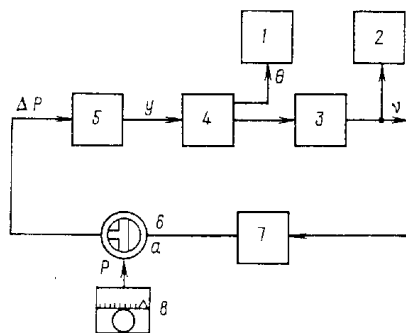


Рис. 44

подогреватель; 5 — мембранный исполнительный механизм (V30P); 6 — переключатель положений — ручное управление (р) или автоматическое (а); 7 — пневматический регулятор вязкости РР1 (ПИ-законом регулирования); 8 — пульт управления ЛПИ с указателем значения величины пневматического сигнала, подаваемого на исполнительный механизм при ручном и автоматическом режимах работы.

При снятии кривой разгона схема САР размыкается в точке 6, и в объект регулирования при этом входят: исполнительный механизм, подогреватель топлива и датчик вязкости (входная величина — изменение давления на исполнительный механизм  $\Delta p$ , выходная — вязкость топлива  $\Delta v$ ). Такой подход позволит учесть инерционность всех элементов САР и четко выбрать настройки регулятора 7.

В процессе эксперимента была получена кривая разгона по форме (см. рис. 43) при  $\Delta\lambda = 15,7\%$ . После обработки кривой разгона получены:  $z = 3$  мин;  $u = 6$  мин;  $s = 36,8\%$ .

Определим:  $R = \frac{s}{u} = \frac{36,8}{6} = 6,1 \frac{\%}{\text{мин}}$ ,

параметры настройки для ПИ-регулятора

$$k_p = \frac{\Delta\lambda}{1,1zR} = \frac{15,7}{1,1 \cdot 3 \cdot 6,1} = \frac{15,7}{20,13} = 0,77 \text{ или } 77\%.$$

Время изодрома

$$T_{\text{и}} = z/0,3 = \frac{3}{0,3} = 9 \text{ мин.}$$

## § 24. Выбор параметров настройки при аппроксимации кривой разгона одноемкостным звеном с запаздыванием

Рассматриваемые в табл. 4, 5 формулы используются также в тех случаях, если кривая разгона аппроксимирована одноемкостным звеном с запаздыванием. Рассмотрим зависимости (67), (68), (69) для расчета параметров настройки при задании интегральных оценок качества переходного процесса [4]. Передаточная функция, полученная в результате такой аппроксимации, имеет вид формулы (70).

Рассматриваемый метод позволяет вычислить оптимальные значения параметров применительно к заранее выбранному интегральному критерию качества регулирования с использованием следующих соотношений:

$$k_{\text{ог}} = A(\tau/T)^a;$$

$$T_{\text{и}}/T = c(\tau/T)^d;$$

$$T_{\text{д}}/T = E(\tau/T)^f;$$

в которых  $A, B, C, D, E, F$  выбирают из табл. 6 в зависимости от закона регулирования и выбранного интегрального критерия.

**Пример.** Рассмотрим тот же случай — выбор параметров настройки САР охлаждения двигателя с ПИ-регулятором применительно к критерию качества  $J_{\alpha}$  (см. табл. 6). Согласно передаточной функции (70)  $\tau = 1$  мин,  $T = 3$  мин и  $k_{ог} = 0,75$ . Получим:

$$k_p = \frac{0,9}{0,75} \left( \frac{1}{3} \right)^{-0,98} = 3,35; \quad T_n = 3 \cdot 1,5 \left( \frac{1}{3} \right)^{0,68} = 2,1 \text{ мин.}$$

## § 25. Настройка САР по характеристикам замкнутой системы

Значения параметров настройки автоматических регуляторов, близкие к оптимальным, могут быть получены в результате исследования замкнутой системы с пропорциональным регулятором [4].

В том случае, если регулятор имеет более сложный закон регулирования, на время эксперимента постоянную времени интегрирования устанавливают равной бесконечности, а постоянную времени дифференцирования — равной нулю. Поскольку при выключении воздействия по производной устойчивость системы ухудшается, уставку ширины зоны пропорциональности (степени неравномерности регулятора) увеличивают. Эксперимент состоит в том, что, постепенно уменьшая ширину зоны пропорциональности (увеличивая коэффициент передачи регулятора), ухудшают устойчивость системы, добиваясь, чтобы она вошла в намеченный при планировании эксперимента режим (незатухающие колебания) (рис. 45). По достижении этих условий фиксируется коэффициент передачи регулятора  $k_p^*$  (или зоны пропорциональности  $b^*$ ) в период колебаний  $T_{пр}$ .

Оптимальные параметры настройки рассчитывают по формулам:

$$\begin{aligned} &\text{для П-регулятора } k_p = 0,5k_p^* \text{ или } b = 2b^*; \\ &\text{для ПИ-регулятора } k_p = 0,45k_p^* \text{ или } b = 2,2b^*, T_n = T_{пр}/1,2; \\ &\text{для ПД-регулятора } k_p = 0,6k_p^* \text{ или } b = b^*/0,6, T_d = T_{пр}/6; \\ &\text{для ПИД-регулятора } k_p = 0,6k_p^* \text{ или } b = b^*/0,6, T_n = 0,5T_{пр}, \\ &T_d = 0,125T_{пр}. \end{aligned} \quad (71)$$

Таблица 2

| Тип регулятора | Значение коэффициента $R_{\alpha}$ |                                   |                          |
|----------------|------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
|                | Типовой переходный процесс         |                                   |                          |
|                | Апериодический                     | С 20%-ным пере-<br>регулированием | $\int_0^{\infty} x^2 dt$ |
| П              | 2,9                                | 1,4                               | —                        |
| ПИ             | 1,4                                | 1,3                               | 0,9                      |
| ПИД            | 1,3                                | 1,1                               | 0,8                      |

Таблица 3

| Тип регулятора | $t_p/\tau$ для объектов без самовывравнивания |                                   |                          |
|----------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
|                | Типовой переходный процесс                    |                                   |                          |
|                | Апериодический                                | С 20%-ным пере-<br>регулированием | $\int_0^{\infty} x^2 dt$ |
| П              | 6                                             | 8                                 | —                        |
| ПИ             | 14                                            | 16                                | 18                       |
| ПИД            | 9                                             | 12                                | 13                       |

Таблица 4

| Регулятор | Параметры настройки для статического объекта |                                   |                                  |
|-----------|----------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
|           | Процесс                                      |                                   |                                  |
|           | Апериодический<br>$\int_0^{\infty} x^2 dt$   | С 20%-ным пере-<br>регулированием | $\int_0^{\infty} x^2 dt$         |
| и         | $k_n = \frac{1}{4,5k_{ог}T}$                 | $k_n = \frac{1}{1,7k_{ог}T}$      | $k_n = \frac{1}{1,7k_{ог}T}$     |
| п         | $k_p = \frac{0,3}{k_{ог}\tau/T}$             | $k_p = \frac{0,7}{k_{ог}\tau/T}$  | $k_p = \frac{0,9}{k_{ог}\tau/T}$ |
| пи        | $k_p = \frac{0,6}{k_{ог}\tau/T}$             | $k_p = \frac{0,7}{k_{ог}\tau/T}$  | $k_p = \frac{1,0}{k_{ог}\tau/T}$ |
|           | $T_n = 0,8\tau + 0,5T$                       | $T_n = \tau + 0,3T$               | $T_n = \tau + 0,35T$             |



| Регулятор | Процесс                              |                                     |                                     |
|-----------|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
|           | Апериодический<br>с $\min t_p$       | С 20%-ным пере-<br>регулированием   | с $\min \int_0^{\infty} x^2 dt$     |
| ПИД       | $k_p = \frac{0,95}{k_{об} \tau / T}$ | $k_p = \frac{1,2}{k_{об} \tau / T}$ | $k_p = \frac{1,4}{k_{об} \tau / T}$ |
|           | $T_n = 2,4 \tau$                     | $T_n = 2,0 \tau$                    | $T_n = 1,3 \tau$                    |
|           | $T_d = 0,4 \tau$                     | $T_d = 0,4 \tau$                    | $T_d = 0,5 \tau$                    |

