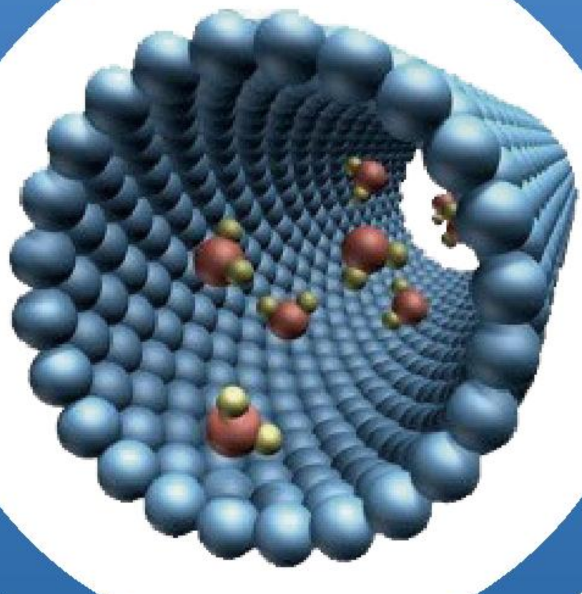
В. Я. ГАЛЬЧЕНКО Р. В. ТРЕМБОВЕЦКАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ MATHCAD – ПРАКТИКУМ

Учебное пособие



ЧЕРКАССЫ – 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ЧЕРКАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Я.ГАЛЬЧЕНКО, Р.В.ТРЕМБОВЕЦКАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ
MATHCAD - ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Черкассы
2016

УДК 519.85(076)
ББК 22.18я73
Г17

Рекомендовано к печати Ученым советом Черкасского государственного технологического университета (протокол №2 от 29 августа 2016 г.)

Рецензенты:

Верлань А.Ф. – главный научный сотрудник отдела математического и компьютерного моделирования Института проблем моделирования в энергетике им.Г.Е.Пухова НАНУ, член-корреспондент АПН Украины, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины

Снитюк В.Е. – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры интеллектуальных и информационных систем Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

Триус Ю.В. - доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедры компьютерных наук и информационных технологий управления Черкасского государственного технологического университета

Гальченко В.Я., Трембовецкая Р.В.

Линейные задачи оптимизации. MathCAD – практикум / В.Я. Гальченко, Р.В.Трембовецкая – Черкассы: ЧДТУ, 2016. – 116 с., ил.

ISBN 978-617-7318-37-7

В учебном пособии изложены конспективно основные теоретические положения и практический материал по решению задач линейного программирования. Существенное внимание уделено компьютерной реализации рассматриваемых методов в среде универсального математического пакета MathCAD, содержатся комплекты заданий для самостоятельной работы и большое количество примеров, способствующих лучшему пониманию и усвоению предмета.

Для студентов инженерно-технических и экономических специальностей вузов. Материал, изложенный в пособии, может быть также использован аспирантами и специалистами соответствующих профилей в своей научно-исследовательской работе.

ISBN 978-617-7318-37-7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выбор наилучшего варианта или, по крайней мере, близкого к нему по какому-либо критерию либо группе критериев среди множества возможных альтернативных вариантов представляет собой задачу, решение которой является актуальной для многих областей науки и техники. Отдельный класс задач рассматриваемых в данном учебном пособии, являющемся первой частью полного издания, представляют линейные задачи оптимизации. Они находят широкое применение в технике, экономике, химии, медицине, военных науках и др. Чаще всего решение подобных задач сводится к поиску экстремума функции в общем случае нескольких переменных, который ищется детерминированными, вероятностными или эвристическими методами. Методы решения задач указанного типа достаточно хорошо разработаны, а сведения о них содержатся в многочисленных литературных источниках, посвященных данной тематике. Среди них можно указать, например, такие, которые представляют особый интерес для читателей и относятся к фундаментальным: Таха Хэмди А. "Введение в исследование операций", 6-ое издание. – М.: Изд. Дом "Вильямс", 2001. – 912 с.; Зайченко Ю.П. "Дослідження операцій. Підручник", 7-ме видання, перероблене та доповнене.– К.: Видавничий Дім "Слово", 2006. – 816 с; Карманов В.Г. "Математическое программирование: учеб. пособие", 5-ое издание. — М.: Физматлит, 2004. — 264 с.

В тоже время решение практических задач линейного программирования в современных условиях предполагает широкое применение компьютерной техники, что, с одной стороны, позволяет избавиться от рутинной работы по выполнению зачастую громоздких вычислений, а, с другой стороны, делает возможным использование в своей работе программного обеспечения, написанного предшественниками, без существенных затрат времени на освоение не всегда простых методов решения задач линейной оптимизации.

В современной учебной литературе теоретический материал излагается с одновременной параллельной демонстрацией возможностей его реализации в различных прикладных компьютерных пакетах. Чаще всего читателя ориентируют на такие пакеты, как Microsoft Excel, Matlab, Mathematica и др. Достаточно популярной в этом смысле, например, является монография Курицкого Б.Я. "Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0" - СПб.: BHV –

Санкт-Петербург, 1997. – 384 с., где с позиций непрограммиста предложен для непрограммистов широкий спектр компьютерно-реализованных методов решения оптимизационных задач.

В данном учебном пособии авторы придерживаются той же концепции с той лишь разницей, что предлагают читателю воспользоваться для решения практических задач линейной оптимизации универсальным пакетом компьютерной математики MathCAD, имеющим ряд существенных преимуществ перед другими аналогичными пакетами. Характерной особенностью пакета, делающей его применение предпочтительным и целесообразным, является создание документов-приложений с использованием технологии WYSIWYG (*What You See Is What You Get* — "что видишь, то и получаешь"), т.е. с использованием привычных стандартных математических обозначений, когда документ на экране выглядит точно так же как и обычная математическая запись. Для использования пакета не требуется изучать какую-либо систему команд, как, например, в случае пакетов Mathematica или Matlab. Пакет ориентирован в первую очередь на проведение численных расчетов, но имеет встроенный символьный процессор, что позволяет выполнять аналитические преобразования. Он легок в освоении и удобен в использовании, обладает, кроме мощных вычислительных, достаточно продвинутыми графическими возможностями, отличается великолепным пользовательским интерфейсом. В дополнение ко всему математический пакет MathCAD имеет достаточно простые средства программирования, позволяющие при необходимости реализовать любой вычислительный алгоритм, что дает возможность встраивать в свой документ программные модули, содержащие стандартные алгоритмические структуры: ветвления и циклы. Детальный разбор приведенных в пособии программных модулей MathCAD, обладающих "прозрачной" структурой, позволяет обеспечить глубокое понимание сути изучаемых методов. В тоже время обучение на примерах предоставляет читателю возможность совершенствования в научном прикладном программировании.

В каждом разделе пособия для удобства приводится краткое изложение теоретического материала, а основной акцент делается на его практическую реализацию с применением современных компьютерных технологий.

Первый раздел пособия содержит сведения, а также соответствующие MathCAD-документы графического решения двумерных и многомерных, которые могут быть сведены к первым, линейных задач оптимизации.

Второй раздел посвящен численному решению задач линейного программирования с применением встроенных функций MathCAD, в том числе задач, характеризуемых наличием большого количества переменных, с использованием матричной формы записи.

В третьем разделе представлены приемы преобразования одной формы математической формулировки линейных оптимизационных задач в другую, в результате численного решения рассматриваемых задач в среде MathCAD показана эквивалентность различных форм.

Четвертый раздел демонстрирует возможности перехода от решения прямых задач линейной оптимизации к двойственным по отношению к ним эквивалентным задачам.

Пятый раздел рассматривает особенности решения в пакете MathCAD целочисленных задач линейного программирования, включая графический метод и метод полного перебора возможных значений переменных.

В шестом разделе содержатся сведения о методах решения многокритериальных линейных задач, в том числе основанные на поиске компромиссного решения для случаев противоречивых критериев.

Все приемы и методы, рассматриваемые в учебном пособии, в обязательном порядке иллюстрируются соответствующими MathCAD-документами, позволяющими без особых проблем разобраться в деталях изучаемых вопросов. Для успешного освоения изучаемого материала каждый раздел содержит комплект заданий для самостоятельного выполнения.

В заключение отметим, что представленный в пособии материал использовался при проведении авторами лекционных, практических и лабораторных занятий по курсам "Математические методы оптимизации и моделирование систем и процессов", "Оптимизация принятия решений в технике", которые читались студентам приборостроительных специальностей 3-го, 4-го и 6-го курсов Черкасского государственного технологического университета.

Авторы надеются, что материал учебного пособия будет полезен широкому кругу читателей: студентам, магистрантам, аспирантам, научным сотрудникам, всем, кто сталкивается с необходимостью решения задач линейной оптимизации.

1. Задачи линейного программирования

Линейное программирование (ЛП)– это метод решения оптимизационных задач, в моделях которых целевые функции и ограничения строго линейны.

ЛП успешно применяется в различных сферах для решения, прежде всего, экономических и управленческих задач (военной области, промышленности, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, здравоохранении и др., а также в социологических науках) [1-10].

К числу базовых задач линейного программирования относятся:

- Задача планирования производства (оптимального использования ресурсов);
- Задача раскроя материалов;
- Транспортная задача;
- Задача оптимальной загрузки производственного оборудования (распределительная задача);
- Задача о составлении рациона.

Совокупность соотношений, содержащих целевую функцию и ограничения на её аргументы, называется ***математической моделью***.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- целевую функцию (критерий оптимальности), максимум или минимум которой необходимо обеспечить;
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требования неотрицательности переменных.

Общей ЗЛП называется задача, которая состоит в определении оптимальных (максимальных или минимальных) значений линейной целевой функции, в которой система ограничений может содержать как равенства, так и неравенства.

Математическая формулировка общей задачи линейного программирования (ОЗЛП): требуется найти значения действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых *целевая функция* (показатель эффективности) [1-10]:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (1)$$

принимает экстремальное значение при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\ a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + ... + a_{i+1,n}x_n = b_{i+1}, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины, $i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Формулировку общей задачи линейного программирования можно записать более компактно:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{2}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ x_n \ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ x_n \ge 0$$

Стандартной (или симметричной) ЗЛП называется задача, которая состоит в определении оптимального значения целевой функции, при условии, что система ограничений представлена в виде системы неравенств.

Симметричная, или ***стандартная*** форма задачи линейного программирования имеет вид [1-10]:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max \qquad F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2,. \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge (\le) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge (\le) b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge (\le) b_m, \end{cases} \tag{3}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

Основной ЗЛП называется задача, которая состоит в определении оптимального значения целевой функции, при условии, что система ограничений представлена в виде системы уравнений.

Каноническая, или ***основная*** форма задачи линейного программирования имеет вид [1-10]:

$$
\begin{gathered}
F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \\
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases} \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{gathered}
\qquad (4)
$$

Данная система содержит m уравнений и n неизвестных, пусть $m < n$.

Совокупность чисел ($x_1, x_2, ..., x_n$), удовлетворяющих ограничениям задачи линейного программирования, называется ***допустимым решением*** задачи линейного программирования или опорным планом.

Множество всех допустимых решений задачи линейного программирования называется ***областью (множеством) допустимых решений.***

Допустимое решение, при котором целевая функция задачи линейного программирования принимает наибольшее (наименьшее) значение, называется ***оптимальным решением*** задачи линейного программирования $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ или оптимальным планом.

1.1 Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач, которая дает возможность наглядно представить их структуру [2, 4]. Задачу линейного программирования с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трехмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых больше трех, графическим методом может быть решена задача линейного программирования, система ограничений которой содержит n-неизвестных и m-линейно независимых уравнений, причем $n - m \leq 2$.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т.е. ограничения содержат две переменные. Требуется найти максимальное значение функции $F = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Каждое неравенство системы ограничений (5) геометрически определяет полуплоскость с граничными прямыми:

$$\begin{aligned} &F_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ &F_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ &\dots \\ &F_m : a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{aligned} \tag{6}$$

Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ определяют полуплоскости с граничными прямыми $x_1 = 0,\ x_2 = 0$.

Если система ограничений (5) совместна, то полуплоскости пересекаясь образуют общую часть, которая представляет собой совокупность точек, координаты которых удовлетворяют каждому неравенству системы ограничений (5).

Геометрически совокупность этих точек представляет собой выпуклый многоугольник, который называют ***областью допустимых решений (ОДР) ЗЛП.*** Причем ОДР может быть: ограниченным многоугольником; неограниченным многоугольником; лучом; отрезком; точкой.

Координаты каждой точки (как внутри, так и на границе) многоугольника допустимых решений удовлетворяют системе ограничений (5).

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и заключается в построении многоугольника допустимых решений, каждая точка которого является допустимым решением ЗЛП.

Среди бесчисленного множества допустимых решений, требуется отыскать такое решение, то есть найти такую точку, координаты которой обращают в *max* или *min* целевую функцию F.

Условимся называть *F=0* (без свободного члена) ***основной прямой***:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \qquad (7)$$

Теорема 1. Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения в одной из вершин многоугольника допустимых решений.

Теорема 2. Множество решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым множеством

Множество называется ***выпуклым***, если вместе с двумя любыми его точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

С геометрической точки зрения это означает, что выпуклое множество содержит вместе с любыми двумя своими точками и соединяющий их отрезок (см.рис.1, 2). На плоскости выпуклыми множествами являются отрезок, прямая, круг, треугольник, полуплоскость и вся плоскость.

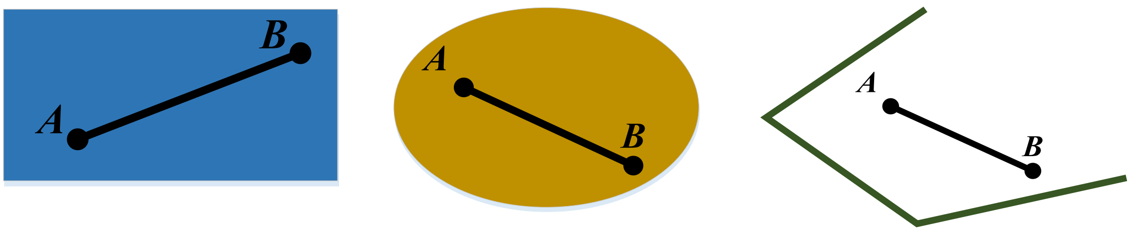


Рис.1 - Выпуклые множества

Рис.2 - Множества точек, которые не являются выпуклыми

Ограниченное множество решений системы ограничений ЗЛП называют ***выпуклым многогранником***, а неограниченное - ***выпуклой многогранной областью.***

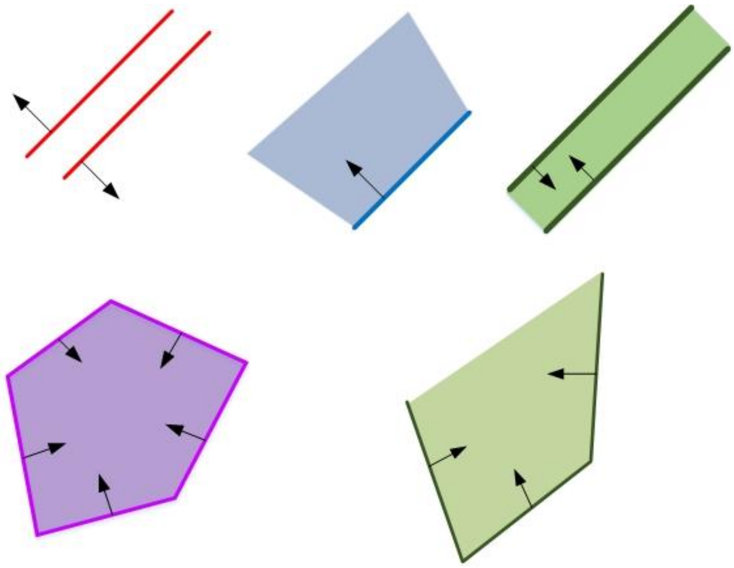


Рис.3 - Выпуклые многоугольники и выпуклые многоугольные области

Функция $F(x_1, x_2\ldots, x_n)$ называется ***ограниченной сверху (снизу) на множестве*** $M \subset R^n$, если существует число K такое, что для всех $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ из множества M выполняется неравенство $F(x_1, x_2,\ldots, x_n) \le K$ ($F(x_1, x_2,\ldots, x_n) \ge K$). Функция, ограниченная и сверху, и снизу, называется ограниченной [2, 4].