Таблица 5

## Параметры настройки для астатических объектов

| Регулятор | Процесс                        |                                   |                                 |
|-----------|--------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
|           | Апериодический<br>с $\min t_p$ | С 20%-ным пере-<br>регулированием | с $\min \int_0^{\infty} x^2 dt$ |
| П         | $k_p = \frac{0,4}{\tau / T_a}$ | $k_p = \frac{0,7}{\tau / T_a}$    | —                               |
| ПИ        | $k_p = \frac{0,4}{\tau / T_a}$ | $k_p = \frac{0,7}{\tau / T_a}$    | $k_p = \frac{1}{\tau / T_a}$    |
|           | $T_n = 6 \tau$                 | $T_n = 3 \tau$                    | $T_n = 4 \tau$                  |
| ПИД       | $k_p = \frac{0,6}{\tau / T_a}$ | $k_p = \frac{1,1}{\tau / T_a}$    | $k_p = \frac{1,4}{\tau / T_a}$  |
|           | $T_n = 5 \tau$                 | $T_n = 2 \tau$                    | $T_n = 1,6 \tau$                |
|           | $T_d = 0,2 \tau$               | $T_d = 0,4 \tau$                  | $T_d = 0,5 \tau$                |

Таблица 6

| Значения $A, B, C, D, E, F$ (к § 24) |                             |                     |      |     |      |     |      |
|--------------------------------------|-----------------------------|---------------------|------|-----|------|-----|------|
| Показатель<br>качества               | Закон<br>регу-<br>лирования | Значение постоянных |      |     |      |     |      |
|                                      |                             | A                   | B    | C   | D    | E   | F    |
| $I_a$                                | П                           | 0,9                 | 0,98 | —   | —    | —   | —    |
| $I_{кн}$                             | П                           | 1,4                 | 0,92 | —   | —    | —   | —    |
| $I_{ат}$                             | П                           | 0,5                 | 1,08 | —   | —    | —   | —    |
| $I_a$                                | ПИ                          | 1,0                 | 0,99 | 1,6 | 0,71 | —   | —    |
| $I_{кн}$                             | ПИ                          | 1,3                 | 0,96 | 2,0 | 0,74 | —   | —    |
| $I_{ат}$                             | ПИ                          | 0,9                 | 0,98 | 1,5 | 0,68 | —   | —    |
| $I_a$                                | ПИД                         | 1,4                 | 0,92 | 1,1 | 0,75 | 0,5 | 1,14 |
| $I_{кн}$                             | ПИД                         | 1,5                 | 0,94 | 0,9 | 0,77 | 0,6 | 1,01 |
| $I_{ат}$                             | ПИД                         | 1,4                 | 0,95 | 1,2 | 0,74 | 0,4 | 0,99 |

## ГЛАВА IV. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## § 26. Понятие устойчивости системы

Устойчивость движения — одно из важнейших понятий механики, характеризующее любые перемещения материальной точки или среды в пространстве и во времени. Рассмотрим физическую систему, характеризующую положение материальной точки на различных плоскостях, определяющих ее траектории движения после приложения и снятия возмущающих воздействий (рис. 46):

1) материальная точка (рис. 46, а) смещена вправо, ей предоставлена возможность свободно двигаться. Точка возвращается в исходное положение равновесия;

2) точка тоже смещена (рис. 46, б), после снятия воздействия она не возвращается в исходное положение, а остается в положении, в которое ее переместили, приложив усилие, т.е. она занимает различные положения в зависимости от приложенного усилия, демонстрируя безразличие к первоначальному положению;

3) после того как материальной точке предоставлена возможность свободного движения относительно первоначального положения

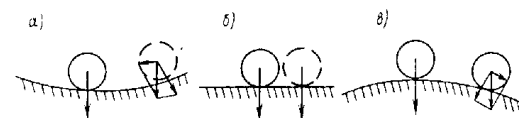


Рис. 46

равновесия (рис. 46, в), она удаляется и не стремится вернуться в исходное положение.

Таким образом, устойчивая линейная система — это такая система, которая после устранения действующих на нее возмущений прекращает движение и приходит в состояние равновесия. Неустойчивая система не может сколько-нибудь долго находиться в состоянии равновесия — достаточно флюктуационного возмущения, чтобы она пришла в самостоятельное движение, все больше (монотонно или колебательно) удаляясь от исходного (равновесного) состояния. Согласно этому утверждению, первая система устойчивая, вторая — на границе устойчивости (нейтральная), третья — неустойчивая. Следовательно, явление устойчивости или неустойчивости — сугубо внутреннее свойство системы, независимое от действующего на нее возмущения.

Под термином "движение" понимается процесс изменения во времени любой физической величины (давление пара, частота вращения вала, вязкость и температура жидкости и т.д.). Применительно к автоматическому регулированию теплотехнических процессов устойчивость движения рассматривается как устойчивость относительно траектории движения.

Теория устойчивости движения занимается установлением признаков, позволяющих судить, будет ли рассмотрено движение устойчивым или нет. Поэтому исследование устойчивости системы, выполняемое по ее дифференциальному уравнению, должно производиться при условии, что правая часть уравнения приравнена к нулю:

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0.$$

Применив преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, запишем:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

где  $p_i$  — корни характеристического уравнения ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), которые в свободном переходном процессе системы определяют изменение переменной:

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_{n-1} e^{p_{n-1} t} + c_n e^{p_n t},$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Корни характеристического уравнения могут быть комплексными (комплексно попарно сопряженными)  $p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$  или действительными  $p_i = \alpha_i$ . Каждому корню в решении будет соответствовать слагаемое: действительному —  $x_i(t) = c_i e^{\alpha_i t}$ , комплексному —  $x_i(t) = c_i e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + c_{i+1} e^{(\alpha_i - j\omega_i)t} = 2A \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{\alpha_i t}$ . Если  $\alpha_i < 0$ , то слагае-

мые  $x_i(t)$  с течением времени затухают (рис. 47, а); если  $\alpha_i = 0$ , то слагаемые  $x_i(t)$  неизменны или устанавливаются колебания с постоянной амплитудой (рис. 47, б); если  $\alpha_i > 0$ , то слагаемые с течением времени неограниченно растут (рис. 47, в).

Так как решение  $x(t)$  представляет собой  $\sum x_i(t)$ , то достаточно лишь одному действительному корню или двум комплексным корням иметь положительную действительную часть, как переменная будет с течением времени неограниченно возрастать, т.е. исследуемая система неустойчива.

Если все действительные корни и действительные части комплексных корней будут отрицательные, то переходный процесс затухает, система будет устойчивой.

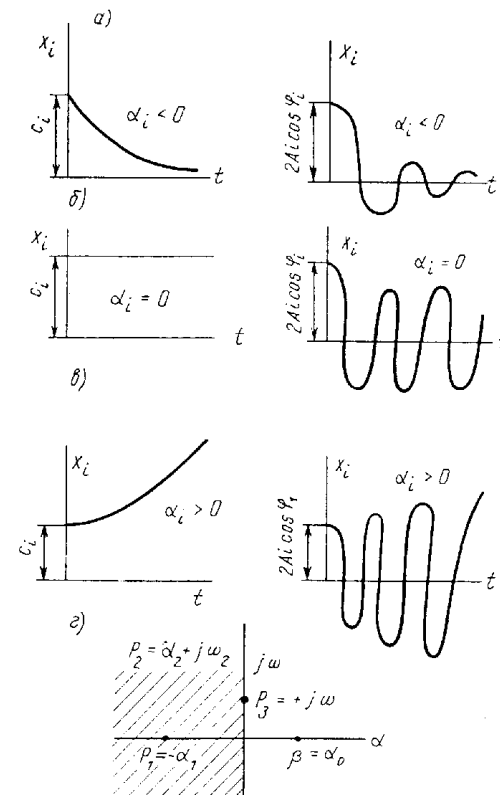


Рис. 47

[ При  $\alpha_1 = 0$  система нейтральна, т.е. находится на границе устойчивости. Поэтому для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы все действительные корни характеристического уравнения  $D(p)=0$  и все действительные части комплексных корней были отрицательными.

Если в декартовых координатах отложить  $j\omega$  и  $\alpha$ , то корни в этой плоскости изобразятся точками, плоскость называется плоскостью корней (рис. 47, г). Поэтому для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни соответствующего ее характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости корней (на рис. 47, г — заштрихованная область).

Корни характеристического уравнения зависят от параметров системы. При изменении коэффициентов характеристического уравнения корни его перемещаются на комплексной плоскости. Переход одного действительного корня или пары комплексных корней через мнимую ось вправо приведет к нарушению устойчивости САР.

Однако для суждения об устойчивости системы нет необходимости вычислять корни характеристического уравнения, достаточно только определить, все ли они расположены слева от мнимой оси комплексной плоскости. Решение этой задачи осуществляется с помощью специально разработанных для этой цели критериев устойчивости.

## § 27. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Рауса—Гурвица

[Для того чтобы САР, описываемая уравнением (72), была устойчивой, необходимо (но не достаточно), чтобы все коэффициенты характеристического уравнения, имеющего  $a_0 > 0$ , были отличными от нуля и положительными. Это условие основано на том, что если все корни уравнения (72) будут действительными и отрицательными, то свободный член будет отличен от нуля и положителен. Если при изменении параметров САР один действительный корень перейдет из левой полуплоскости в правую, то  $\alpha$ , изменит знак, следовательно, изменит знак и  $a_n$ . Почему это условие недостаточно?

Если среди корней есть комплексно-сопряженные, то переход через мнимую ось двух комплексно-сопряженных корней не изменит знак свободного члена, так как  $(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega) = \alpha^2 + \omega^2$ .

Для достаточного условия необходимо, чтобы коэффициенты были не только положительными, но чтобы  $n$  определителей, составленных для квадратичной матрицы, были положительными.

Из коэффициентов многочлена (72) составляется квадратичная матрица  $n$ -го порядка следующего вида:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \dots 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \dots 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \dots 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \dots 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 \dots 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \dots a_n \end{vmatrix}$$

Порядок составления матрицы крайне прост. По главной диагонали располагают последовательно, начиная с  $a_1$ , все коэффициенты характеристического уравнения  $D(p) = 0$ . Начиная с диагонали, столбцы этой таблицы заполняют коэффициентами вверх по возрастающим, а вниз по убывающим индексам, причем все коэффициенты с индексами больше  $n$  и меньше нуля заполняют нулями. Из матрицы Гурвица составляют определители  $\Delta_k$  ( $k$ -го порядка) очеркиванием  $k$ -го столбца и  $k$ -й строчки:

$$\Delta_1 = a_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Вычисление следует прекратить, если очередной определитель окажется отрицательным, поскольку это свидетельствует о неустойчивости системы. Таким образом, система будет устойчивой, если все  $n$  определителей Гурвица будут положительными, т.е.

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (73)$$

**Пример.** Рассмотрим САР, дифференциальное уравнение которой пятого порядка:  $a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$ , где  $a_0 = 0,00134$ ;  $a_1 = 0,0383$ ;  $a_2 = 0,233$ ;  $a_3 = 3,78$ ;  $a_4 = 4,68$ ;  $a_5 = 4,39$ .

Необходимые условия устойчивости:  $a_1, \dots, a_5 > 0$ .

Достаточные условия устойчивости:

$$\Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 - a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \Delta_3 - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_5 \end{vmatrix} - a_0 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = a_4 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1 (a_1 a_4 - a_0 a_5) -$$

$$- a_2 a_5 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_0 a_5 (a_1 a_4 - a_0 a_5) = (a_1 a_2 - a_0 a_3) \times$$

$$\times (a_1 a_3 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0;$$

$$\Delta_5 = \Delta_4 a_5 > 0;$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 0,0383 & 3,78 & 4,39 & 0 & 0 & \Delta_1 = 0,0383 > 0 \\ 0,00134 & 0,233 & 4,68 & 0 & 0 & \Delta_2 = 0,004 > 0 \\ 0 & 0,0383 & 3,78 & 4,39 & 0 & \Delta_3 = 0,008 > 0 \\ 0 & 0,00134 & 0,233 & 4,68 & 0 & \Delta_4 = 0,034 > 0 \\ 0 & 0 & 0,0383 & 3,78 & 4,39 & \Delta_5 = 0,151 > 0 \end{array}$$

Таким образом, система автоматического управления устойчива.

Критерий Рауса—Гурвица позволяет не только исследовать устойчивость системы, но и решить обратные задачи определения допустимых значений параметров системы при различных режимах работы. Неравенства (73) необходимо выразить через неизвестные значения исследуемых коэффициентов, заменив их равенствами. Полученная таким образом система уравнений в пространстве определяемых коэффициентов характеризует границы областей, где выполняются соответствующие неравенства.

**Пример [4].** Определить значение критического коэффициента усиления  $k_p^*$  регулятора, имеющего передаточную функцию  $W_p(p) = k_p / (0,1p^2 + p + 1)$ , который совместно с объектом  $W_0(p) = 1 / (3p + 1)$  представляет передаточную функцию замкнутой системы

$$W_c(p) = \frac{1 / (3p + 1)}{1 + (1 / (3p + 1)) (k_p / (0,1p^2 + p + 1))}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$0,3p^3 + 3,1p^2 + 4p + (1 + k_p) = 0.$$

Первое условие устойчивости выполняется, поскольку  $k_p > 0$ :

$$\begin{vmatrix} 3,1 & (1 + k_p) \\ 0,3 & 4 \end{vmatrix} = 12,4 - 0,3(1 + k_p) > 0$$

Из второго условия находим, что  $k_p$  соответствует границе устойчивости, если  $12,4 - 0,3(1 + k_p) = 0$ . Отсюда:  $k_p^* = (12,4 - 0,3) : 0,3 = 40,3$ .

Таким образом, зная  $k_p^*$  согласно выражению (71), находим, что для П-регулятора оптимальное значение коэффициента передачи будет  $k_p = 0,5k_p^* = 0,5 \cdot 40,3 = 20$ .

## § 28. Критерий устойчивости И.А.Вышнеградского (диаграмма Вышнеградского)

[И.А. Вышнеградский, анализируя системы автоматического регулирования угловой скорости вращения паровой машины, которая описывается уравнением третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (74)$$

сформулировал условия устойчивости в следующем виде:

для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты были положительны  $a_0 > 0$ ,  $a_{1,2,3} > 0$ , а произведение средних коэффициентов характеристического уравнения было бы больше произведения крайних  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ .

Если  $a_1 a_2 = a_0 a_3$ , значит система на границе устойчивости, а если  $a_1 a_2 < a_0 a_3$  — система неустойчива.

Однако И.А.Вышнеградский в своих исследованиях пошел дальше, построив диаграмму, которая позволяла судить не только об устойчивости, но и о качестве САР.

Преобразуем уравнение (74):

$$\frac{a_0}{a_3} p^3 + \frac{a_1}{a_3} p^2 + \frac{a_2}{a_3} p + 1 = 0;$$

введем новую переменную  $p = u \sqrt[3]{a_3 / a_0}$  и после преобразования запишем:

$$u^3 + Au^2 + Bu + 1 = 0, \quad (75)$$

где

$$A = \frac{a_1}{a_3} \left( \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} \right)^2; B = \frac{a_2}{a_3} \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} \quad \text{— параметры регулирования Вышне-}$$

градского

Таким образом, система регулирования, описываемая уравнением (75), будет устойчивой, если

$$A > 0; B > 0; AB \geq 1, \text{ т.е. } AB - 1 \geq 0. \quad (76)$$

Равенство  $AB - 1 = 0$  соответствует границе устойчивости. Если это равенство изобразить в плоскости двух параметров  $A$  и  $B$  (рис. 48), то это равенство будет равнобочной гиперболой GIK, разделяющей плоскость на область устойчивого и неустойчивого состояния системы. Область IV — неустойчивое состояние системы. Область устойчивого состояния системы разделена на три зоны: I — колебательной, II — монотонной и III — аperiodической устойчивости. Монотонные процессы характеризуются постоянством знака отклонения регулируемой величины и скорости ее отклонения

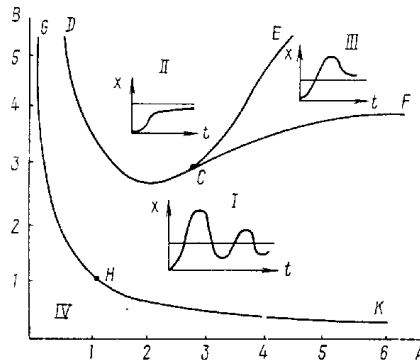


Рис. 48

в течение всего переходного процесса. Область ECF начинается в точке (3, 3), где все три корня характеристического уравнения вещественны, отрицательны и кратны. В пределах этой области все корни вещественны и отрицательны. Таким образом, диаграмма Вышнеградского позволяет судить не только о работоспособности системы управления, но и о качестве ее работы.]