Будем говорить, что целевая функция ***ЗЛП ограничена***, если в задаче на максимум она ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум - снизу.

Теорема 3.Если в задаче линейного программирования допустимое множество отлично от пустого и целевая функция ограничена, то существует по крайней мере одно оптимальное решение.

Точку выпуклого множества, не являющуюся выпуклой линейной комбинацией никаких других его точек, называют ***угловой*** (или ***вершиной***) (см.рис.4).

Рис.4 - Вершины выпуклого множества

У выпуклого множества, изображенного на рис.4, точки X и W являются его вершинами, а точки Y и Z — нет. Действительно, каждая из двух последних точек является выпуклой линейной комбинацией других его точек: Y, например, является выпуклой линейной комбинацией точек Y_1 и Y_2, а Z — выпуклой линейной комбинацией Z_1 и Z_2. У X и W таких точек нет.

1.1.1. Графический метод решения двумерных задач линейного программирования

Графический метод решения ЗЛП включает следующие этапы:

1. Построение граничных прямых

- уравнения граничных прямых получают в результате замены в системе ограничений ЗЛП знаков неравенств на знаки точных равенств;
- находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений неравенств ЗЛП;
- находят многоугольник решений (область допустимых решений).

2. Построение вектора $\bar{c}$

Вектор $\bar{c}$ – указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции, вектор $(-\bar{c})$ (антиградиент) – направление наискорейшего убывания. Определяется $grad\,\mathrm{F} = \bar{c} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = (c_1 : c_2)$, так как $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}_1} = c_1$, $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}_2} = c_2$.

Вектор $\bar{c} = (c_1 : c_2)$ перпендикулярен к прямым $F = const$.

3. Построение основной прямой

Строят основную прямую $F = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\bar{c}$.

4. Построение линии уровня функции цели

Перемещают основную прямую $F = 0$ в направлении вектора $\bar{c}$ или в противоположном направлении вектора. В результате находят точку, в которой целевая функция принимает оптимальное решение, либо устанавливают неограниченность функции на множестве допустимых решений.

5. Определение координаты экстремальной точки

Определить оптимальный план $x^* = (x_1^*; x_2^*)$ и экстремальное значение целевой функции $F^* = F(x^*)$.

При решении задач ЛП возможны случаи:

1. Целевая функция принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение в единственной точке А (см.рис.5).

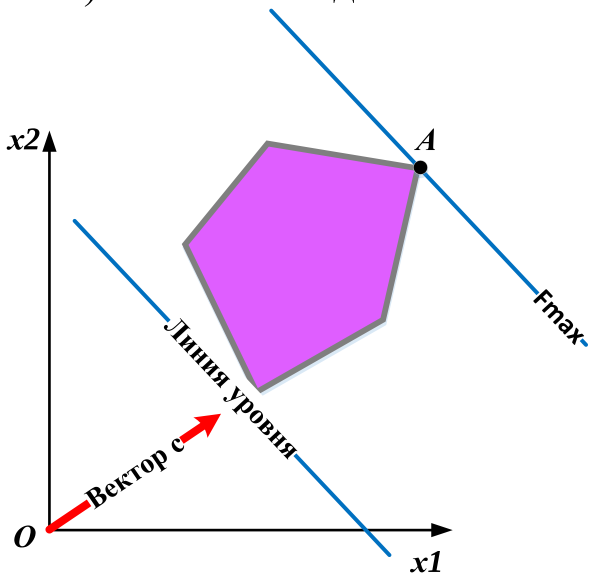


Рис.5 - Целевая функция принимает экстремальное значение в единственной точке А при поиске, например, *max*

2. Целевая функция принимает экстремальное значение в любой точке отрезка АВ (см.рис.6).

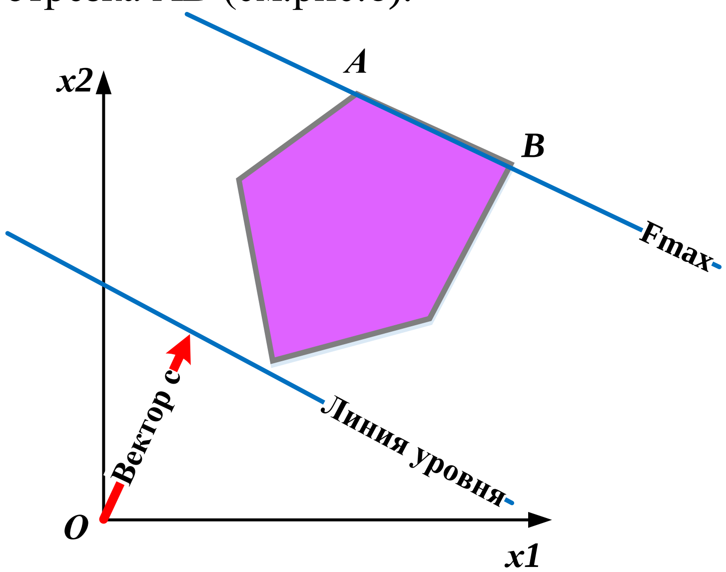


Рис.6 - Целевая функция принимает экстремальное значение в любой точке отрезка АВ

3. Целевая функция не ограничена сверху (при поиске на максимум) или снизу (при поиске на минимум) (см.рис.7)

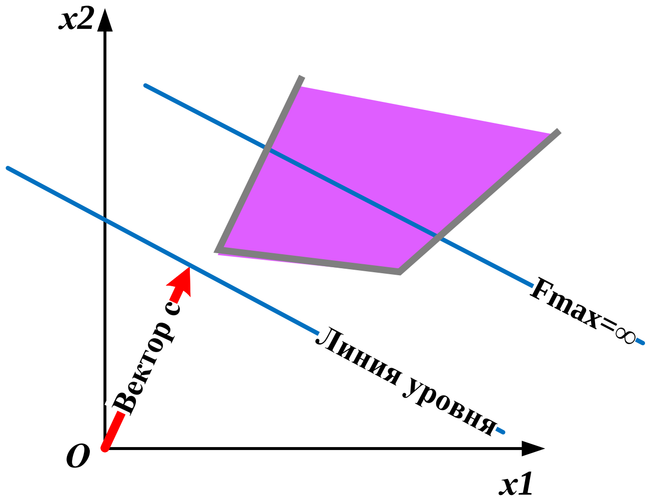


Рис.7 - Целевая функция не ограничена сверху

4. Система ограничений задачи несовместна

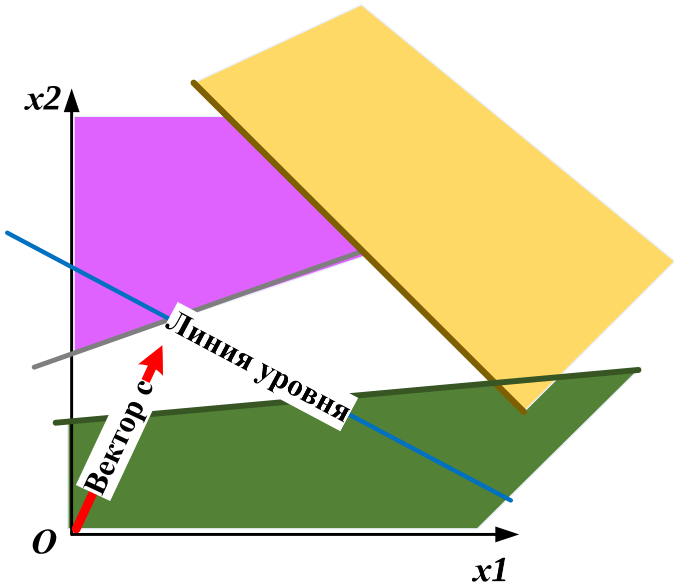


Рис.8 - Система ограничений задачи несовместна

Пример 1. Найти значения переменных x, y, которые доставляют минимум функции $f(x,y)=c_1\cdot x+c_2\cdot y=3\cdot x+2\cdot y$ при условиях:

$$\begin{cases} x+y\le 7 \\ x+2\cdot y\ge 7 \\ 2\cdot x+y\ge 7 \end{cases}$$

$$x\ge 0,\ y\ge 0$$

Порядок выполнения задания:

1. Построение допустимой области значений

Уравнения получают в результате замены в системе ограничений ЗЛП знаков неравенств на знаки точных равенств:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x+2\cdot y=7 \\ 2\cdot x+y=7 \end{cases}$$

1.1 Первое ограничение

Границей первой полуплоскости $x+y\le 7$ является прямая $x+y=7$. После преобразований и вводя обозначение y_1 для определенности, получим следующее уравнение прямой:

$$y_1=-x+7$$

Прямая 1 делит всю плоскость на две части и рассматриваемое неравенство определяет только одну из них. Для определения полуплоскости, заданной неравенством возьмем контрольную точку, не принадлежащую прямой 1, с известными координатами, например, точку $O(0,0)$. Координаты контрольной точки подставляем в неравенство $x+y\le 7$ и получим выражение вида $0+0\le 7$.

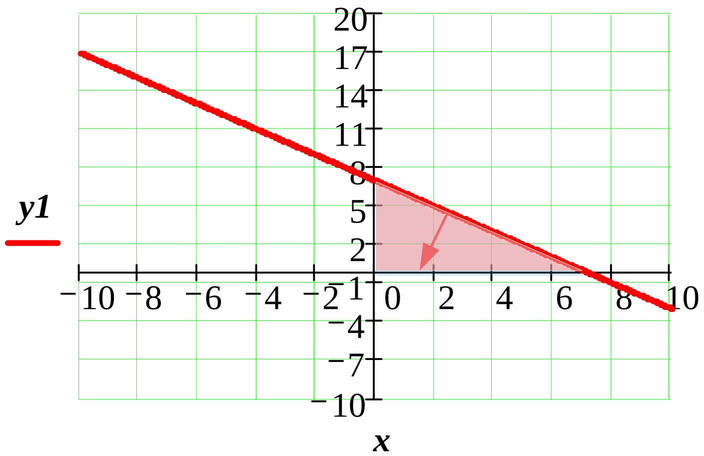


Рис.9 – Решение линейного неравенства $x+y\le 7$

Неравенство выполняется, координаты контрольной точки удовлетворяют ему, следовательно, полуплоскость, которой принадлежит точка О, и определяется исследуемым неравенством.

На рисунке полуплоскость, заданную неравенством $x+y\le 7$, отмечаем стрелкой (или штрихом) (см.рис.9).

1.2 Второе ограничение

Границей второй полуплоскости $x + 2 \cdot y \geq 7$ является прямая $x + 2 \cdot y = 7$. После преобразований и вводя обозначение y_2 для определенности, получим следующее уравнение прямой:

$$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$$

Анализируем аналогично, как в п.1.1, имеем (см.рис.10) полуплоскость, заданную неравенством $x + 2 \cdot y \geq 7$.

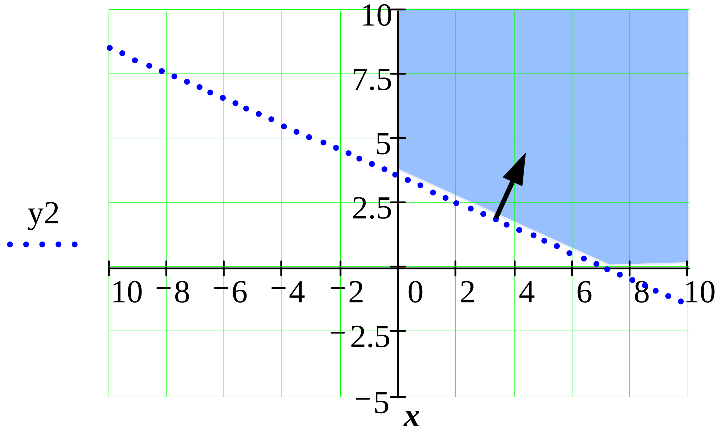


Рис.10 – Решение линейного неравенства $x + 2 \cdot y \geq 7$

1.3 Третье ограничение

Границей третьей полуплоскости $2 \cdot x + y \geq 7$ является прямая $2 \cdot x + y = 7$. После преобразований получим следующее уравнение прямой:

$$y_3 = -2 \cdot x + 7$$

Анализируем аналогично, как в п.1.1, имеем (см.рис.11) полуплоскость, заданную неравенством $2 \cdot x + y \geq 7$.