### § 29. Критерий устойчивости А.В.Михайлова

[Критерий основан на рассмотрении кривой, определяемой характеристическим уравнением замкнутой системы, и на геометрической интерпретации принципа аргумента. Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

которое можно записать в виде

$$a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0, \quad (77)$$

где  $p_1, \dots, p_n$  — корни уравнения (76). В комплексной плоскости каждый из корней  $p_i$  есть вектор, выходящий из начала координат в соответствующую точку (рис. 49, а).

Если в уравнение (77) подставить  $p = j\omega$ , каждая из его скобок станет разностью векторов  $\overline{A_i D_i} = (j\omega - \overline{p_i}) = \rho_i e^{j\varphi_i}$  при этом основание каждого вектора  $\overline{A_i D_i}$  (точка  $A_i$ ) фиксировано в плоскости  $(\sigma, j\omega)$  значением корня  $p_i$ , а его конец (точка  $D_i$ ) лежит на мнимой оси. Положение  $D_i$  зависит от частоты  $\omega$ . Если изменять  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то угол  $\varphi_i$  каждого вектора  $\overline{A_i D_i}$  изменится от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ , т.е. каждый из векторов развернется на  $180^\circ$  против часовой стрелки, если корень отрицательный, или на угол  $180^\circ$  по часовой стрелке, если основание вектора лежит справа от оси (т.е. действительная часть корня положительная). В силу симметрии комплексной плоскости достаточно изменить частоту от 0 до  $+\infty$ , тогда каждый вектор поворачивается на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки, если система устойчива, и на  $90^\circ$  по часовой стрелке, если система неустойчива. При этом у устойчивой системы модуль вектора  $\rho_i$  нигде не становится равным нулю, очерчивая кривую — годограф характеристического вектора. Это видно на рис. 49, а, если соединить между собой точки  $B_i, A_i, C_i$ .

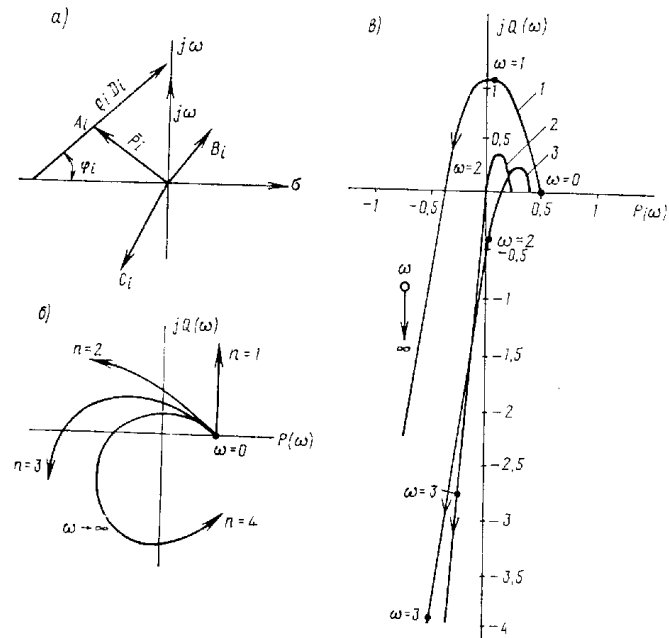


Рис. 49

В качестве вывода формируем критерий Михайлова:

чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы вектор в комплексной плоскости, полученный в результате подстановки в характеристическое уравнение  $p = j\omega$  при изменении частоты в пределах  $0 < \omega < +\infty$ , нигде не обращаясь в нуль, развернулся последовательно против часовой стрелки на угол  $90^\circ n$ , где  $n$  — порядок уравнения, "или, что то же самое," при увеличении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  годограф, начинаясь в положительной части действительной оси, проходит в положительном направлении  $n$  квадрантов (положительное направление — движение вектора против часовой стрелки) (рис. 49, б).

**Пример.** САР описывается характеристическим уравнением третьей степени

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3,$$

где

$$1) a_0 = 0,12, a_1 = 0,1, a_2 = 1,00, a_3 = 0,5;$$

$$2) a_0 = 0,12, a_1 = 0,05, a_2 = 0,48, a_3 = 0,2;$$

$$3) a_0 = 0,3, a_1 = 0,1, a_2 = 0,48, a_3 = 0,4.$$

Уравнение характеристической кривой будет иметь вид

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 (j\omega) + a_3 = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = a_3 - a_1 \omega^2; Q(\omega) = a_2 \omega - a_0 \omega^3.$$

Подставим значения  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , определим  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  и построим годографы для вышерассмотренных трех случаев (рис. 49, в). Из полученных годографов видно, что для первого случая (годограф 1) — система устойчивая; для второго случая — система находится на границе устойчивости, так как годограф проходит через начало координат; для третьего случая система неустойчивая — годограф проходит 3 квадранта, но в ненадлежащей последовательности.

Если в уравнении (77) произвести подстановку  $p = j\omega$ , комплексную частотную характеристику  $D(j\omega)$  представить в виде вещественной и мнимой частотных характеристик  $D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  и построить графики  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  при изменении от 0 до  $+\infty$ , то получим вторую формулировку критерия Михайлова:

система устойчивая в том случае, если удовлетворяются условия:

$$P_0(\omega) \Big|_{\omega=0} > 0 \text{ и } Q(\omega) \Big|_{\omega=0} = 0, \text{ где } Q'(\omega) = \frac{dQ(\omega)}{d\omega},$$

или если корни уравнений  $P(\omega) = 0$  и  $Q(\omega) = 0$  действительные и перемежаются, т.е. между любыми двумя соседними корнями  $P(\omega) = 0$  лежит корень уравнения  $Q(\omega) = 0$ . Или проще: система устойчивая, если графики функций  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  пересекают ось  $\omega$ , последовательно чередуясь друг с другом.

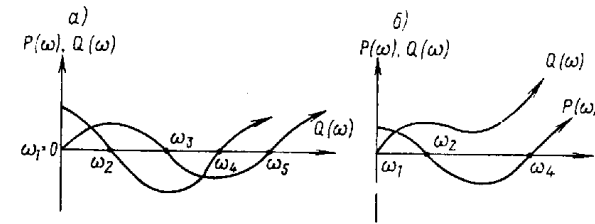


Рис. 50

На рис. 50 показан характер расположения корней вещественной и мнимой составляющих для устойчивой (рис. 50, а) и неустойчивой системы (рис. 50, б).

**Пример.** Имеется характеристическое уравнение АСУ  $p^5 + p^4 + 7p^3 + 4p^2 + 10p + 3 = 0$ . Подставим в это уравнение  $p = j\omega$  и выделим уравнения вещественной и мнимой частотных характеристик системы:

$$P(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 = 0;$$

$$Q(\omega) = \omega^5 - 7\omega^3 + 10\omega = 0.$$

Определим корни  $Q(\omega) = \omega(\omega^4 - 7\omega^2 + 10) = 0$ :

$$\omega_1 = 0; \omega_{3,5}^2 = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = 3,5 \pm 1,5,$$

$$\omega_3 = 1,41, \omega_5 = 2,236.$$

Определим корни  $P(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 = 0$ :

$$\omega_{2,4}^2 = 2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = 2 \pm 1,$$

$$\omega_2 = 1, \omega_4 = 1,73.$$

Расположим корни  $Q(\omega)$  и  $P(\omega)$  в таблице.

| Корни       | 1 | 2 | 3    | 4    | 5     |
|-------------|---|---|------|------|-------|
| $Q(\omega)$ | 0 |   | 1,41 |      | 2,236 |
| $P(\omega)$ |   | 1 |      | 1,73 |       |

Отсюда видно, что корни чередуются и, следовательно, система регулирования устойчива.

### § 30. Частотный критерий устойчивости

Частотные критерии устойчивости в настоящее время получили широкое распространение. К ним относят критерий Найквиста и критерий Михайлова согласно первой формулировке. Частотные критерии обладают большой наглядностью, обусловленной тем, что задача сводится к изучению плоской кривой, которая может быть построена сравнительно просто.

Критерий Найквиста дает возможность судить об устойчивости замкнутой системы посредством исследования разомкнутой системы. Исследование же разомкнутой системы проще, чем замкнутой, и, кроме того, этот критерий можно получить экспериментальным путем, определяя частотные характеристики отдельных звеньев, — это обстоятельство является важным практическим преимуществом данного критерия. Рассмотрим краткое математическое обоснование критерия в наглядной геометрической форме [6].

Пусть уравнение разомкнутой системы регулирования имеет вид  $D(p)x_{\text{вых}} = E(p)x_{\text{вх}}$ , где  $D(p)$  и  $E(p)$  — полиномы от  $p$ , причем степень полинома  $D(p)$  выше или в крайнем случае равна степени  $E(p)$ , что в технических системах всегда имеет место.

Характеристическое уравнение разомкнутой системы  $D(p) = 0$ . В замкнутой системе при свободном движении  $x_{\text{вых}} = -x_{\text{вх}} = x$ , поэтому можно записать замкнутую систему  $[D(p) + E(p)]x = 0$ , при этом характеристическое уравнение будет иметь вид  $D(p) + E(p) = 0$ .

Как уже известно, замкнутая система устойчива, если корни ее лежат в левой полуплоскости корней. Разделив уравнение замкнутой системы на уравнение разомкнутой системы, получим дробно-рациональную функцию от  $p$ :

$$\frac{D(p) + E(p)}{D(p)} = W(p). \quad (78)$$

Здесь корни знаменателя называются полюсами, а корни числителя — нулями дробно-рациональной функции. Обозначим корни числителя через  $s(i = 1, \dots, n)$ , а корни знаменателя через  $p_i(i = 1, \dots, n)$ , тогда выражение (78) запишем в виде

$$\frac{D(p) + E(p)}{D(p)} = 1 + \frac{E(p)}{D(p)} = 1 + W_p(p) = \frac{(p - s_1)(p - s_2) \dots (p - s_n)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (79)$$

В силу сказанного выше число корней полиномов числителя и число корней знаменателя в выражении (79) равны друг другу.

В плоскости корней каждый корень  $p_i$  и  $s_i$  может быть представлен вектором, проведенным из начала координат в точку  $p_i$  или  $s_i$ , определяемую значением корня (рис. 51, а). Если выбрать значение

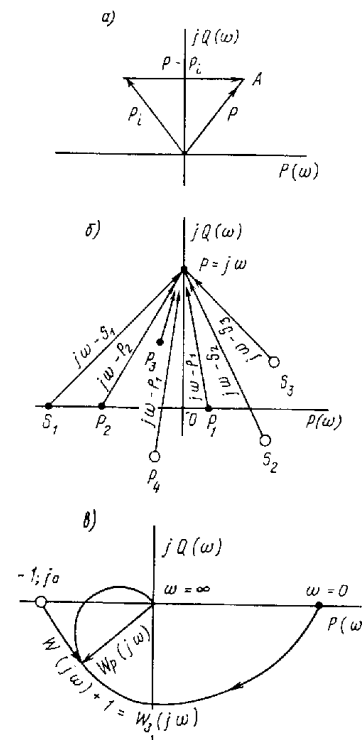


Рис. 51

независимой переменной  $p$  или  $s$  в какой-нибудь произвольной точке плоскости (точка  $A$ ), комплексное число  $p - p_i$  может быть представлено в виде вектора, равного разности векторов  $p$  и  $p_i$ . Положим  $p = j\omega$ , т.е. поместим точку  $A$  на мнимой оси. Тогда вектор  $p - p_i$  будет иметь начало в точке  $p_i$ , а свой конец — на мнимой оси в точке  $A$ . Полагая  $p = j\omega$ , выражение (79) можно записать:

$$W_s(j\omega) = 1 + \frac{E(j\omega)}{D(j\omega)} = 1 + W_p(j\omega) = \frac{(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}. \quad (80)$$

Векторы, входящие сомножителями в уравнение (80), можно представить так, как показано на рис. 50, б. Если изменять  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то конец каждого вектора будет скользить по мнимой оси и

повернется на угол  $\pi$ ; поворот будет происходить против часовой стрелки, если корень  $p_i$  лежит слева от мнимой оси, и по часовой стрелке, если корень расположен справа от этой оси. Числитель выражения может быть представлен как суммарный вектор, модуль которого равен произведению абсолютных значений векторов сомножителей числителя, а угол поворота этого вектора, т.е. его фаза, равен сумме углов поворотов тех же векторов сомножителей. Точно так же в виде суммарного вектора может быть представлен и знаменатель выражения (80). Следовательно, вектор  $W(j\omega)$  можно представить как частное от деления двух векторов, т.е. тоже как вектор, модуль которого равен частному от деления модулей суммарных векторов числителя и знаменателя, а фаза — разности суммарных фаз числителя и знаменателя. Пусть система регулирования описывается уравнением  $n$ -го порядка. Если замкнутая анализируемая система устойчива, то все  $n$  корней числителя в выражении (78) должны лежать слева от мнимой оси. Следовательно, суммарный угол поворота вектора числителя будет равен  $+\pi n$ . Если эта же система устойчива в разомкнутом состоянии, то все корни знаменателя тоже лежат слева от мнимой оси и суммарный угол поворота вектора знаменателя также равен  $+\pi n$ .

Следовательно, суммарный угол поворота вектора  $W(j\omega)$  для устойчивой замкнутой системы при этих условиях равен нулю:

$$\pi n - \pi n = 0. \quad (81)$$

Если же эта система в разомкнутом состоянии неустойчива и полином знаменателя имеет  $k$  корней справа от мнимой оси и  $n-k$  корней слева от нее, то суммарный угол поворота вектора  $W_s(j\omega)$  для устойчивой замкнутой системы при этих условиях будет

$$\pi n - (n-k)\pi + k\pi = 2k\pi. \quad (82)$$

Выражение  $\frac{F(j\omega)}{D(j\omega)} = W_p(j\omega)$  — комплексная частотная характеристика разомкнутой системы. Если задана  $W_p(j\omega)$  и вычерчена ее амплитудно-фазовая характеристика (годограф) (рис. 51, в), то очевидно, что вектор, начало которого находится в точке  $(-1; j0)$ , а конец лежит на характеристике  $W_p(j\omega)$ , равен  $W_s(j\omega) = 1 + W_p(j\omega)$ , т.е. точка  $(-1; j0)$  является началом вектора  $W_s(j\omega)$  замкнутой системы. Поэтому вектор  $W_s(j\omega)$  в устойчивой замкнутой системе должен при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  описать угол, равный нулю, если должно выполняться условие (81), или  $k\pi$ , если выполняется условие (82). Первое возможно только в том случае, если начало вектора  $W_s(j\omega)$ , т.е. точка  $(-1; j0)$ , лежит вне кривой  $W_p(j\omega)$ , по которой скользит его конец, а второе — только в том случае, если точка  $(-1; j0)$  находится внутри годографа  $W_p(j\omega)$ . Сочетая этот вывод с условиями (81) и (82) и

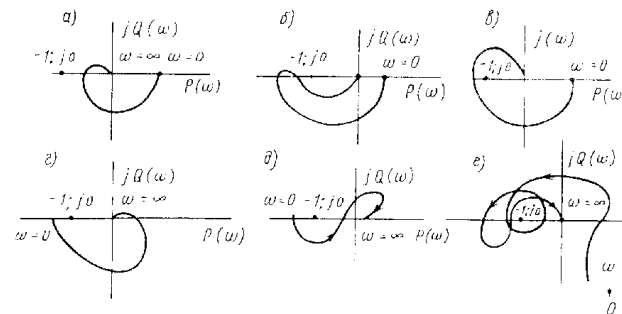


Рис. 52

устойчивостью системы в разомкнутом состоянии, можно сформулировать условия устойчивости системы в замкнутом состоянии.

Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо выполнение условий:

1) если система устойчива в разомкнутом состоянии, то годограф  $W_p(j\omega)$ , полученный при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , не должен охватывать точку  $(-1; j0)$ ;

2) если система неустойчива в разомкнутом состоянии и имеет  $k$  корней в правой полуплоскости, то годограф  $W_p(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  должен охватывать  $k$  раз точку с координатами  $(-1; j0)$ , т.е. угол поворота вектора  $W_p(j\omega)$  должен быть  $2k\pi$ .

При отрицательном знаке у  $W_p(j\omega)$  указанные выше положения определяются точкой  $(+1; j0)$ .