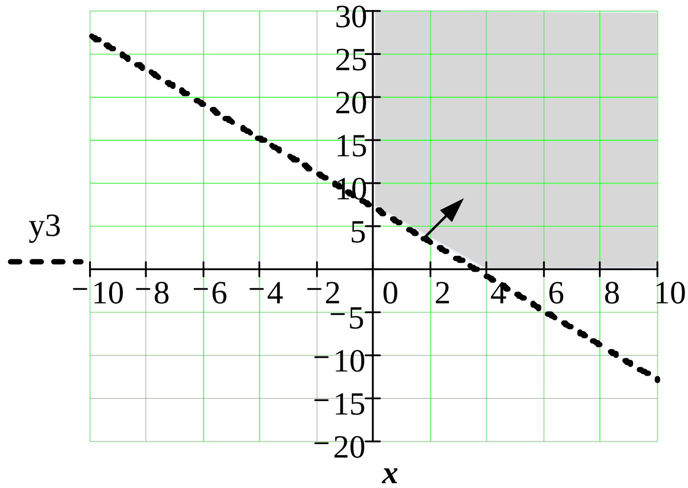


Рис.11 – Решение линейного неравенства $2 \cdot x + y \geq 7$

1.4 Определяем область допустимых значений в результате пересечения полуплоскостей

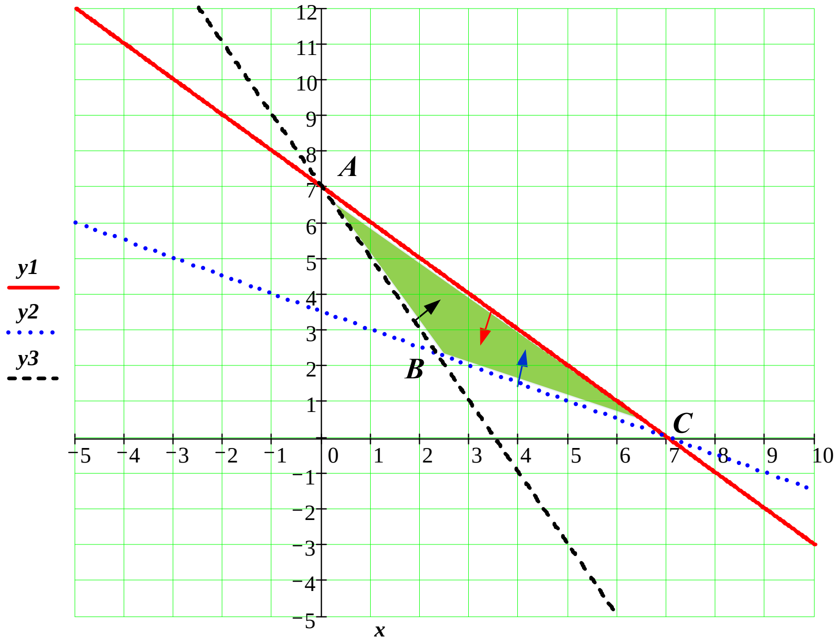


Рис.12 – Область допустимых значений

2. Строим вектор $\vec{c}(c_1,c_2)$

Вектор $\vec{c}(c_1,c_2)$ перпендикулярен линии уровня F_0 и указывает направление, в котором эта функция возрастает с наибольшей скоростью.

$$\bar{c} = \overrightarrow{grad}\, F(\bar{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y}\right) = (c_1,c_2) = (3{,}2)$$

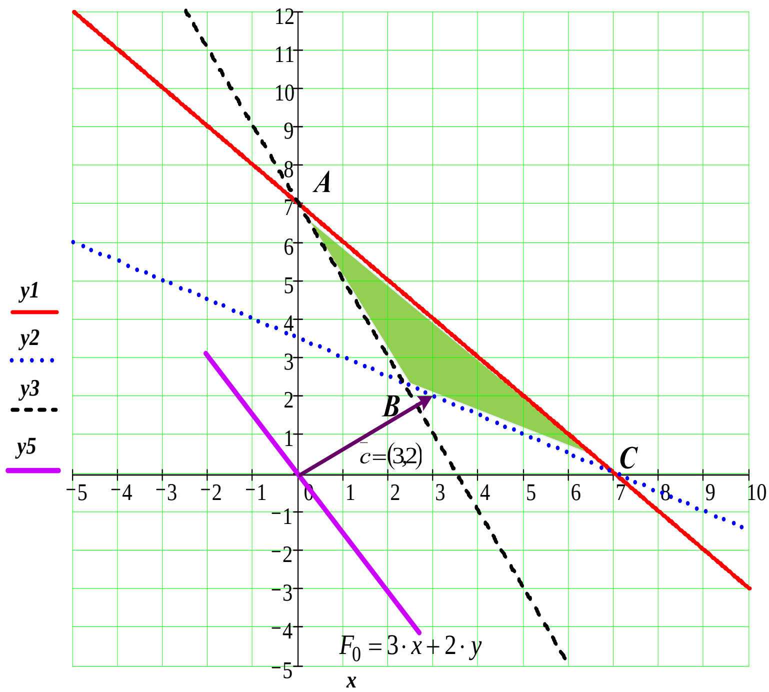


Рис.13 – Построение исходной линии уровня и вектора $\bar{c}$

3. Построение основной прямой

$$F_0 = 3 \cdot x + 2 \cdot y$$

$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x$$

Получим следующее уравнение прямой исходной линии уровня (см.рис.13):

$$y_5 = -\frac{3}{2} \cdot x$$

4. Построение линии уровня функции цели

Линия уровня задается уравнением $3 \cdot x + 2 \cdot y = const = C$.

$$3 \cdot x + 2 \cdot y = C$$

После преобразований получим следующее уравнение прямой уровня функции цели (см.рис.14):

$$y_4 = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot C$$

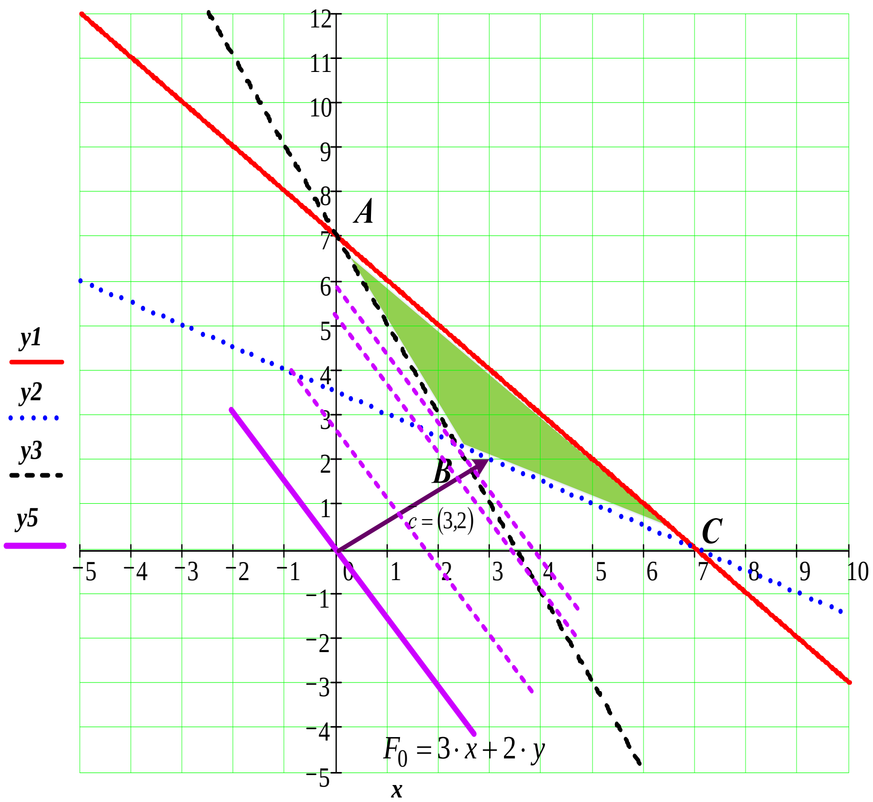


Рис.14 – Построение линии уровня функции цели

Определяем точку, в которой целевая функция F принимает минимальное значение. Для этого перемещаем линию уровня F_0 перпендикулярно к вектору $\vec{c}(c_1, c_2)$ до линии уровня, являющейся границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР (треугольник ABC). При движении в этом направлении общей точкой прямой с треугольником решений является точка B. В этой точке целевая функция принимает минимальное значение.

5. Определение координаты точки B

Как видно из рис.14 точка B лежит на пересечении прямых y_2 и y_3. Для нахождения координат точки B решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = 7 \\ 2 \cdot x + y = 7 \end{cases}$$

Получим $x = 2{,}33;\ y = 2.333$. Таким образом, целевая функция имеет минимальное значение в точке $B(2{,}33; 2{,}333)$. При этом минимальное значение функции цели:

$$F_{min} = 3 \cdot x + 2 \cdot y = 3 \cdot 2.333 + 2 \cdot 2.333 = 11.665\,.$$

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 1 Найти значения переменных x, y, которые доставляют минимум функции $f(x,y) = 3 \cdot x + 2 \cdot y$ при условиях: $\begin{cases} x + y \le 7 \\ x + 2 \cdot y \ge 7 \\ 2 \cdot x + y \ge 7 \end{cases}$

$x \ge 0,\ y \ge 0$

$f(x,y) := 3x + 2y$ - минимизируемая целевая функция

Заданная система ограничений:

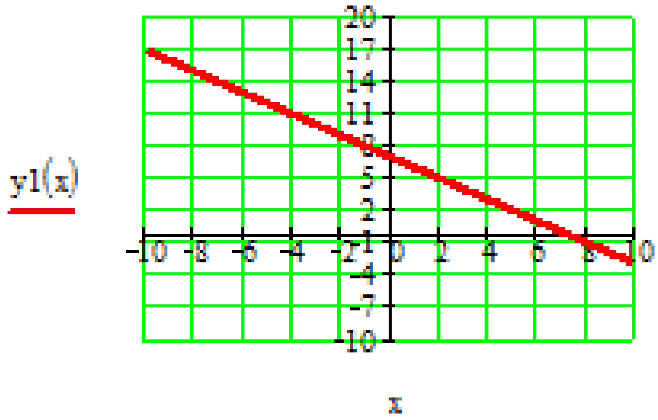
$x + y \le 7 \qquad x + 2y \ge 7 \qquad 2x + y \ge 7 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$

Построение допустимой области значений:

$x + y = 7$ - первое ограничение

$-x + 7$ - выражение переменной y из первого ограничения

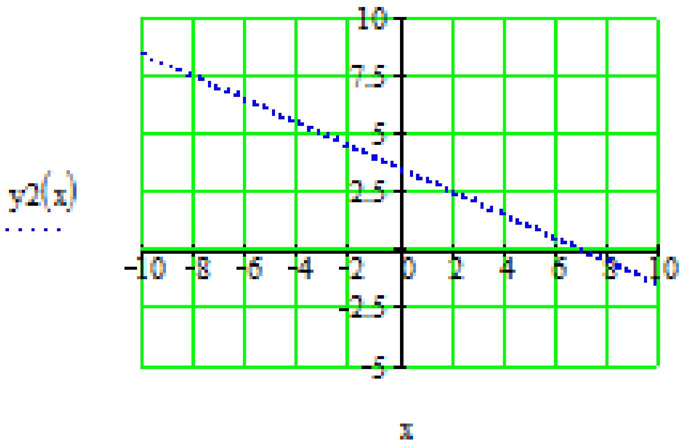
$y1(x) := -x + 7$ - функция геометрического изображения первого ограничения



Выбираем нижнюю полуплоскость, так как в ограничении используется знак "меньше или равно"

$x + 2y = 7$ - второе ограничение

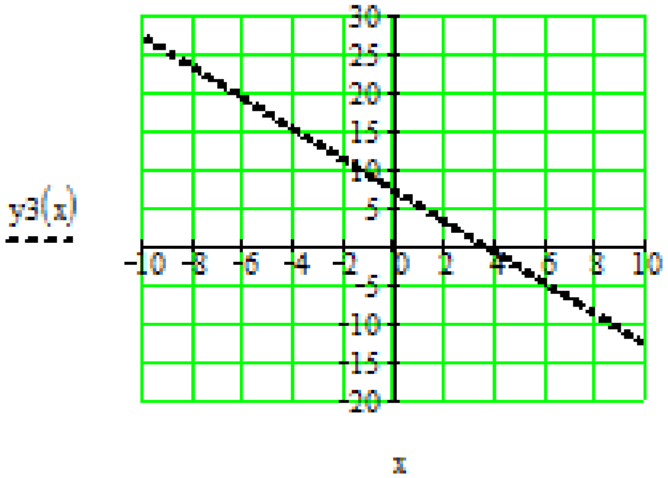
$\frac{-1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$ $\qquad y2(x) := \frac{-1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$



Выбираем верхнюю полуплоскость, так как в ограничении используется знак "больше или равно"

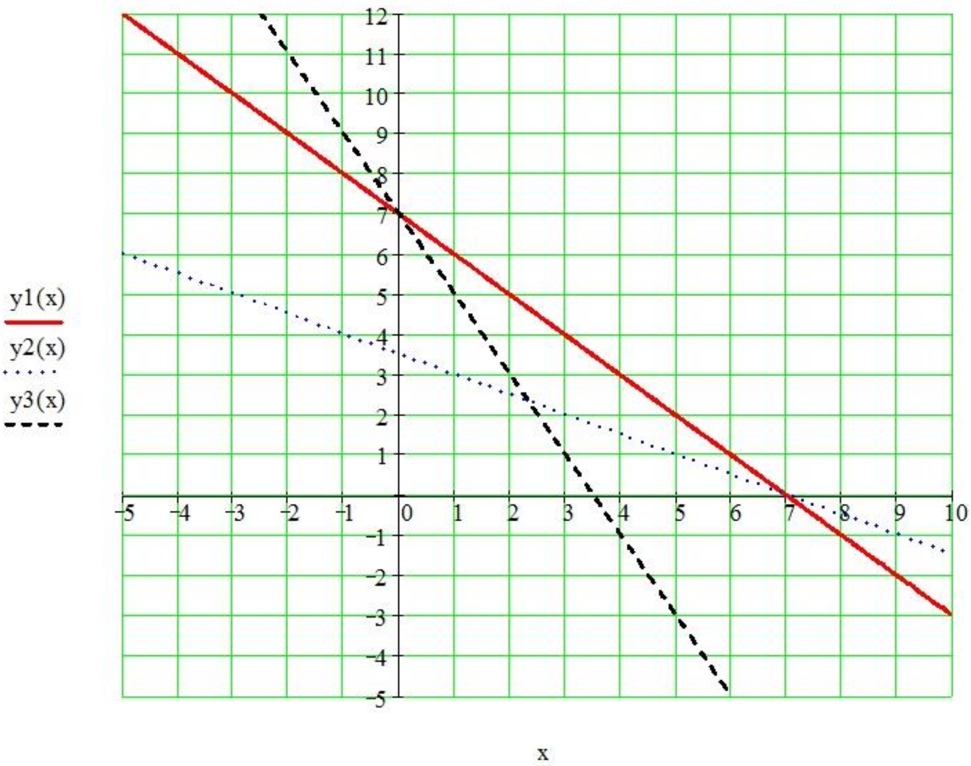
$2x + y = 7$ - третье ограничение

$-2 \cdot x + 7$ $\qquad y3(x) := -2 \cdot x + 7$

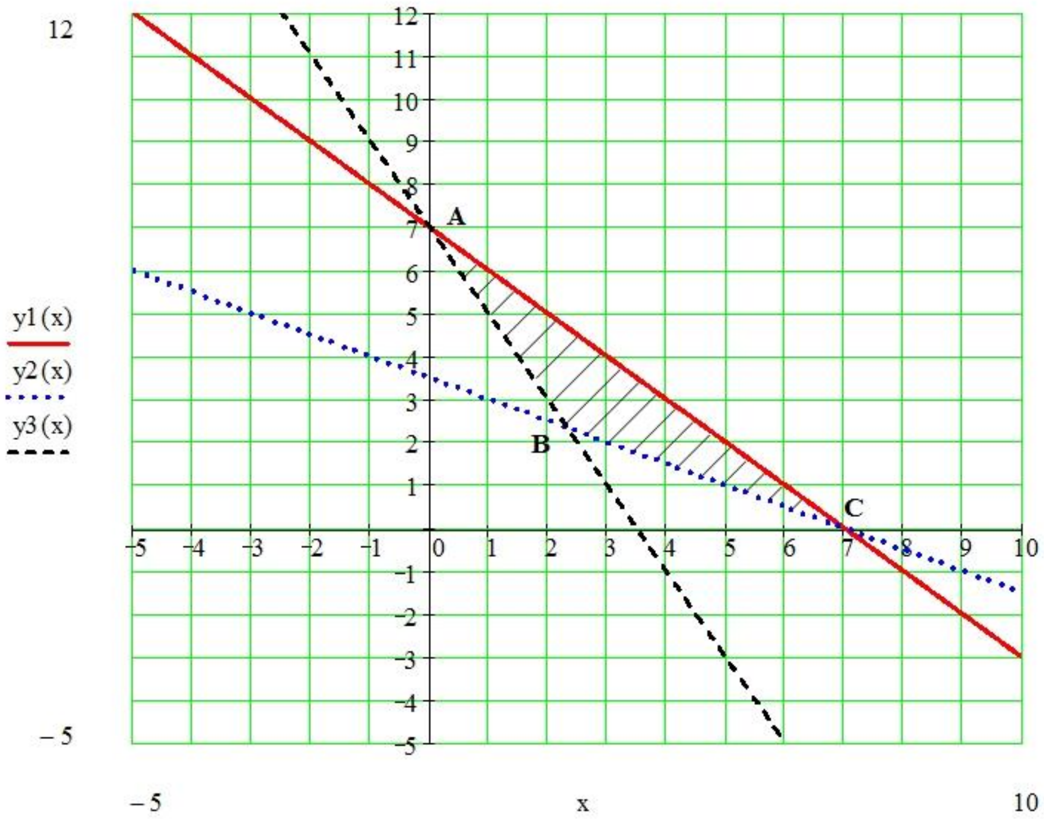


Выбираем верхнюю полуплоскость, так как в ограничении используется знак "больше или равно"