На рис. 52 показаны примеры некоторых комплексных частотных характеристик: статически устойчивые разомкнутые системы (а, б); неустойчивая система (в); статически разомкнутая система устойчива при  $k=1$ , при  $k \neq 1$  неустойчива (г); статическая система устойчива, если число корней справа в разомкнутом состоянии  $k=1$  (д); астатическая система устойчива, если число корней справа в разомкнутой системе  $k=2$  и при  $k \neq 2$ , система неустойчива (е).

Следует обратить внимание на важные преимущества критерия устойчивости Найквиста по сравнению с критериями Рауса—Гурвица и Михайлова:

1) при использовании критерия Найквиста нет необходимости в знании характеристического уравнения системы — априорная информация для расчетов может быть получена из экспериментов;

2) критерий пригоден для систем с распределительными параметрами и систем с запаздыванием, передаточные функции которых являются трансцендентными функциями  $p$ .



### § 31. Устойчивость системы с запаздыванием

На рис. 53, а показана структурная схема системы с запаздыванием. Передаточная функция разомкнутой системы  $W_{\text{от}}(p) = W_0(p)W(p)e^{-\tau_3 p}$ . Отсюда получим комплексную частотную характеристику (КЧХ) системы подстановкой  $p = j\omega$ :  $W_{\text{от}}(j\omega) = W_0(j\omega)W_p(j\omega)e^{-i_3\omega}$ .

При рассмотрении устойчивости с запаздывающим аргументом строим КЧХ разомкнутой системы с запаздыванием  $W_{\text{от}}(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , сначала не учитывая запаздывания, так как запаздывание не влияет на изменение амплитуды (вектора системы), а вызывает только изменение аргумента — фазы (рис. 53, б, кривая 1). Потом, без изменения модуля, каждый вектор системы (кривая 1) поворачиваем на угол  $\tau_3\omega$  по часовой стрелке.

При возрастании  $\omega$  этот угол будет расти и кривая (годограф) системы с запаздыванием будет закручиваться вокруг начала координат (рис. 53, б, кривая 2).

Таким образом, если система без запаздывания устойчива в разомкнутом состоянии, то для того, чтобы система с запаздыванием в замкнутом состоянии была устойчива, нужно, чтобы характеристика  $W_{\text{от}}(j\omega)$  не охватывала точку  $(-1; j0)$ . Варьируя временем запаздывания, мы получим такую КЧХ разомкнутой системы, которая будет проходить через точку  $(-1; j0)$ . Это время запаздывания будет предельно допустимым. Однако величина предельно допустимого времени запаздывания может быть определена достаточно просто, графическим путем. Для этого строится (рис. 53, в) КЧХ разомкнутой системы и затем проводится окружность единичного радиуса  $(-1; j0)$ . Точка пересечения окружности и амплитудно-фазовой характе-

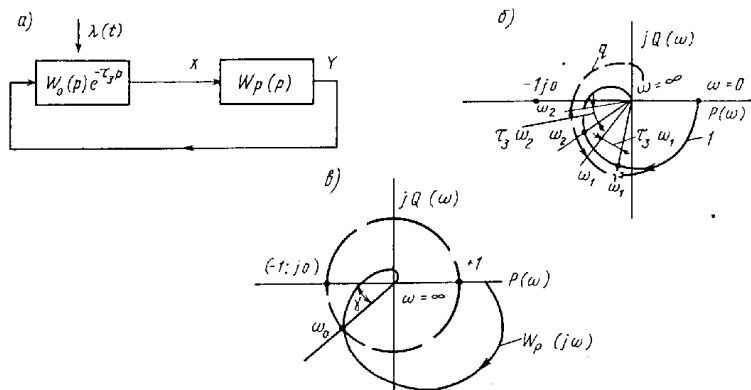


Рис. 53

тики  $W_p(j\omega)$  позволяет найти значения  $\gamma$  и  $\omega_0$ , а по их значению определить допустимое значение  $\tau_0$ :  $\gamma = \omega_0\tau_0$ . Отсюда  $\tau_0 = \gamma/\omega_0$ .

### § 32. Оценка запаса устойчивости линейных систем по распределению корней характеристического уравнения

Реально работающие системы уравнения должны быть не только устойчивыми, но и обладать определенным запасом устойчивости, т.е. переходные процессы в них должны затухать достаточно интенсивно [1]. Как следует из уравнения (72), переходные процессы в динамической системе представляют собой сумму элементарных компонент  $c_1 e^{-\alpha_1 t} + \dots + c_n e^{-\alpha_n t} \sin(\omega t + \phi_i)$ . В обоих случаях численным показателем быстроты затухания этих процессов может быть выбрано абсолютное значение корня  $\alpha_i$  (или абсолютное значение вещественной части корня). Этот показатель характеризует степень уменьшения соответствующей компоненты переходного процесса в течение любого заданного отрезка времени  $t$  (для колебательных компонент — степень уменьшения огибающей колебаний). Для колебательных составляющих необходимо вводить дополнительный показатель, так как первый не имеет никакой информации о характере самих колебаний.

Таким добавочным показателем может быть, например, параметр, характеризующий степень уменьшения двух соседних амплитуд колебаний одного звена. Такой показатель уже нами рассмотрен (см § 20, п. 4), он был назван "декремент затухания" или "степень затухания собственных колебаний".

Величина  $\chi$  зависит от отношения вещественной и мнимой составляющих пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения системы, порождающих рассматриваемую составляющую колебаний  $m = \alpha/\omega$ . Это отношение может быть названо корневым показателем колебательности. Следовательно, абсолютное значение корня (или его вещественной составляющей)  $\alpha$  может быть названо ее корневым показателем абсолютного затухания. Сформулированные показатели интенсивности затухания относятся к отдельным составляющим, но могут быть применены для оценки затухания процесса в целом, потому что среди всех компонент процесса можно выделить одну, доминирующую, вносящую наибольший вклад в формирование общего процесса.

Корневым показателем абсолютного затухания собственных переходных процессов  $\eta$  в системе является корневой показатель затухания составляющей, корни которой ближе всего расположены к мнимой оси, при условии, что все остальные корни расположены достаточно далеко от нее. Показатель  $\eta$  — степень устойчивости

системы, если корни характеристического уравнения системы располагаются слева от прямой, проведенной параллельно мнимой оси на расстоянии  $\eta$  от нее (рис. 54).

$$\alpha_1 > \eta. \quad (83)$$

Корневым показателем колебательности  $m$  собственных колебаний системы является корневой показатель колебательности наиболее слабозатухающей компоненты, для которой отношение  $\alpha_1/\omega_1$  минимально. Соответственно система имеет корневой показатель колебательности переходных процессов не ниже заданного  $m$ , если все корни характеристического уравнения располагаются слева от лучей, проведенных в левой полуплоскости под углом, равным  $\beta = \arctg m$ , к мнимой оси (см. рис. 54), т.е. если каждый корень удовлетворяет условию

$$\alpha_1/\omega_1 > m. \quad (84)$$

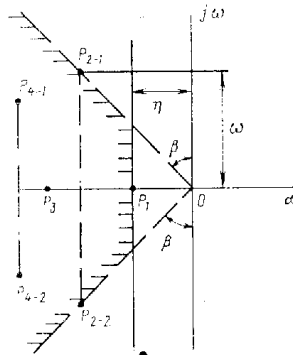


Рис. 54

расширенная отрицательная КЧХ разомкнутого контура  $W_{pc}(-\eta + j\omega)$  не охватывает точку с координатами  $(-1; j0)$ . Совершенно так же исследуется запас устойчивости по условию (80) — в передаточной функции разомкнутого контура проводится замена  $p = -m\omega + j\omega$ , в результате чего получается расширенная КЧХ  $W_p(-m\omega + j\omega)$ . Обобщенный критерий Найквиста в этом случае формулируется:

система, имеющая в разомкнутом состоянии корневой показатель колебательности не ниже  $m$ , сохранит его и после замыкания, если расширенная КЧХ разомкнутого контура  $W_p(-m\omega + j\omega)$  не охватывает точку  $(-1; j0)$ .

### § 33. Оценка запаса устойчивости замкнутых систем по частотному показателю колебательности

Известно, что связь между комплексной частотной функцией разомкнутой системы и комплексной частотной функцией замкнутой системы выражается

$$W_3(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}.$$

Представим частотную функцию замкнутой системы как комплексную величину, определяемую амплитудой и фазой:

$$W_3(j\omega) = A_3(\omega) e^{j\varphi_3(\omega)}.$$

Следовательно,

$$A_3(\omega) = |W_3(j\omega)| = \left| \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} \right|.$$

**Пример.** Как показано в работе [1], комплексная частотная характеристика замкнутого контура системы регулирования уровня в двухъёмкостном объекте И-регулятором имеет вид

$$W_3(j\omega) = 0,1233 / \left[ (p + 0,1013)^2 + 0,2765^2 \right] (p + 1,4224).$$

Поэтому модуль данной функции — амплитудно-частотная характеристика, равная

$$|W_3(j\omega)| = 0,1233 / \left[ (0,1233 - 1,625\omega)^2 + (0,375 - \omega^2)^2 \omega^2 \right]^{0,5},$$

а график полученного решения при подстановке  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  показан на рис. 55, а. Как видно из этого рисунка, колебательному характеру переходного процесса соответствует наличие пика в графике  $A_3(\omega) = f(\omega)$ . Значение этого пика зависит от степени приближения КЧХ разомкнутого контура  $W_p(j\omega)$  к "опасной" точке  $(-1; j0)$ , при охвате которой система теряет устойчивость. Допустим, что характеристика разомкнутого контура  $W_p(j\omega)$  располагается в комплексной плоскости так, как показано на рис. 55, б, не охватывая точку  $(-1; j0)$ . Тогда числитель уравнения (80) для фиксированной частоты  $\omega$  равен длине вектора  $W_p(j\omega)$ , т.е. отрезку  $OA$ , а знаменатель — длине вектора, приведенного к  $W_p(j\omega)$  с точки  $(-1; j0)$ , т.е. отрезку  $BA$ . Поэтому значение модуля в графической интерпретации  $A_3(j\omega)$  представляет собой отношение длин отрезков  $OA$  и  $BA$ , т.е.  $A_3 = OA/BA$ . Проследим, как меняется это отношение при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = +\infty$ .

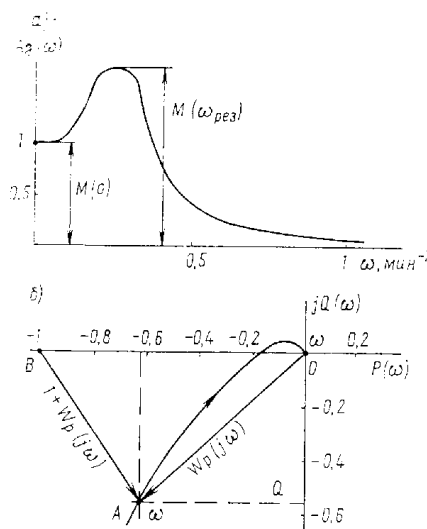


Рис. 55

С ростом частоты точка  $A$  движется по направлению стрелки, при  $\omega \rightarrow \infty$  длина вектора  $OA$  стремится к нулю, а вектора  $BA$  — к единице; соответственно модуль характеристики также стремится к нулю.

Если характеристика  $W_p(j\omega)$  располагается достаточно далеко от точки  $(-1; j0)$ , длина вектора  $BA$  при указанном перемещении точки  $A$  все время остается больше длины вектора  $OA$  и их отношение уменьшается монотонно от значения  $A_3(0)$  при  $\omega = 0$  до нуля при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Если же характеристика  $W_p(j\omega)$  располагается близко к точке  $(-1; j0)$ , то вначале отношение отрезков с ростом частоты растет, поскольку длина вектора  $OA$  уменьшается медленнее, чем происходит уменьшение длины вектора  $BA$ . Достигнув максимального значения при некоторой частоте  $\omega_{\text{рез}}$ , это отношение стремится к нулю. Таким образом, при приближении  $W_p(j\omega)$  к "опасной" точке  $(-1; j0)$  в графике модуля  $|W_3(j\omega)|$  образуется пик, и тем больший, чем ближе  $W_p(j\omega)$  к точке  $(-1; j0)$ . В предельном случае, когда  $W_p(j\omega)$  проходит через точку  $(-1; j0)$  (система в замкнутом состоянии на границе устойчивости), длина отрезка  $AB$  равна нулю и пик модуля  $|W_3(j\omega)|$  становится бесконечно большим.

Таким образом, относительное значение резонансного пика называется частотным показателем колебательности контура и

$$M = \frac{|W_3(\omega_{\text{рез}})|}{|W_3(0)|} = \frac{A_3(\omega_{\text{рез}})}{A_3(0)}$$

может быть принято в качестве меры его запаса устойчивости, т.е. можно считать, что контур имеет необходимый запас устойчивости, если его частотный показатель колебательности не превышает заранее назначенного допустимого значения  $M \leq M_{\text{доп}}$ . Контурный вектор допустимого значения показателя колебательности можно определить, исходя из допустимой степени затухания

$$\psi = 1 - e^{-2\pi\alpha/\omega} = 1 - e^{-2\pi m},$$

$M = (1 + m^2)/2m$  — выражение (3.25) из работы [1], которое устанавливает связь между корневым показателем колебательности  $m$  и частотным показателем колебательности  $M$ . Ниже приведены значения  $m$ ,  $M$ ,  $\omega_{\text{рез}}/\omega_0$ ,  $T_1/T_2$  [1], соответствующие некоторым, наиболее часто употребляемым значениям степени затухания для колебательного звена:

|                                |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\psi$ .....                   | 0,65   | 0,70   | 0,75   | 0,80   | 0,85   | 0,9    | 0,95   |
| $m$ .....                      | 0,1671 | 0,1916 | 0,2206 | 0,2562 | 0,3019 | 0,3665 | 0,4768 |
| $M$ .....                      | 3,076  | 2,7054 | 2,3768 | 2,08   | 1,8071 | 1,5475 | 1,2871 |
| $\omega_{\text{рез}}/\omega_0$ | 0,9859 | 0,9814 | 0,9754 | 0,9750 | 0,9533 | 0,9304 | 0,8790 |
| $T_1/T_2$ ...                  | 0,3296 | 0,3764 | 0,4308 | 0,4964 | 0,5780 | 0,6882 | 0,8608 |

Отношение длин вектора  $(OA/BA) = M = \text{const}$ , поэтому

$$M = A_3(\omega) = \left| \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} \right|.$$

Принимая, что  $W_p(j\omega) = x + jy$ , найдем

$$M = \left| \frac{x + jy}{1 + x + jy} \right| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + 2x + x^2 + y^2}} = \text{const}$$

Преобразовав уравнение, можно записать, что

$$\left( x + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{M}{M^2 - 1} \right)^2.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение окружности, центр которой расположен на оси абсцисс и отстоит от начала координат на расстоянии

$$P_M = \frac{M^2}{M^2 - 1} \quad (85)$$

и имеет радиус

$$R_M = \frac{M}{M^2 - 1}. \quad (86)$$

Величина  $M$  является косвенным показателем склонности системы к колебательному переходному процессу. Чем больше  $M$ , тем больше склонность системы к колебательности. При наличии чисто мнимых корней в характеристическом уравнении системы показатель колебательности равен бесконечности. Чем ближе значение  $M$  к единице, тем менее система склонна к колебаниям. Семейство таких окружностей показано на рис. 56, а. Очевидно, что индекс окружности  $M$ , которую пересекает характеристика  $W_p(j\omega)$  при частоте  $\omega_1$ , равен значению амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы  $A_3(\omega_1)$ . Индекс окружности, которой характеристика  $W_p(j\omega)$  только касается, не пересекая ее, очевидно, равен максимуму  $A_3(\omega_{рез})$ . Таким образом, требование к значению резонансного пика амплитудно-частотной характеристики замкнутого контура может быть заменено следующим: замкнутый контур удовлетворяет требуемому запасу устойчивости, если КЧХ разомкнутого контура  $W_p(j\omega)$  не заходит внутрь запретной зоны, ограниченной окружностью, радиус и расположение центра которой на отрицательной вещественной полуоси определяются формулами (85) и (86). Если значение показателя колебательности  $M_{доп}$  выбрано равным 2,3768 ( $\psi = 0,75$ ), где  $\psi = 1 - e^{-2\pi\sigma/\omega}$ , то из этих формул получаем  $R_M = 0,5112$  и  $P_M = 1,2151$  (на рис. 56 область, ограниченная этой окружностью, заштрихована). Предельно допустимые значения параметров системы определяются в момент касания характеристики  $W_p(j\omega)$  окружности с показателем колебательности  $M = M_{доп}$ . В