Определяем область допустимых значений в результате пересечения полуплоскостей:



Область допустимых значений:

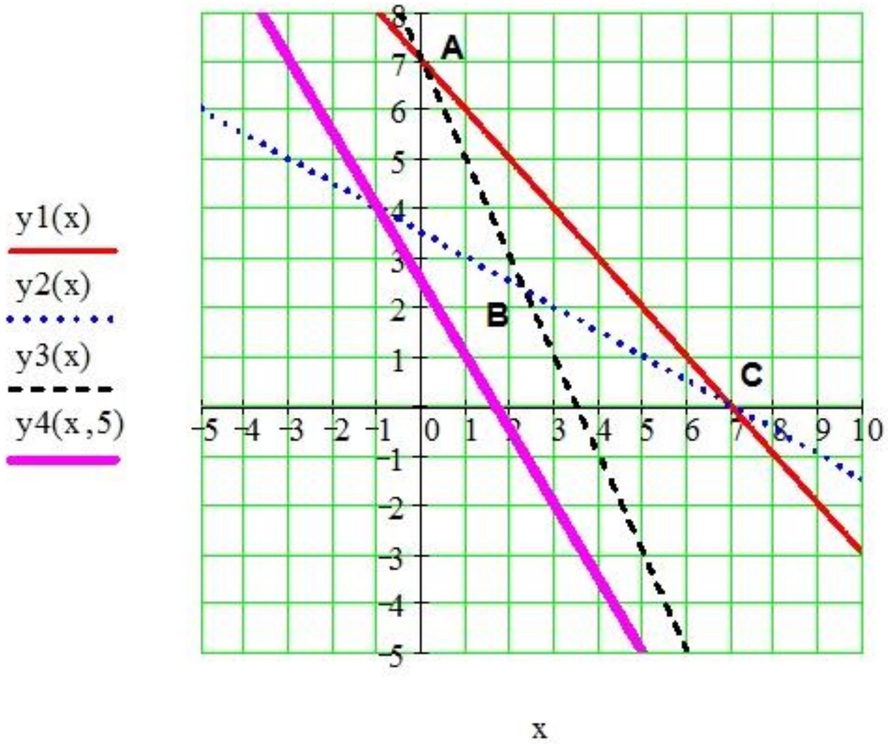


Построение линии уровня функции цели:

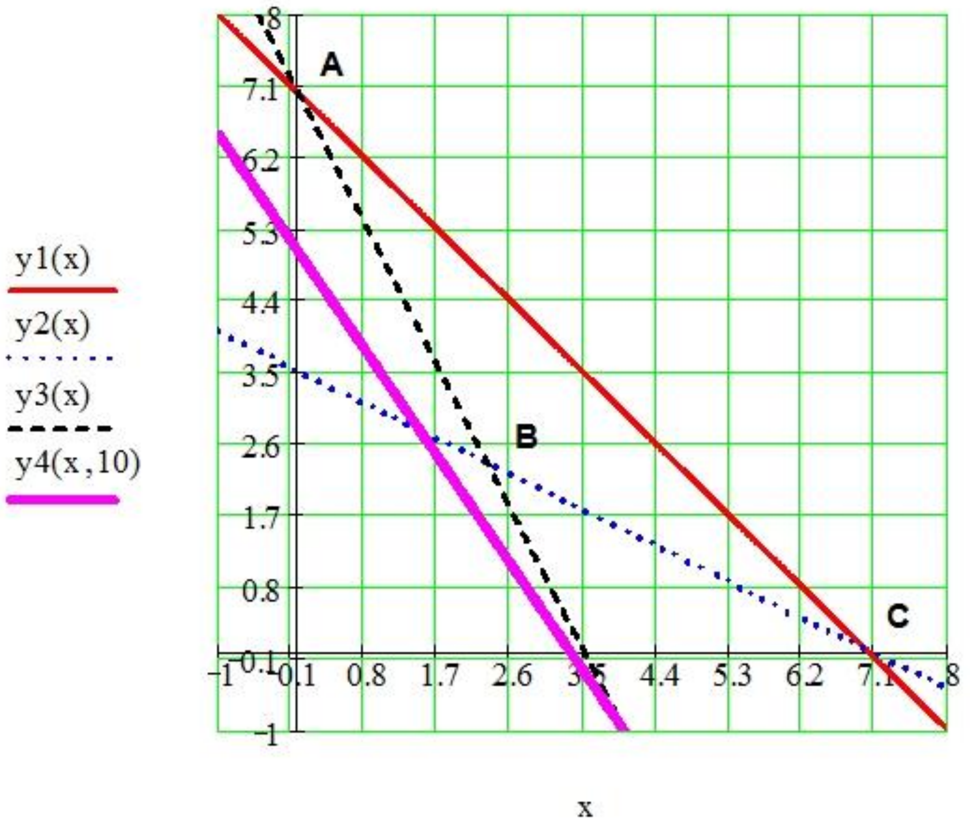
$3x + 2y = C$ - здесь C - это произвольная константа

$$\frac{-3}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot C$$

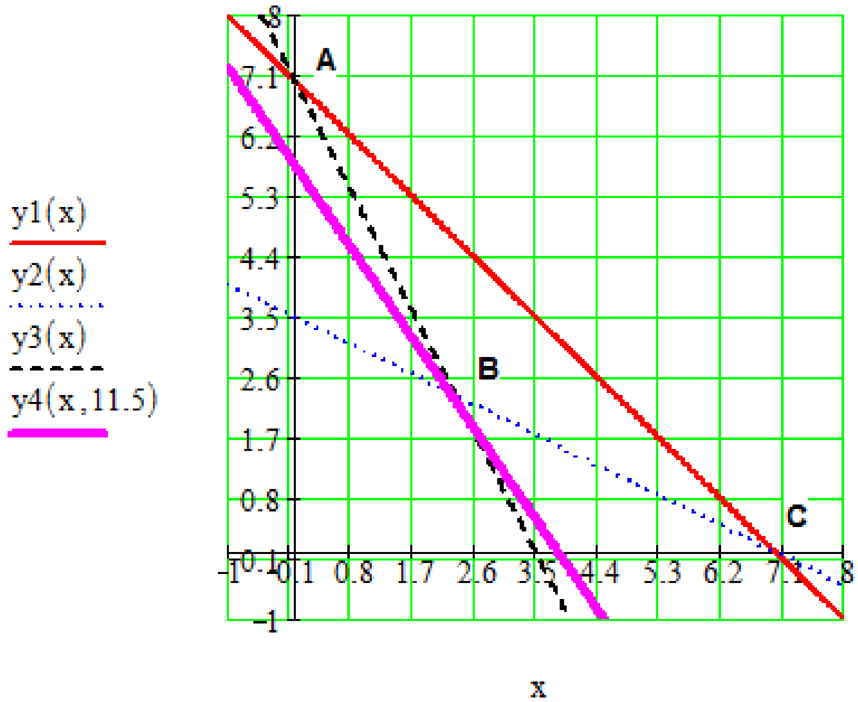
$$y4(x, C) := \frac{-3}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot C$$ - уравнение для построения линии уровня функции цели



- случай C = 5



- случай C = 10



- случай C = 11,5

Анализ приведенных случаев построения линий уровня позволяет определить направление антиградиента функции цели. Функция достигает минимума в точке B многоугольника допустимых значений, причем т.B образована пересечением прямых, соответствующих второму y2(x) и третьему y3(x) ограничениям.

Определение координат точки B с помощью блока Given - Find:

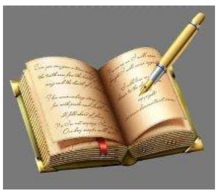
$x := 0 \qquad y := 0$

Given

$x + 2y = 7 \qquad 2x + y = 7$

$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 2.333 \end{pmatrix}$ - координаты точки B

$f(2.333, 2.333) = 11.665$ - минимальное значение функции цели



ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 1. Решите графическим методом задачу линейного программирования *($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$):*

вариант 1	*вариант 2*	*вариант 3*
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$ $max\,F = x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geq -\frac{3}{2} \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \\ -3x_1 + 9x_2 \leq 27 \end{cases}$ $min\,F = 3x_1 + x_2$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 6x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ -2x_1 + x_2 \geq -2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \end{cases}$ $max\,F = 3x_1 + x_2$

вариант 4	*вариант 5*	*вариант 6*
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 6x_2 \le 54 \\ -\frac{7}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 \ge -\frac{63}{4} \\ 3x_1 - 4x_2 \ge -12 \end{cases}$ $min\,F = -6x_1 + x_2$	$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ -\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \ge -1 \\ -x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{5}{2} \\ 7x_1 + 11x_2 \le 77 \end{cases}$ $max\,F = 3x_1 + x_2$	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 5x_1 + 15x_2 \le 75 \\ -4x_1 + 5x_2 \ge -20 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \end{cases}$ $min\,F = -3x_1 + 4x_2$
вариант 7	*вариант 8*	*вариант 9*
$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_2 \le 3 \\ -\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 \ge -\frac{27}{4} \\ 11x_1 + 7x_2 \le 77 \end{cases}$ $max\,F = x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ 4x_1 + 8x_2 \le 32 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$ $min\,F = 2x_1 - 3x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 8x_1 + 12x_2 \le 96 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \\ -5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$ $max\,F = 4x_1 + x_2$
вариант 10	*вариант 11*	*вариант 12*
$\begin{cases} x_1 \le 6 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \end{cases}$ $max\,F = x_1 + \frac{3}{2}x_2$	$\begin{cases} x_1 + 12x_2 \ge 5 \\ -3x_1 + 3x_2 \ge -24 \\ 4x_1 + 10x_2 \le 50 \\ 5x_1 - 12x_2 \ge -35 \end{cases}$ $max\,F = 5x_1 + \frac{1}{2}x_2$	$\begin{cases} x_1 \le 8 \\ 5x_1 + 7x_2 \ge 35 \\ -3x_1 + \frac{9}{2}x_2 \ge -\frac{27}{2} \\ x_1 - 3x_2 \ge -12 \end{cases}$ $min\,F = -6x_1 + 2x_2$
вариант 13	*вариант 14*	*вариант 15*
$\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 54 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ -9x_1 + 3x_2 \ge -30 \end{cases}$ $max\,F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -14 \\ x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$ $max\,F = 2x_1 + \frac{1}{2}x_2$	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -8 \\ -3x_1 + x_2 \ge -14 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \le \frac{21}{2} \end{cases}$ $min\,F = -7x_1 + 7x_2$

вариант 16	*вариант 17*	*вариант 18*
$\begin{cases} x_1 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 8x_1 + 12x_2 \le 96 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \end{cases}$ $min\,F = -3x_1 + \frac{5}{2}x_2$	$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \ge -1 \\ -x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{5}{2} \\ 7x_1 + 11x_2 \le 77 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$ $min\,F = -x_1 + 7x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 \ge 20 \\ x_1 - 3x_2 \ge -12 \\ 3x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{27}{2} \\ x_1 \le 2 \end{cases}$ $max\,F = x_1 + 2x_2$
вариант 19	*вариант 20*	*вариант 21*
$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ -4x_1 + 5x_2 \ge -20 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \end{cases}$ $max\,F = \frac{1}{2}x_1 + x_2$	$\begin{cases} \frac{5}{3}x_1 - x_2 \ge -10 \\ x_1 + \frac{4}{3}x_2 \ge \frac{32}{3} \\ x_1 - \frac{5}{2}x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$ $max\,F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 \ge -48 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 40 \\ 7x_1 - 5x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 73 \end{cases}$ $max\,F = 6x_1 + 5x_2$
вариант 22	*вариант 23*	*вариант 24*
$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ x_1 - 4x_2 \le -8 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 82 \end{cases}$ $max\,F = 7x_1 + 6x_2$	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 16 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 104 \end{cases}$ $min\,F = -4x_1 + 5x_2$	$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \ge -40 \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 56 \\ 3x_1 - 3x_2 \le 22 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 136 \end{cases}$ $min\,F = -5x_1 + 7x_2$
вариант 25	*вариант 26*	*вариант 27*
$\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 \ge -12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 8x_2 \le 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 84 \end{cases}$ $max\,F = 7x_1 + 9x_2$	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge -20 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 7x_2 \le 116 \end{cases}$ $max\,F = 3x_1 + 5x_2$	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -16 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 48 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 32 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 160 \end{cases}$ $max\,F = 7x_1 + 8x_2$

вариант 28	вариант 29	вариант 30
$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \ge -30 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 6 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -10 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 36 \\ x_1 - 3x_2 \le 14 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 90 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \ge -14 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 94 \end{cases}$
$min F = -3x_1 + 7x_2$	$min F = 2x_1 - 5x_2$	$min F = 8x_1 - 7x_2$

1.1.2. Графическое решение задач линейного программирования со многими переменными

Графическим способом можно решить ЗЛП со многими переменными при условии, что в их канонической записи (основная ЗЛП) содержится не более двух свободных переменных. Тогда ЗЛП со многими переменными можно свести к задаче линейного программирования с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами.

Решение таких задач проводят по следующей схеме:

- целевую функцию выражают через свободные переменные;
- переходят к случаю ЗЛП с двумя переменными.

Свести ЗЛП со многими переменными к виду, пригодному для решения графическим методом, можно в ряде случаев либо путем алгебраических преобразований, либо в более сложных случаях с помощью метода Жордана-Гаусса [9].

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными, $m \le n$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим через $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ матрицу системы, через $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$ - вектор - столбец, состоящий из неизвестных, через $A_0 = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)^T$ - вектор - столбец, состоящий из свободных членов, тогда систему (8) можно записать в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = A_0 \quad (9)$$

Если в матрице A можно указать k таких столбцов, которые содержат ровно по одному ненулевому элементу, причем любые два из этих ненулевых элементов находятся в разных строках, то переменные, соответствующие этим k столбцам, называются ***базисными.***

При сделанном выборе базисных переменных все остальные переменные называются ***свободными.***

Решение системы (8) сводится к нахождению коэффициентов $x_j, j = 1 \ldots n$.