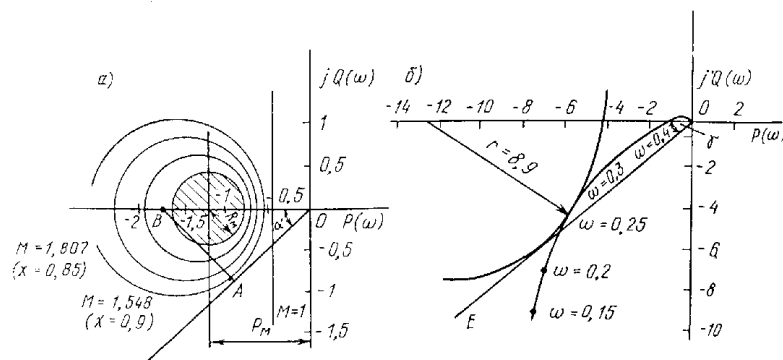


Рис. 56

частности, при определении предельно допустимого значения коэффициента передачи регулятора  $k_p$ , находящегося в замкнутом контуре системы, требуется построить характеристику  $W_p(j\omega)$  при произвольном значении этого коэффициента и начертить окружность с  $M_{доп}$ . Если окажется, что характеристика  $W_p(j\omega)$  попала внутрь запретной области, ее следует перестроить, уменьшив значение  $k_p$ ; если же характеристика  $W_p(j\omega)$  проходит вне круга, ее надо перестроить, выбрав большее значение  $k_p$ , т.е. требуется так выбрать значение  $k_p$ , чтобы характеристика  $W_p(j\omega)$  коснулась окружности с индексом  $M_{доп}$ .

Подобные вариации могут потребовать много усилий, поэтому следует поступить следующим образом:

построить характеристику  $W_p(j\omega)$  при произвольном значении коэффициента передачи  $k_p^0$  и провести луч под углом  $\gamma$  (см. рис. 56, б) к вещественной полуоси:

$$\gamma = \arcsin(1 / M_{доп}). \quad (87)$$

После этого строится окружность (подбором) с центром на отрицательной вещественной оси, которая касалась бы одновременно как указанного луча, так и характеристики  $W_p(j\omega)$ . Предельное значение коэффициента передачи регулятора после этого может быть найдено по формуле

$$k_{p,пр} = (R_M / r) k_p^0, \quad (88)$$

где  $k_p^0$  — значение коэффициента, при котором построена характеристика  $W_p(j\omega)$  (обычно выбирают  $k_p^0 = 1$ );  $R_M$  — радиус окружности с допустимым индексом  $M_{доп}$ ;  $r$  — радиус окружности, полученной в результате графических построений. Так, для  $M = 1,5475$  по уравнениям (87) и (88) получим  $\gamma = 40^\circ 15'$  и  $k_{p,пр} = 1,1095 k_p^0 / r$ , и для коэффициента передачи И-регулятора в системе регулирования уровня двухъёмкостного объекта [1], КЧХ которой в разомкнутом состоянии равна

$$W_p(j\omega) = -k_n / \{j\omega [(-\omega^2 + 0,375) + j \cdot 1,625\omega]\},$$

построения приведены на рис. 56, б. При этом

$$k_n = \frac{1,1095}{8,9} = 0,124 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}; \quad \omega_{рез} = 0,26 \text{ мин}^{-1}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ротач В.Я. Теория автоматического управления тепловыми процессами. — М.: Энергоиздат, 1985. — 290 с.
2. Нелепин Р.А. Автоматическое управление судовыми энергетическими установками. — Л.: Судостроение, 1986. — 295 с.

3. Печененко В.И., Козьминых Г.В. Основы автоматики и комплексная автоматизация судовых парознергетических установок. — М.: Транспорт, 1979. — 262 с.
4. Сыромятников В.Ф. Основы автоматики и комплексная автоматизация судовых парознергетических установок. — М.: Транспорт, 1983. — 312 с.
5. Широкий Д.К., Куриленко О.Д. Расчет параметров промышленных систем регулирования. — Киев: Техника, 1972. — 231 с.
6. Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования. — М.: Энергия, 1967. — 648 с.
7. Грязнов Н.В., Михайлушин А.И., Ротмистров А.Н. Основы автоматизации производственных процессов криогенной техники. — Л.: Машиностроение, 1980. — 181 с.

Св. план 1990 г., поз.  
Анатолий Иосифович Коханский

ОСНОВЫ АВТОМАТИЗАЦИИ СУДОВЫХ  
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК  
Учебное пособие

Редактор И.С. Политова  
Технический редактор Б.Г. Колобродова  
Корректор И.М. Авеиде

Сдано в набор 09.07.90. Подписано в печать 28.01.91. Формат изд. 60×90/16.  
Бум. офсетная. Гарнитура кириллицей совет. Печать офсетная. Печ. л. 7,5  
Уч.-изд. л. 6,86. Тираж 1000. Заказ тип. № 415. Изд. № 166-В. Цена 2р. 10к.  
В/О "Мортехинформреклама"  
125080, Москва, Волоколамское шоссе, 14

Типография "Морьяк", Одесса, ул. Ленина, 26

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие                                                                                            | 3   |
| <b>Глава I. Автоматическое управление</b>                                                              |     |
| § 1. Цели автоматизации производственных процессов                                                     | 5   |
| § 2. Основные понятия и определения в системах автоматического регулирования                           | 9   |
| § 3. Основные принципы построения систем регулирования                                                 | 13  |
| § 4. Основные свойства систем автоматического управления                                               | 17  |
| § 5. Классификация систем автоматического регулирования                                                | 20  |
| <b>Глава II. Объекты управления и определение их характеристик</b>                                     |     |
| § 6. Основные свойства объектов управления                                                             | 24  |
| § 7. Методика вывода дифференциального уравнения объектов управления                                   | 32  |
| § 8. Анализ влияния параметров объекта на переходный процесс                                           | 37  |
| § 9. Дифференциальное уравнение паровой турбины, работающей на винт фиксированного шага                | 41  |
| § 10. Применение преобразования Лапласа и передаточная функция                                         | 43  |
| § 11. Решение дифференциального уравнения методом операционного исчисления                             | 46  |
| § 12. Частотные характеристики и их связь с передаточной функцией                                      | 49  |
| <b>Глава III. Автоматические регуляторы и их свойства</b>                                              |     |
| § 13. Классификация регуляторов                                                                        | 53  |
| § 14. Астатический регулятор и его свойства                                                            | 54  |
| § 15. Статический регулятор и его свойства                                                             | 59  |
| § 16. Пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор)                                            | 62  |
| § 17. Пропорционально-дифференциальный регулятор                                                       | 67  |
| § 18. Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор                                           | 74  |
| § 19. Регуляторы с компенсацией возмущений или регуляторы с дополнительным импульсом по нагрузке       | 75  |
| § 20. Показатели качества регулирования                                                                | 84  |
| § 21. Выбор регулятора при проектировании систем автоматического управления                            | 88  |
| § 22. Выбор оптимальных параметров настройки автоматических регуляторов                                | 90  |
| § 23. Выбор параметров настройки регуляторов по переходной функции разомкнутой САУ                     | 91  |
| § 24. Выбор параметров настройки при аппроксимации кривой разгона одноемкостным звеном с запаздыванием | 93  |
| § 25. Настройка САУ по характеристикам замкнутой системы                                               | 94  |
| <b>Глава IV. Исследование устойчивости автоматических систем управления</b>                            |     |
| § 26. Понятие устойчивости системы                                                                     | 97  |
| § 27. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Рауса—Гурвица                                     | 100 |
| § 28. Критерий устойчивости И. А. Вышнеградского                                                       | 103 |
| § 29. Критерий устойчивости А. В. Михайлова                                                            | 104 |
| § 30. Частотный критерий устойчивости                                                                  | 108 |
| § 31. Устойчивость системы с запаздыванием                                                             | 112 |
| § 32. Оценка запаса устойчивости линейных систем по распределению корней характеристического уравнения | 113 |
| § 33. Оценка запаса устойчивости замкнутых систем по частотному показателю колебательности             | 115 |
| Список литературы                                                                                      | 119 |