При $m = n$ матрица A является квадратной; если ее определитель $|A| \neq 0$, то A^{-1} - обратная матрица. Умножая матричное уравнение (9) слева на обратную матрицу, получим:

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot A_0 \tag{10}$$

где E – единичная матрица, а произведение матриц $A^{-1} \cdot A_0$ является решением системы.

Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения трудоемкий вычислительный процесс, поэтому при решении системы линейных уравнений воспользуемся численным методом, который позволяет с помощью элементарных преобразований за конечное число шагов найти решение (если оно существует) и при необходимости получить обратную матрицу. Этот метод называется методом полного исключения неизвестных или ***методом Жордана-Гаусса.*** Суть метода состоит в том, что, рассмотрев первое уравнение, а в нем неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля (он в дальнейшем называется разрешающим элементом), и разделив первое уравнение на этот коэффициент, с помощью первого уравнения исключают это неизвестное из всех уравнений, кроме первого. Выбрав во втором уравнении неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, и разделив на него второе уравнение, с помощью второго уравнения исключают другое неизвестное из всех уравнений, кроме второго, и т.д., т.е. с помощью одного уравнения производят полное исключение одного неизвестного. Процесс продолжают до тех пор, пока не будут использованы все уравнения. При этом возможны следующие случаи:

1. В процессе исключений левая часть *i-го* уравнения системы обращается в нуль, а правая часть равна некоторому числу, отличному от нуля, т.е. имеет место равенство $0 = b_i \neq 0$. Это означает, что

система не имеет решений, так как *i-му* уравнению не могут удовлетворять никакие значения неизвестных.

2. Левая и правая части *i-го* уравнения обращаются в нуль. Это означает, что *i-е* уравнение является линейной комбинацией остальных, ему удовлетворяет любое найденное решение системы, поэтому оно может быть отброшено.

3. После того, как все уравнения использованы для исключения неизвестных, либо будет получено решение, либо доказано, что система несовместна.

Приведем общую формулу преобразования элементов матрицы A в простейшем варианте метода Жордана-Гаусса для разрешающих элементом на главной диагонали, считая вектор A_0 столбцом этой матрицы с номером $n+1$

$$a_{kj} = a_{kj} - a_{ij} \cdot \frac{a_{ki}}{a_{ii}} \tag{11}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = i, i+1, \ldots, n+1; \quad k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$$

Пример 2. Найти графическим методом оптимальный план задач линейного программирования *($x_j \geq 0$).*

$$f(x_1, x_2, x_4, x_6) = -3 \cdot x_1 + x_2 - x_4 - x_6 \rightarrow (\max)\min$$

$$\begin{cases} -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3 \cdot x_2 + x_4 = 9 \\ 7 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_5 = 28 \\ x_1 - 3 \cdot x_2 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 6$$

Порядок выполнения задания:

1. Базисные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 системы ограничений и целевую функцию выразим через свободные переменные x_1, x_2.

Для определения базисных и свободных переменных составим матрицу коэффициентов системы ограничений:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Выразив все базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 2 + 2 \cdot x_1 - x_2 \\ x_4 = 9 + x_1 - 3 \cdot x_2 \\ x_5 = 28 - 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \\ x_6 = -x_1 + 3 \cdot x_2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6$$

получим $f = -3 \cdot x_1 + x_2 - 9 \to (\max)\min$.

Так как по условию задачи $x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$, можно записать:

$$f = -3 \cdot x_1 + x_2 - 9 \to (\max)\min \qquad\qquad f = -3 \cdot x_1 + x_2 - 9 \to (\max)\min$$

$$\begin{cases} 2 + 2 \cdot x_1 - x_2 \geq 0 \\ 9 + x_1 - 3 \cdot x_2 \geq 0 \\ 28 - 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2 \cdot x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 9 \\ 7 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \leq 28 \\ x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \qquad\qquad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Получим ЗЛП с двумя переменными, которую можно решить графическим методом.

Пример 3. Найти графическим методом оптимальный план задачи линейного программирования *($x_j \geq 0$)*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + 2 \cdot x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Порядок выполнения задания:

1. Задача представлена в каноническом виде и количество переменных больше числа уравнений на 2. Для построения области допустимых решений выделим базисные переменные путем алгебраических преобразований расширенной матрицы коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3/2 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Базисными переменными являются x_2 *и* x_3. Составим по последней расширенной матрице систему уравнений и выразим базисные переменные:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2} \cdot x_4 = \dfrac{3}{2} \\ 2 \cdot x_1 + x_3 + 2 \cdot x_4 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} \cdot x_1 - \dfrac{1}{2} \cdot x_4 \\ x_3 = 1 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_4 \end{cases}$$

По условию $x_2, x_3 \geq 0$, следовательно:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} \cdot x_1 - \dfrac{1}{2} \cdot x_4 \geq 0 \\ 1 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Окончательно систему ограничений ЗЛП, выраженную через свободные переменные запишем:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot x_1 + \dfrac{1}{2} \cdot x_4 \leq \dfrac{3}{2} \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_4 \leq 1 \end{cases}.$$

2. Выразим целевую функцию только через базисные переменные. Для этого подставим найденные значения для x_2 *и* x_3 в функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Имеем

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_4 \right) - (1 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_4) + x_4 =$$

$$= 2 + x_1 + 2 \cdot x_4$$

Получили задачу линейного программирования с двумя переменными, решая которую находим максимальное значение целевой функции и оптимальные значения переменных x_1 *и* x_4.

3. Пример 3 решим с помощью метода Жордана –Гаусса.

- В MathCAD запишем программу преобразования коэффициентов матрицы (см. пример выполнения примера 3 в MathCAD).
- Запишем расширенную матрицу, дополненную правыми частями.

В заданной матрице определим разрешающий элемент. В данном случае принимаем $a_{ij} = a_{12} = 2$ разрешающим элементом.

- Применяем метод Жордана-Гаусса. Во второй строке полученной матрицы *B1* также выберем разрешающий элемент (больший из коэффициентов). Это будет $a_{ij} = a_{21} = 2$, и применяем метод Жордана-Гаусса еще раз.
- Как видно, получили матрицу с двумя базисными переменными x_1, x_2 и двумя свободными переменными x_3, x_4.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 3 Найти графическим методом оптимальный план задач линейного программирования *($x_j \geq 0$).*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + 2 \cdot x_4 = 1 \end{cases}$$

- исходная задача

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$ORIGIN := 1$$

ПРОГРАММА МЕТОДА ЖОРДАНА - ГАУССА
JG(M, a, b)
M - исходная расширенная матрица
a - номер строки разрешающего элемента
b - номер столбца разрешающего элемента

```
JG(M,a,b) := | for i ∈ 1 .. rows(M)
             |   for j ∈ 1 .. cols(M)
             |     | N[i,j] ← M[i,j] / M[a,b]   if i = a
             |     | N[i,j] ← M[i,j] − M[i,b]·M[a,j] / M[a,b]   otherwise
             | N
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- расширенная матрица, дополненная правыми частями

$$B1 := JG(A, 1, 2) \qquad B1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & -0.5 & -0.5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B2 := JG(B1,2,1) \qquad B2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.75 & -1 & 0.75 \\ 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

свободные переменные x3 и x4 базисные переменные x1 и x2

4. Проведем ряд преобразований

Из полученной матрицы *B2* запишем уравнения ограничений:

$$\begin{cases} x_2 - 0{,}75 \cdot x_3 - x_4 = 0{,}75 \\ x_1 + 0{,}5 \cdot x_3 + x_4 = 0{,}5 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$

Выражаем базисные переменные через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}75 \cdot x_3 + x_4 + 0{,}75 \\ x_1 = -0{,}5 \cdot x_3 - x_4 + 0{,}5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Следовательно

$$\begin{cases} 0{,}75 \cdot x_3 + x_4 \geq -0{,}75 \\ -0{,}5 \cdot x_3 - x_4 \geq -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}75 \cdot x_3 + x_4 \geq -0{,}75 \\ 0{,}5 \cdot x_3 + x_4 \leq 0{,}5 \end{cases}$$

Определяем новую целевую функцию:

$$f(x_3, x_4) = 2 \cdot (-0{,}5 \cdot x_3 - x_4 + 0{,}5) + 2 \cdot (0{,}75 \cdot x_3 + x_4 + 0{,}75) - x_3 + x_4 \to \max$$

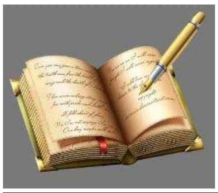
$$f(x_3, x_4) = -0{,}5 \cdot x_3 + x_4 + 2{,}5 \to \max$$

Получим следующую целевую функцию с ограничениями:

$$f(x_3, x_4) = -0{,}5 \cdot x_3 + x_4 + 2{,}5 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}75 \cdot x_3 + x_4 \geq -0{,}75 \\ 0{,}5 \cdot x_3 + x_4 \leq 0{,}5 \end{cases}$$

Далее решение ищется графическим методом для двух переменных (см.п.1.1.1.)



ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 2. Найти графическим методом оптимальный план задачи линейного программирования *($x_j \geq 0$)*.

вариант 1	*вариант 2*
$F_{\max} = 7x_1 + x_2 + x_3 - x_4$ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$	$F_{\max} = 8x_1 + x_2 - 3x_3$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$
вариант 3	*вариант 4*
$F_{\max} = 6x_2 + x_3 - x_4$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$	$F_{\max} = 6x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$
вариант 5	*вариант 6*
$F_{\max} = 5x_1 - x_2 + x_3$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$	$F_{\max} - 8x_1 - x_2 - x_3 + x_4$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 9 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$
вариант 7	*вариант 8*
$F_{\max} = x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5$ $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ -x_1 - x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$	$F_{\max} = x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4$ $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 7 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$
вариант 9	*вариант 10*
$F_{\max} = x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5$ $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 6x_5 = 5 \end{cases}$	$F_{\max} = -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$

вариант 11	*вариант 12*
$F_{\max} = 2x_2 + x_4 - 3x_5$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_5 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 12x_5 = 6 \end{cases}$	$F_{\max} = 10x_1 + 5x_2 - 25x_3 - 5x_4$ $\begin{cases} 8x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 24x_5 = 32 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 15 \end{cases}$
вариант 13	*вариант 14*
$F_{\max} = 6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$	$F_{\max} = -5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7 \\ 4x_2 + 8x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$
вариант 15	*вариант 16*
$F_{\max} = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$	$F_{\max} = 7x_1 + x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$
вариант 17	*вариант 18*
$F_{\max} = 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \end{cases}$	$F_{\max} = 3x_3 - 2x_4 - x_5$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 5 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = 7 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$
вариант 19	*вариант 20*
$F_{\max} = x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5$ $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$	$F_{\max} = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$
вариант 21	*вариант 22*
$F_{\max} = 6x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$	$F_{\max} = 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$

вариант 23	*вариант 24*
$F_{\max} = 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$	$F_{\max} = 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10 \end{cases}$
вариант 25	*вариант 26*
$F_{\max} = x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$	$F_{\max} = 5x_1 + x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$
вариант 27	*вариант 28*
$F_{\max} = 7x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \end{cases}$	$F_{\max} = x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 28 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$
вариант 29	*вариант 30*
$F_{\max} = -2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$	$F_{\max} = 8x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 6 \end{cases}$

2. Численное решение задач линейного программирования в среде MATHCAD

2.1. Численное решение задач линейной оптимизации с небольшим количеством неизвестных

Система MathCAD позволяет упростить решение задач линейного программирования, используя при этом основные функции ***Maximize* и *Minimize*.**

Maximize(f, var1, var2,…) – возвращает значения var1, var2, …, которые обеспечивают функции f максимальное значение. Перед использованием этой функции необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной и, если ограничения даны, ключевое слово ***Given.***

Minimize(f, var1, var2,…) – возвращает значения var1, var2, …, которые обеспечивают функции f минимальное значение. Перед использованием этой функции необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной и, если ограничения даны, ключевое слово ***Given.***

Пример 4. Поиск экстремума ЗЛП

$$f(x) = 108\cdot x_1 + 112\cdot x_2 + 126\cdot x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8\cdot x_1 + 0.5\cdot x_2 + 0.6\cdot x_3 \le 800 \\ 0{,}4\cdot x_1 + 0.4\cdot x_2 + 0.9\cdot x_3 \le 600 \\ 0.1\cdot x_2 + 0.1\cdot x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0$$

Порядок выполнения задания:

Ищем экстремум с помощью функции ***Maximize***:

- Задать функцию цели, подлежащую максимизации;
- Присвоить начальные значения переменным $x_1 = x_2 = x_3 = 1$;
- Записать систему ограничений и условия неотрицательности с использованием ключевого слова ***Given (дано);***
- Найти максимум целевой функции – используем функцию ***Maximize;***
- Получить точки экстремума целевой функции;
- Определить значение целевой функции в точке экстремума.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 4 Поиск экстремума с помощью функции *Maximize*

$$f(x) = 108 \cdot x_1 + 112 \cdot x_2 + 126 \cdot x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.6 \cdot x_3 \le 800 \\ 0{,}4 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.9 \cdot x_3 \le 600 \\ 0.1 \cdot x_2 + 0.1 \cdot x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0$$

$f(x1, x2, x3) := 108x1 + 112x2 + 126x3$ - функция цели, подлежащая максимизации

$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1$ - начальные значения переменных

Given

$x1 \ge 0 \quad x2 \ge 0 \quad x3 \ge 0$

$0.8x1 + 0.5x2 + 0.6x3 \le 800$ - система ограничений

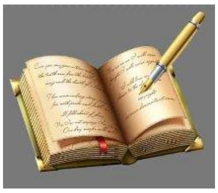
$0.4x1 + 0.4x2 + 0.9x3 \le 600$

$0.1x2 + 0.1x3 \le 120$

$x := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2, x3)$ - определение максимального значения функции цели

$$x = \begin{pmatrix} 244.444 \\ 1.156 \times 10^3 \\ 44.444 \end{pmatrix}$$ - найденное оптимальное решение

$f(244.444, 1.156 \cdot 10^3, 44.444) = 1.615 \times 10^5$ - оптимальное значение функции цели



ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 3. Найти экстремум следующих ЗЛП, используя встроенные функции MathCAD

вариант 1	*вариант 2*
$f(x) = x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -5x_1 - 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

вариант 3	*вариант 4*
$f(x)=3x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 6 \\ x_1-2x_2\le 4 \\ x_1-3x_2\le 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$	$f(x)=5x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 18 \\ 5x_1-x_2\le 20 \\ x_1-x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$
вариант 5	*вариант 6*
$f(x)=x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 6 \\ -x_1-3x_2\le 6 \\ -x_1+2x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$	$f(x)=2x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 10 \\ -2x_1+3x_2\le 6 \\ x_1+x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$
вариант 7	*вариант 8*
$f(x)=x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1+5x_2\le 20 \\ 3x_1-x_2\le 15 \\ x_1+x_2\le 6 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$	$f(x)=6x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1-x_2\le 4 \\ -x_1+3x_2\le 6 \\ x_1-x_2\le 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$
вариант 9	*вариант 10*
$f(x)=5x_1+7x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1-6x_2\le 30 \\ -3x_1+14x_2\le 42 \\ x_1+4x_2\le 28 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$	$f(x)=x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+3x_2\le 6 \\ -x_1+x_2\le 1 \\ 3x_1-x_2\le 6 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$
вариант 11	*вариант 12*
$f(x)=3x_1-2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ -2x_1+x_2\le 2 \\ x_1-x_2\le 12 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$	$f(x)=2x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 10 \\ -2x_1+3x_2\le 6 \\ x_1-x_2\le 4 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$

вариант 13	*вариант 14*
$f(x)=3x_1+2x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 8\\ x_1+3x_2\le 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$	$f(x)=x_1+4x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 6\\ x_1+3x_2\le 9\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$
вариант 15	*вариант 16*
$f(x)=x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}3x_1+4x_2\le 12\\ 2x_1-x_2\le 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$	$f(x)=2x_1+3x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}x_1+4x_2\le 12\\ x_1+x_2\le 4\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$
вариант 17	*вариант 18*
$f(x)=x_1+2x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}5x_1+4x_2\le 20\\ 3x_1-x_2\le 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$	$f(x)=x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}x_1+2x_2\le 8\\ 6x_1-x_2\le 3\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$
вариант 19	*вариант 20*
$f(x)=x_1+5x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 24\\ -x_1+x_2\le 12\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$	$f(x)=x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}x_1+2x_2\le 14\\ -5x_1+3x_2\le 15\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$
вариант 21	*вариант 22*
$f(x)=x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}x_1+2x_2\le 14\\ 2x_1+x_2\le 10\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$	$f(x)=2x_1+3x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}-4x_1+2x_2\le 4\\ x_1+x_2\le 6\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$
вариант 23	*вариант 24*
$f(x)=2x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}4x_1+x_2\le 16\\ x_1+x_2\le 11\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$	$f(x)=2x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 3\\ x_1-2x_2\le 1\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$

вариант 25	вариант 26
$f(x)=x_1+6x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 10 \\ x_1 \le 8 \\ -x_1+x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$f(x)=x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1-x_2 \le 6 \\ -x_1+3x_2 \le 6 \\ x_1+x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
вариант 27	*вариант 28*
$f(x)=6x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 20 \\ -x_1+x_2 \le 15 \\ x_1-3x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$f(x)=x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1-3x_2 \le 6 \\ x_1+x_2 \le 9 \\ -x_1+x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
вариант 29	*вариант 30*
$f(x)=x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2 \le 12 \\ 4x_1-x_2 \le 8 \\ 2x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$f(x)=2x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 10 \\ -2x_1+x_2 \le 2 \\ x_1-8x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

2.2. Численное решение задач линейной оптимизации, характеризуемых большим количеством неизвестных, с использованием матричной формы записи

Известен ряд типовых задач ЛП характеризующихся наличием большого количества переменных, которые целесообразно решать в матричном виде [2, 4].

Задача оптимального планирования ресурсов. Имеется предприятие, которое выпускает n видов продукции, затрачивая m видов ресурсов. Каждый вид продукции j характеризуется технологией:

$$A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}, c_j) \tag{12}$$

где a_{ij} - количество единиц ресурса i, затрачиваемого на единицу продукта j;

c_j - прибыль, получаемая фирмой с каждой единицы продукта j.

Известны также объемы ресурсов $B = (b_1,\ldots, b_m)$, которыми располагает предприятие. Руководство предприятия заинтересовано в получении оптимального варианта по прибыли. Для этого предприятию нужно, грамотно распорядившись имеющимися ресурсами, выпустить такую комбинацию всех видов продукции, при которой прибыль оказалась бы наибольшей.

Составим математическую модель данной задачи. Обозначим вектор, характеризующий производство:

$$X = (x_1,\ldots, x_n)^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

где x_j — объем выпуска продукции j.

Вектор X часто называют еще планом производства.

При этом координаты вектора X должны быть неотрицательны:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

(иногда выпуск продукции j может быть ограничен d_j, в этом случае имеет место двойное неравенство $0 \leq x_j \leq d_j$. Ограниченность ресурсов и линейная зависимость между расходами ресурсов и производством продукции приводит к системе линейных неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{14}$$

Прибыль от реализации произведенного продукта равна:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n. \tag{15}$$

План производства $X = (x_1,\ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ называется оптимальным по прибыли, если $f(X)$ достигает наибольшего возможного значения при вышеописанных ограничениях. Поэтому, предприятие в качестве критерия экономической эффективности должно принять максимум прибыли:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max.$$

При этом следует найти не только само значение $\max f(X)$, но и точки, в которых оно достигается, то есть получить оптимальный вектор производства $X = (x_1,\ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

Замечание. Возможно, что предприятие решит использовать другую технологическую характеристику каждого вида продукции. Например, в описанной выше технологии A_j, не меняя экономической интерпретации $a_{1j},\dots, a_{mj}$, изменит экономическую интерпретацию последней константы: под c_j будет понимать себестоимость каждой единицы продукта j. Это означает, что руководство предприятия заинтересовано в получении оптимального варианта по себестоимости. Поэтому в качестве критерия экономической эффективности предприятие должно будет принять минимум себестоимости:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \to \min.$$

Рассмотренная задача оптимизации носит название ***задачи об использовании ресурсов.*** В зависимости от конкретной экономической ситуации в качестве ресурсов могут выступать: оборудование, рабочая сила, сырье, деньги, производственные площади и т. п.

Задача о смесях. Научно-производственное объединение занимается разработкой и производством комплексных удобрений. На данный момент в своем распоряжении оно имеет n видов удобрений, каждое из которых содержит m элементов непосредственного питания растений. Такими элементами могут быть азот, фосфор, калий, магний, медь, марганец и др. Известно, что одна единица j-го вида удобрений ($j = 1, 2,\dots, n$) содержит a_{ij} единиц i-го ($i = 1, 2,\dots, m$) элемента непосредственного питания растений и имеет стоимость c_j. Необходимо изготовить смешанное комплексное удобрение, получаемое механическим смешением имеющихся удобрений. При этом смесь должна иметь следующую «химико-экономическую» характеристику:

- содержание каждого i-го элемента питания не менее b_i ($i = 1, 2,\dots, m$);
- наименьшую стоимость.

Рассмотрим математическую модель данной задачи. Обозначим через x_j количество j-го удобрения, используемого при изготовлении смеси. Конечно, $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2,\dots, n$). Для каждого i-го ($i = 1, 2,\dots, m$) элемента питания, согласно «химико-экономической» характеристике смеси, имеет место следующее неравенство-ограничение:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

Стоимость комплексного удобрения составляет $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$. Эту величину необходимо минимизировать.

Таким образом, математическая модель имеет следующий вид:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотренная задача носит название ***задачи о смесях***. К ним относят задачи определения состава сплавов, кормовых смесей, смесей горючего, определения урожайности кормовых культур, составления рациона питания и т.п.

Транспортная задача

В m пунктах отправления (у поставщиков) сосредоточено $a_i, \ i = 1, \ldots, m$ единиц однородного груза, который следует доставить в n пунктов назначения (потребителям) с потребностями в грузе $b_j, \ j = 1, \ldots, n$. В базовой закрытой модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы груза в пунктах отправления равны суммарным потребностям в грузе пунктов назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{16}$$

Известны затраты на перевозку единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения: $c_{ij}, \ i = 1, \ldots, m, \ \ j = 1, \ldots, n$. Необходимо найти план перевозки груза, при котором весь груз будет вывезен из пунктов отправления, в каждый пункт назначения будет доставлено требуемое число единиц груза и при этом общие затраты на перевозку груза будут минимальными [1, 3, 9].

Предположение о совпадении суммарных запасов груза и суммарных потребностей в нем приводит к системе линейных равенств:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m; \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Линейная зависимость между транспортными расходами и перевозимым количеством груза позволяет определить стоимость перевозки груза из пункта A_i в пункт B_j как величину, равную $c_{ij} \cdot x_{ij}$. Тогда общая стоимость всех перевозок составит $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$. В описываемой ситуации лица, принимающие решения (для краткости обозначим их ЛПР), в качестве критерия экономической эффективности должны принять минимум этой величины.

Таким образом, математическая модель данной имеет следующий вид:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (19)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

где x_{ij} - число единиц груза, подлежащих перевозке из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения;

f - общие затраты на перевозку груза.

Как и в предыдущих случаях, следует найти не только само значение min $f(X)$, но и точки, в которых оно достигается, то есть получить оптимальную матрицу $X = (x_{ij})$ - оптимальный план перевозок. Рассмотренная задача носит название ***транспортной задачи.***

Замечание. Сделаем несколько уточнений. Рассмотренная задача называется ***закрытой (сбалансированной) транспортной задачей.*** Так называют транспортные задачи, в которых общий объем груза, готового к отправлению, совпадает с объемом груза, который готовы принять в пунктах назначения: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Если же указанные объемы не совпадают, то транспортная задача называется ***открытой.*** При этом, если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то количество груза, равное

$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ остается в пунктах отправления невостребованным. Тогда вводят гипотетического (виртуального) (n +1) - го получателя с готовностью принять груз указанного объема и считают транспортные расходы $c_{i,\,n+1}$ равными 0 для всех i. Таким образом, при введении виртуального получателя транспортная задача становится сбалансированной: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n+1} b_j$, где $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (20)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, n, n+1.$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Частным случаем транспортной задачи является ***задача о назначениях***. Имеется n должностей и n претендентов на эти должности. Известна полезность каждого претендента при назначении на каждую из должностей, т.е. задана матрица c_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Требуется произвести назначение каждого претендента на одну из должностей, обеспечив при этом максимальную суммарную полезность назначений.

Обозначим через x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ неизвестные, которые будут принимать значение, равное единице, если i-й претендент получает назначение на j-ю должность, и нулю - в противном случае; через f обозначим суммарную полезность назначений.

Найти $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max$. При условии:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1 \ldots n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1 \ldots n \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1, \quad i, j = 1 \ldots n$$

Переменные, которые в данной задаче могут принимать одно из двух значений: 0 или 1, называются булевыми переменными. Задача о назначениях является задачей с булевыми неизвестными - частным случаем задачи целочисленного линейного программирования.

Пример 5. Поиск экстремума с использованием матричной формы

$$f(x) = 108 \cdot x_1 + 112 \cdot x_2 + 126 \cdot x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.6 \cdot x_3 \le 800 \\ 0{,}4 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.9 \cdot x_3 \le 600 \\ 0.1 \cdot x_2 + 0.1 \cdot x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Порядок выполнения задания:

Ищем экстремум с использованием матричной формы:

- Задать вектор-столбец коэффициентов функции цели размерностью $n \times 1$;
- Задать матрицу системы ограничений размерностью $m \times n$. Вектор столбец правых частей системы ограничений размерностью $m \times 1$;
- Задать начальные приближения для всех переменных;
- Записать систему ограничений и условия неотрицательности в матричной форме с использованием ключевого слова ***Given (дано).***

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 5 Поиск экстремума с использованием матричной формы

$$f(x) = 108 \cdot x_1 + 112 \cdot x_2 + 126 \cdot x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.6 \cdot x_3 \le 800 \\ 0{,}4 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.9 \cdot x_3 \le 600 \\ 0.1 \cdot x_2 + 0.1 \cdot x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$ORIGIN := 1$

$m := 3$ - число ограничений $n := 3$ - число неизвестных переменных

$$c := \begin{pmatrix} 108 \\ 112 \\ 126 \end{pmatrix}$$ - вектор - столбец коэффициентов функции цели размерностью n x 1

$$a := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.9 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$ - матрица системы ограничений размерностью m x n

$$b := \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 120 \end{pmatrix}$$ - вектор - столбец правых частей системы ограничений размерностью m x 1

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$ - целевая функция, выраженная через элементы в матричной форме

$x_n := 0$ - присвоение начальных значений неизвестным переменным

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Given

$a \cdot x \le b$ - система ограничений в матричной форме

$x \ge 0$ - условия неотрицательности

$x := \mathrm{Maximize}(f, x)$ - поиск максимума целевой функции

$$x = \begin{pmatrix} 244.444 \\ 1.156 \times 10^3 \\ 44.444 \end{pmatrix}$$ - точка эстремума целевой функции

$f(x) = 1.614 \times 10^5$ - значение целевой функции в точке экстремума

Пример 6. Решение транспортной задачи

На пунктах отправления $A_1,\ldots, A_m$ находится соответственно $a_1,\ldots, a_m$ единиц однородного груза. Его следует доставить получателям в пункты назначения $B_1,\ldots, B_n$, причем в каждый из которых - соответственно $b_1,\ldots, b_n$ единиц этого груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}. Требуется составить такой план перевозок, который требовал бы минимальных затрат.

	Стоимость перевозок единицы товара в грн.					Возможности складов (количество единиц)
	Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4	Пункт 5	
Склад 1	15	9	7	13	10	380
Склад 2	14	10	3	14	7	450
Склад 3	16	8	10	12	17	420
	Объем заказа пунктов (количество единиц)					
	230	200	400	200	220	

Введем обозначение для переменных в матричной форме:

$$a = \begin{pmatrix} 380 \\ 450 \\ 420 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 230 \\ 200 \\ 400 \\ 200 \\ 220 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 7 & 13 & 10 \\ 14 & 10 & 3 & 14 & 7 \\ 16 & 8 & 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

Порядок выполнения задания:

Предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству груза (то есть перевозка k единиц груза требует расходов в размере $k \cdot c_{ij}$), а общий объем груза, готового к отправлению, совпадает с объемом груза, который готовы принять в пунктах назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

1. План перевозок задается матрицей:

$$X = (x_{ij}),$$

где x_{ij} — число единиц груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j.

При этом, конечно, $x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m, \ \ j = 1, \ldots, n)$.

Тогда $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}$ - это общее количество груза, которое можно отправить из пункта A_i в пункты $B_1, \ldots, B_n$, а $x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{mj}$ - общее количество груза, которое можно принять в пункте B_j из пунктов $A_1, \ldots, A_m$. Предположение о совпадении суммарных запасов груза и суммарных потребностей в нем приводит к системе линейных равенств:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Линейная зависимость между транспортными расходами и перевозимым количеством груза позволяет определить стоимость перевозки груза из пункта A_i в пункт B_j как величину, равную $c_{ij} x_{ij}$. Тогда общая стоимость всех перевозок составит $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$. В описываемой ситуации ЛПР в качестве критерия экономической эффективности должны принять минимум этой величины.

Таким образом, математическая модель имеет следующий вид:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m \quad и \quad i = 1, \ldots, n$$

Определяем не только само значение min $f(X)$, но и оптимальную матрицу $X = (x_{ij})$ - оптимальный план перевозок.

3. Система MathCAD позволяет упростить решение задач линейного программирования, используя при этом встроенные функции ***Maximize* и *Minimize*.**

- Задаем исходные данные и вспомогательные векторы:

$m = 3$ - число поставщиков;

$n = 5$ - число потребителей;

$l_i = 1$ - вспомогательный вектор размерностью $m \times 1$;

$t_j = 1$ - вспомогательный вектор размерностью $n \times 1$;

$c = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 7 & 13 & 10 \\ 14 & 10 & 3 & 14 & 7 \\ 16 & 8 & 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$ - матрица стоимости перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю размерностью $m \times n$;

$a = \begin{pmatrix} 380 \\ 450 \\ 420 \end{pmatrix}$ - вектор – столбец заказа потребителей размерностью $m \times 1$;

$b = \begin{pmatrix} 230 \\ 200 \\ 400 \\ 200 \\ 220 \end{pmatrix}$ - вектор-столбец запасов поставщика размерностью $n \times 1$.

- Задаем целевую функцию $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$, которая характеризует транспортные затраты на перевозки.

- Записываем систему ограничений в матричной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n.$$

- Проверяем условие сбалансированности $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

- Для определения минимума целевой функции используем функцию ***Minimize,*** что позволяет получить оптимальный план перевозок в виде матрицы размерностью $m \times n$.

В заключение определяем оптимальное значение функции цели.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 6 Решение транспортной задачи

На пунктах отправления $A_1, \ldots, A_m$ находится соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц однородного груза. Его следует доставить получателям в пункты назначения $B_1, \ldots, B_n$, причем в каждый из которых — соответственно $b_1, \ldots, b_n$ единиц этого груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}. Требуется составить такой план перевозок, который требовал бы минимальных затрат.

ORIGIN := 1

$m := 3$ - число поставщиков $\quad i := 1..m$

$n := 5$ - число потребителей $\quad j := 1..n$

$l_i := 1$ - подготовка вспомагательного вектора размерностью m x 1

$$l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t_j := 1$ - подготовка вспомагательного вектора размерностью n x 1

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} 15 & 9 & 7 & 13 & 10 \\ 14 & 10 & 3 & 14 & 7 \\ 16 & 8 & 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

- матрица стоимости перевозок от i - го поставщика j - му потребителю размерностью m x n

$$a := \begin{pmatrix} 380 \\ 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

- вектор - столбец заказа потребителей размерностью m x 1

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1.25 \times 10^3$$

$$b := \begin{pmatrix} 230 \\ 200 \\ 400 \\ 200 \\ 220 \end{pmatrix}$$

- вектор - столбец запасов поставщика размерностью n x 1

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 1.25 \times 10^3$$

$$f(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

- целевая функция, характеризующая транспортные затраты на перевозки

$$x_{m,n} := 0$$

- задание нвчальных значений неизвестным переменным

ФОРМУЛИРОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Given

$$x \cdot t = a$$

$$x^T \cdot 1 \le b$$

- система ограничений в матричной форме

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- условие сбалансированности

$$x \ge 0$$

- условие неотрицательности

$$x := \mathrm{Minimize}(f, x)$$

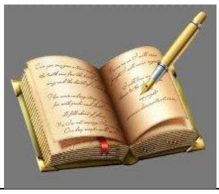
- поиск минимума функции цели

$$x = \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 & 170 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & 50 \\ 20 & 200 & 0 & 200 & 0 \end{pmatrix}$$

- найденный оптимальный план перевозок в виде матрицы размерностью m x n

$$f(x) = 1.072 \times 10^4$$

- оптимальное значение функции цели



ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 4. Найти решение транспортной задачи

вариант 1		*вариант 2*		*вариант 3*	
$a_1 = 200$ $a_2 = 175$ $a_3 = 225$	$b_1 = 100$ $b_2 = 130$ $b_3 = 80$ $b_4 = 190$ $b_5 = 100$	$a_1 = 200$ $a_2 = 450$ $a_3 = 250$	$b_1 = 100$ $b_2 = 125$ $b_3 = 325$ $b_4 = 250$ $b_5 = 100$	$a_1 = 250$ $a_2 = 200$ $a_3 = 200$	$b_1 = 120$ $b_2 = 130$ $b_3 = 100$ $b_4 = 160$ $b_5 = 140$
$c = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 10 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 35 & 31 & 29 \\ 22 & 23 & 26 & 32 & 35 \\ 35 & 42 & 38 & 32 & 39 \end{pmatrix}$	
вариант 4		*вариант 5*		*вариант 6*	
$a_1 = 350$ $a_2 = 330$ $a_3 = 270$	$b_1 = 210$ $b_2 = 170$ $b_3 = 220$ $b_4 = 150$ $b_5 = 200$	$a_1 = 300$ $a_2 = 250$ $a_3 = 200$	$b_1 = 210$ $b_2 = 150$ $b_3 = 120$ $b_4 = 135$ $b_5 = 135$	$a_1 = 350$ $a_2 = 200$ $a_3 = 300$	$b_1 = 170$ $b_2 = 140$ $b_3 = 200$ $b_4 = 195$ $b_5 = 145$
$c = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 11 & 2 & 10 \\ 7 & 14 & 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 13 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 6 & 28 & 30 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \end{pmatrix}$	
вариант 7		*вариант 8*		*вариант 9*	
$a_1 = 200$ $a_2 = 250$ $a_3 = 200$	$b_1 = 190$ $b_2 = 100$ $b_3 = 120$ $b_4 = 110$ $b_5 = 130$	$a_1 = 230$ $a_2 = 250$ $a_3 = 170$	$b_1 = 140$ $b_2 = 90$ $b_3 = 160$ $b_4 = 110$ $b_5 = 150$	$a_1 = 200$ $a_2 = 300$ $a_3 = 250$	$b_1 = 210$ $b_2 = 150$ $b_3 = 120$ $b_4 = 135$ $b_5 = 135$

$c=\begin{pmatrix} 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \\ 49 & 26 & 27 & 18 & 38 \\ 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 36 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}$
вариант 10	*вариант 11*	*вариант 12*
$a_1 = 200$ $a_2 = 350$ $a_3 = 300$ $b_1 = 270$ $b_2 = 130$ $b_3 = 190$ $b_4 = 150$ $b_5 = 110$	$a_1 = 150$ $a_2 = 150$ $a_3 = 200$ $b_1 = 100$ $b_2 = 70$ $b_3 = 130$ $b_4 = 110$ $b_5 = 90$	$a_1 = 330$ $a_2 = 270$ $a_3 = 350$ $b_1 = 220$ $b_2 = 170$ $b_3 = 210$ $b_4 = 150$ $b_5 = 200$
$c=\begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 37 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 37 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 13 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 67 & 63 \end{pmatrix}$
вариант 13	*вариант 14*	*вариант 15*
$a_1 = 150$ $a_2 = 200$ $a_3 = 100$ $b_1 = 90$ $b_2 = 150$ $b_3 = 75$ $b_4 = 60$ $b_5 = 75$	$a_1 = 300$ $a_2 = 350$ $a_3 = 200$ $b_1 = 145$ $b_2 = 195$ $b_3 = 200$ $b_4 = 140$ $b_5 = 170$	$a_1 = 300$ $a_2 = 300$ $a_3 = 250$ $b_1 = 150$ $b_2 = 140$ $b_3 = 115$ $b_4 = 225$ $b_5 = 220$
$c=\begin{pmatrix} 15 & 23 & 28 & 19 & 17 \\ 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 13 & 21 & 24 & 16 & 12 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
вариант 16	*вариант 17*	*вариант 18*
$a_1 = 300$ $a_2 = 230$ $a_3 = 320$ $b_1 = 190$ $b_2 = 150$ $b_3 = 130$ $b_4 = 180$ $b_5 = 200$	$a_1 = 300$ $a_2 = 250$ $a_3 = 300$ $b_1 = 130$ $b_2 = 130$ $b_3 = 150$ $b_4 = 190$	$a_1 = 200$ $a_2 = 300$ $a_3 = 250$ $b_1 = 120$ $b_2 = 140$ $b_3 = 160$ $b_4 = 180$ $b_5 = 150$
$c=\begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 31 & 32 \\ 11 & 19 & 18 & 18 & 20 \\ 26 & 30 & 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix} 16 & 25 & 26 & 26 & 23 \\ 25 & 30 & 30 & 32 & 33 \\ 34 & 25 & 23 & 26 & 32 \end{pmatrix}$
вариант 19	*вариант 20*	*вариант 21*
$a_1 = 270$ $a_2 = 450$ $a_3 = 330$ $b_1 = 190$ $b_2 = 210$ $b_3 = 200$	$a_1 = 210$ $a_2 = 450$ $a_3 = 290$ $b_1 = 200$ $b_2 = 220$ $b_3 = 170$	$a_1 = 300$ $a_2 = 350$ $a_3 = 200$ $b_1 = 140$ $b_2 = 195$ $b_3 = 200$

	$b_4 = 230$ $b_5 = 220$		$b_4 = 210$ $b_5 = 150$		$b_4 = 140$ $b_5 = 170$
$c = \begin{pmatrix} 37 & 30 & 15 & 19 & 37 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \\ 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 19 & 27 & 32 & 32 & 20 \\ 39 & 21 & 12 & 21 & 41 \\ 15 & 14 & 28 & 27 & 20 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 13 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 67 & 63 \end{pmatrix}$	
вариант 22		*вариант 23*		*вариант 24*	
$a_1 = 210$ $a_2 = 450$ $a_3 = 290$	$b_1 = 200$ $b_2 = 220$ $b_3 = 170$ $b_4 = 210$ $b_5 = 150$	$a_1 = 300$ $a_2 = 350$ $a_3 = 200$	$b_1 = 140$ $b_2 = 195$ $b_3 = 200$ $b_4 = 140$ $b_5 = 170$	$a_1 = 200$ $a_2 = 450$ $a_3 = 250$	$b_1 = 100$ $b_2 = 125$ $b_3 = 325$ $b_4 = 250$ $b_5 = 100$
$c = \begin{pmatrix} 19 & 27 & 32 & 32 & 20 \\ 39 & 21 & 12 & 21 & 41 \\ 15 & 14 & 28 & 17 & 20 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 13 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 67 & 66 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}$	
вариант 25		*вариант 26*		*вариант 27*	
$a_1 = 200$ $a_2 = 250$ $a_3 = 200$	$b_1 = 190$ $b_2 = 100$ $b_3 = 120$ $b_4 = 110$ $b_5 = 130$	$a_1 = 150$ $a_2 = 200$ $a_3 = 100$	$b_1 = 90$ $b_2 =150$ $b_3 = 75$ $b_4 = 60$ $b_5 = 75$	$a_1 = 200$ $a_2 = 250$ $a_3 = 200$	$b_1 = 190$ $b_2 = 100$ $b_3 = 120$ $b_4 = 110$ $b_5 = 130$
$c = \begin{pmatrix} 18 & 27 & 28 & 24 & 27 \\ 27 & 26 & 18 & 21 & 32 \\ 23 & 33 & 27 & 34 & 31 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 13 & 21 & 24 & 16 & 12 \\ 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 15 & 23 & 28 & 19 & 17 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	
вариант 28		*вариант 29*		*вариант 30*	
$a_1 = 270$ $a_2 = 450$ $a_3 = 330$	$b_1 = 190$ $b_2 = 210$ $b_3 = 200$ $b_4 = 230$ $b_5 = 220$	$a_1 = 200$ $a_2 = 350$ $a_3 = 300$	$b_1 = 270$ $b_2 = 130$ $b_3 = 190$ $b_4 = 150$ $b_5 = 110$	$a_1 = 200$ $a_2 = 175$ $a_3 = 225$	$b_1 = 100$ $b_2 = 130$ $b_3 = 80$ $b_4 = 190$ $b_5 = 100$
$c = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 11 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 19 & 19 & 6 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 73 & 30 & 31 & 39 & 41 \end{pmatrix}$		$c = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 24 & 22 & 25 \\ 17 & 11 & 13 & 21 & 30 \\ 12 & 13 & 16 & 18 & 17 \end{pmatrix}$	

3. Представление задач линейного программирования в каноническом виде

В арсенале теории ЛП существуют преобразования, позволяющие из одной формы задачи линейного программирования получать любую другую. Такая необходимость имеет место в ряде случаев при решении задач ЛП [4, 9].

Формулировка ЗЛП в каноническом виде приведена в п.1 данного учебного пособия.

Правила приведения ЗЛП к каноническому виду:

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем в неравенство «≤» эта дополнительная переменная вводится со знаком плюс, а в случае неравенства «≥» со знаком минус:

В неравенство вида:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \tag{21}$$

вводим дополнительную (фиктивную) переменную:

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n,$$

Тогда неравенство (21) запишется в виде:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} x_{n+1} = b_i \tag{22}$$

В каждое из неравенств вводится своя «уравнивающая» переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных $x_k = x_k - x_l$, где $x_k \ge 0, x_l \ge 0$.

3. Если в ограничениях правая часть отрицательная, то следует умножить это ограничение на (-1).

4. Если исходная задача была задачей на максимум, то введением новой целевой функции $F_1 = -F$ можно преобразовать задачу на максимум функции F в задачу на минимум функции F_1.

Пример 7. Привести к канонической форме задачу линейного программирования:

$$f(x) = -3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min$$

при условиях $\begin{cases} x_1 - 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 5, \\ 3\cdot x_1 + x_2 + 5\cdot x_3 \geq 4, \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 7\cdot x_3 \leq 8, \end{cases}$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Порядок выполнения задания:

Начнем с преобразования смешанной системы ограничений в систему уравнений. Первое ограничение является уравнением, поэтому не требует изменений. Необходимо перейти для второго и третьего ограничения от вида неравенства к виду уравнения. Для этого введем неотрицательные «балансовые» переменные x_4 и x_5 в левые части неравенств со знаками «плюс» или «минус» в зависимости от знака неравенства. Получим систему ограничений в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 5, \\ 3\cdot x_1 + x_2 + 5\cdot x_3 - x_4 = 4, \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 7\cdot x_3 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0.$$

Переход к задаче максимизации линейной функции в случае необходимости осуществляется путем введения новой функции из равенства $f_1(x) = -f(x) = 3\cdot x_1 + x_2 - 2\cdot x_3$.

Итак, каноническая форма задачи линейного программирования имеет вид:

$$f_1(x) = 3\cdot x_1 + x_2 - 2\cdot x_3 \to \max$$

$$\text{при условиях} \begin{cases} x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 5, \\ 3 \cdot x_1 + x_2 + 5 \cdot x_3 - x_4 = 4, \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0.$$

Пример 8. Привести к канонической форме задачу линейного программирования:

$$f(x) = -x_1 + 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\text{при условиях} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Порядок выполнения задания:

1. Преобразуем систему ограничений – неравенств в систему ограничений – равенств путем введения дополнительных переменных:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

2. Записываем задачу в канонической форме:

$$f(x) = -x_1 + 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Представленный далее пример решения задачи в ППП MathCAD иллюстрирует эквивалентность общей и канонической форм записи ЗЛП.

Пример выполнения задания в MathCAD

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

$$f = -x_1 + 2x_2 \to min$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

- условия задачи

$f(x1, x2) := -x1 + 2 \cdot x2$ - функция цели

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

$x1 := 0 \qquad x2 := 0$

Given

- использование для решения блока Given – Minimize

$-x1 + x2 \le 0$

$2x1 + x2 \ge 3$

- система ограничений

$x1 - x2 = 1$

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$

$x := \text{Minimize}(f, x1, x2)$

$$x = \begin{pmatrix} 1.333 \\ 0.333 \end{pmatrix}$$

- найденное решение задачи

$f(1.333, 0.333) = -0.667$ - оптимальное значение функции цели

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

$$f = -x_1 + 2x_2 \to min$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

- условия задачи в общей форме записи

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

- преобразование системы ограничений - неравенств в ограничения - равенства путем введения дополнительных переменных

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

$$f = -x_1 + 2x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 0x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

- условия задачи в канонической форме записи

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

$f(x1, x2, x3, x4) := -x1 + 2x2 + 0 \cdot x3 + 0 \cdot x4$ - новая форма записи функции цели

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0 \quad x4 := 0$

Given

$-x1 + x2 + x3 + 0 \cdot x4 = 0$

$2x1 + x2 + 0 \cdot x3 - x4 = 3$ - ограничения - равенства

$x1 - x2 + 0 \cdot x3 + 0 \cdot x4 = 1$

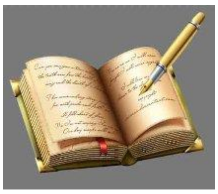
$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \quad x3 \geq 0 \quad x4 \geq 0$ - условия неотрицательности

$x := \text{Minimize}(f, x1, x2, x3, x4)$

$$x = \begin{pmatrix} 1.333 \\ 0.333 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- найденное решение задачи в канонической форме записи

$f(1.333, 0.333, 1, 0) = -0.667$ - оптимальное значение функции цели



ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 5. Преобразовать в каноническую форму и решить следующие ЗЛП в общей и канонической формах

вариант 1	*вариант 2*
$f(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 \geq 28 \\ x_1 - 3x_2 \geq 15 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

вариант 3	вариант 4
$f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 - 2x_2 \geq 10 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq 12 \\ -4x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 5	*вариант 6*
$f(x) = x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \geq 15 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \geq 21 \\ x_1 - 5x_2 \geq 10 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 7	*вариант 8*
$f(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \leq 30 \\ x_1 - 4x_2 \leq 28 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 5x_2 \geq 8 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 9	*вариант 10*
$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 \geq 8 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 11	*вариант 12*
$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 \geq 20 \\ -x_1 + x_2 \geq 9 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 13	*вариант 14*
$f(x) = x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -2x_1 - x_2 \geq 6 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

вариант 15	вариант 16
$f(x) = -2x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \geq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = x_1 - x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 17	*вариант 18*
$f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \geq 10 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 6x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 - 3x_2 \geq 9 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 19	*вариант 20*
$f(x) = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 6x_2 \geq 6 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 4x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -6x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 21	*вариант 22*
$f(x) = x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 \geq 12 \\ x_1 - 4x_2 \leq 8 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 \geq 10 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 23	*вариант 24*
$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
вариант 25	*вариант 26*
$f(x) = x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq 14 \\ -x_1 - x_2 \geq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

вариант 27	*вариант 28*
$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$f(x) = 6x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
вариант 29	*вариант 30*
$f(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \ge 9 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ 2x_2 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4. Сведение прямых задач линейного программирования к двойственным с последующим поиском решения численным методом

Каждой задаче ЛП можно поставить в соответствие другую задачу, называемую двойственной. Совместное изучение свойств этих задач позволяет получить дополнительную информацию об изменении оптимального решения при изменении условий планирования. Также это позволяет свести решение ЗЛП с большим количеством переменных к решению двойственной задачи с меньшим количеством неизвестных [3, 5-7, 10].

Пусть дана задача линейного программирования, которую назовем прямой:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{23}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = \overline{1, p} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{p+1, n} \\ x_j \ge 0, & j = \overline{1, r} \end{cases}$$

Чтобы сформулировать условия записи двойственной задачи на основе прямой, представим задачу в форме таблицы (см.рис.15).

x_1	x_2	...	x_j	...	x_n		
c_1	c_2	...	c_j	...	c_n		
a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1	$\leftarrow y_1$
a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2	$\leftarrow y_2$
...	...	...	...	...	...	...	
a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i	$\leftarrow y_i$
...	...	...	...	...	...	...	
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m	$\leftarrow y_m$

Переменные двойственной задачи

j - ое ограничение двойственой задачи

коэффициенты целевой функции двойственной задачи

Рис.15 – Правила представления двойственной ЗЛП

Итак, при переходе от исходной прямой задачи к соответствующей двойственной задаче придерживаются следующих правил:

1. Количество переменных одной задачи совпадает с количеством ограничений другой задачи. Т.е. каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой.
2. Правые части ограничений одной задачи являются коэффициентами критерия другой.
3. Матрицы условий этих задач взаимно транспонированы, т.е. столбец матрицы условий одной задачи становится строкой другой.
4. Критерий одной задачи максимизируется, а другой минимизируется.

Теорема двойственности. Если одна из задач (прямая или двойственная) имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причем их оптимумы совпадают, т.е.

$$\max\ f(\bar{x}) = \min\ \varphi(\bar{y}) \tag{24}$$

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то другая задача не имеет допустимых решений.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь случаев записи двойственных задач на основе канонического представления прямой задачи, правила записи для которых иллюстрируются следующей таблицей (см.рис.16).

Прямая задача в канонической форме	Двойственная задача		
	целевая функция	ограничение	переменные
max	min	$\geq$	не ограничены в знаке
min	max	$\leq$	не ограничены в знаке

Рис.16 – Правила записи двойственной задачи

Пример 9. Запись двойственной задачи

Составить задачу, двойственную исходной задаче:

$$f(x) = 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 45, \\ 7 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \geq 35, \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 30, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Порядок выполнения задания:

1. Сначала запишем задачу в каноническом виде. Получим:

$$f(x) = 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 = 45, \\ 7 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - x_4 = 35, \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 30, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_4, x_5 \geq 0.$$

2. Составляем двойственную задачу

Так как исходная задача была на максимум, двойственная задача будет на минимум, причем коэффициенты при переменных в целевой функции соответствуют правым частям ограничений, число переменных равно числу ограничений исходной задачи и равно 3.

Целевая функция двойственной задачи:

$$F(y) = 45 \cdot y_1 + 35 \cdot y_2 + 30 \cdot y_3 \to \min$$

Строим ограничения, транспонируя матрицу коэффициентов в ограничениях:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Все ограничения будут иметь знаки $\geq$

$$\begin{cases} 6 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \geq, \\ 5 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 \geq \end{cases}$$

Правые части ограничений – это коэффициенты при переменных в исходной целевой функции:

$$\begin{cases} 6\cdot y_1 + 7\cdot y_2 + 3\cdot y_3 \ge 5, \\ 5\cdot y_1 + 10\cdot y_2 + 5\cdot y_3 \ge 2 \end{cases}$$

Переменные не ограничены в знаке

$$\begin{cases} 6\cdot y_1 + 7\cdot y_2 + 3\cdot y_3 \ge 5, \\ 5\cdot y_1 + 10\cdot y_2 + 5\cdot y_3 \ge 2 \\ y_1, y_2, y_3 - \textit{любое} \end{cases}$$

Двойственная задача построена:

$$F(y) = 45\cdot y_1 + 35\cdot y_2 + 30\cdot y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 6\cdot y_1 + 7\cdot y_2 + 3\cdot y_3 \ge 5, \\ 5\cdot y_1 + 10\cdot y_2 + 5\cdot y_3 \ge 2 \\ y_1, y_2, y_3 - \text{любое} \end{cases}$$

Пример 10. Решение двойственной задачи в MathCAD
Решить задачу, двойственную исходной задаче:

$$f = -x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Порядок выполнения задания:
1. Записываем условие прямой задачи в канонической форме:

$$f = -x_1 + 2\cdot x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2\cdot x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$
$$x_1, \ldots, x_4 \ge 0.$$

2. Используя правила записи двойственных задач записываем условие двойственной задачи:

$$F = 3\cdot y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2\cdot y_2 + y_3 \le -1, \\ y_1 + y_2 - y_3 \le 2, \\ y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot y_3 \le 0, \\ 0\cdot y_1 - y_2 + 0\cdot y_3 \le 0. \end{cases}$$

3. Для решения используем MathCAD. Система MathCAD позволяет упростить решения задач линейного программирования, используя при этом основные функции ***Maximize*** **и** ***Minimize.***

Пример выполнения в MathCAD

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

$$f = -x_1 + 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

- условия прямой задачи

$f(x1, x2) := -x1 + 2\cdot x2$ - функция цели прямой задачи

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

$x1 := 0 \qquad x2 := 0$

Given - использование для решения блока Given – Minimize

$-x1 + x2 \le 0$

$2x1 + x2 \ge 3$ - система ограничений

$x1 - x2 = 1$

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$

$x := \mathrm{Minimize}(f, x1, x2)$

$x = \begin{pmatrix} 1.3333333 \\ 0.3333333 \end{pmatrix}$ - найденное решение прямой задачи

$f(1.3333333, 0.3333333) = -0.667$ - оптимальное значение функции цели прямой задачи

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

$$f = -x_1 + 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 0x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

$$x_1, \ldots, x_4 \ge 0.$$

- условия прямой задачи в канонической форме записи

$f = 3y_2 + y_3 \to max$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \le -1, \\ y_1 + y_2 - y_3 \le 2, \\ y_1 + 0y_2 + 0y_3 \le 0, \\ 0y_1 - y_2 + 0y_3 \le 0. \end{cases}$$

- условия двойственной задачи

переменные y не ограничены в знаке

РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$z(y1, y2, y3) := 3y2 + y3$ - функция цели двойственной задачи

$y1 := 0 \quad y2 := 0 \quad y3 := 0$

Given

$-y1 + 2y2 + y3 \le -1$

$y1 + y2 - y3 \le 2$

$y1 + 0 \cdot y2 + 0 \cdot y3 \le 0$

$0 \cdot y1 - y2 + 0 \cdot y3 \le 0$

- использование для решения блока Given – Maximize

- система ограничений

$y := \text{Maximize}(z, y1, y2, y3)$

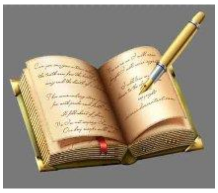
$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3333333 \\ -1.6666667 \end{pmatrix}$$

- найденное решение двойственной задачи

$z(0, 0.3333333, -1.6666667) = -0.667$ - оптимальное значение функции цели двойственной задачи

$z(0, 0.3333333, -1.6666667) = f(1.333, 0.333)$ - выполнение условий теоремы двойственности

ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ



Задание 6. Составить двойственную задачу к заданной, используя приведенные правила и теорему двойственности. Убедиться в эквивалентности прямой и двойственной к ней задачи.

вариант 1	*вариант 2*
$f = 2x_1 - 5x_2 \to \min$ $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 \le 48, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 \ge 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	$f = -3x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -2, \\ x_1 + 2x_2 = 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

вариант 3	вариант 4
$f=-3x_1+4x_2-2x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}-3x_1+4x_2-x_3+x_4\ge 12,\\ -2x_1+x_2-x_4=2,\\ 4x_1+3x_2+3x_3-7x_4\le 24,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$	$f=5x_1+3x_2-5x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+4x_4\le 1,\\ 2x_1+x_2-8x_4=2,\\ x_1-x_2+2x_3-9x_4\ge 0,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$
вариант 5	*вариант 6*
$f=2x_1+3x_2-x_3\to\min$ $\begin{cases}-4x_1+5x_2+2x_3\le 20,\\ 2x_1+x_2-6x_3\ge 6,\\ 5x_1-x_2+x_3=45,\\ x_1-x_2\le 6,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$	$f=3x_1+2x_2-3x_3+4x_4\to\max$ $\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3-x_4\ge 11,\\ -2x_1+x_2+3x_4\le 2,\\ x_1-x_2-7x_3+4x_4=0,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$
вариант 7	*вариант 8*
$f=x_1-2x_2\to\min$ $\begin{cases}-x_1+x_2\le 0,\\ 2x_1+x_2\ge 3,\\ x_1-x_2=1,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$	$f=-x_1+x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3\ge -1,\\ -2x_1+x_2-x_3\le 2,\\ -3x_1-x_2+2x_3=-3,\end{cases}$ $x_{1,2,3}\ge 0.$
вариант 9	*вариант 10*
$f=x_1+2x_2-x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3-3x_4\le 6,\\ x_1-2x_3+6x_4\le 1,\\ x_1-x_2-x_4\ge -1,\\ 2x_1+x_2+5x_3\ge 1,\end{cases}$ $x_{1,2}\ge 0,\quad x_3\ge 0.$	$f=4x_1+4x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2\ge -2,\\ 5x_1+3x_3\le 15,\\ x_1-2x_2=2,\\ x_1+x_3\ge 1,\end{cases}$ $x_{1,2,3}\ge 0.$
вариант 11	*вариант 12*
$f=-3x_1+4x_2-2x_3+7x_4\to\max$ $\begin{cases}-3x_1+4x_2-3x_4\le 12,\\ -2x_1+x_2+3x_3\ge 2,\\ 4x_1+3x_2+3x_3-4x_4=24,\end{cases}$ $x_{1,2}\ge 0,\quad x_3\ge 0.$	$f=-3x_1+2x_2+3x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3\le 3,\\ x_1-x_2+4x_3\ge -2,\\ x_1+2x_2-x_3=2,\end{cases}$ $x_{1,2,3}\ge 0.$

вариант 13	*вариант 14*
$f = 2x_1 - 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \le 12, \\ 6x_1 + 5x_2 = 48, \\ x_1 + 3x_3 \ge 4, \end{cases}$ $x_{1,2,3} \ge 0.$	$f = 5x_1 + 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 0, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
вариант 15	*вариант 16*
$f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - x_3 \le 20, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6, \\ 5x_1 - x_2 = 45, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \le 6, \end{cases}$ $x_{1,2} \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$	$f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 11, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 0, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
вариант 17	*вариант 18*
$f = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_4 \le 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_{2,3} \ge 0.$	$f = -x_1 + x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 \ge -3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_{2,3} \ge 0.$
вариант 19	*вариант 20*
$f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6, \\ x_1 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -1, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_{2,3} \ge 0.$	$f = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \ge -2, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 15, \\ x_1 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

5. Целочисленные задачи линейной оптимизации

Значительная часть задач по смыслу может иметь решения только в целых числах; например, число турбин, судов, животных может быть только целым числом. Такие задачи решаются методами целочисленного программирования [1, 10].

В отличие от задач линейного программирования, при решении задач целочисленного программирования необходимо добавить указание на то, что разыскиваемые оптимальные значения переменных могут принимать только целые значения.

Математическая модель целочисленной задачи линейного программирования может быть представлена следующим образом:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min) \tag{25}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le (\ge) b_i,\ i = 1 \ldots m$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \ldots n$$

$$x_j - \text{целые},\ j = 1 \ldots n_1$$

Итак, в этой задаче для каждой переменной x_j заранее определен набор значений, которые она может принимать.

Если $n_1 < n$, то задача называется частично целочисленной, если $n_1 = n$ - полностью целочисленной.

Классические задачи целочисленного программирования:

- Задача о ранце;
- Задача о назначениях (выборе);
- Задача о коммивояжере;
- Задача о раскрое материала.

5.1. Графический метод решения задачи целочисленного линейного программирования

Целочисленные задачи ЛП с двумя переменными могут быть решены графически с использованием следующего алгоритма:

1. Графическим методом строим ограничения на плоскости.

2. Находим точку пересечения целевой функции с вершиной многоугольника, удовлетворяющего условию оптимальности.

3. Если решение не целочисленное, то внутри многоугольника строим многоугольник максимальной площади с вершинами, имеющими целочисленные координаты (см.рис.17).

4. Находим оптимальное решение как точку пересечения линии уровня целевой функции с конечной вершиной нового многоугольника.

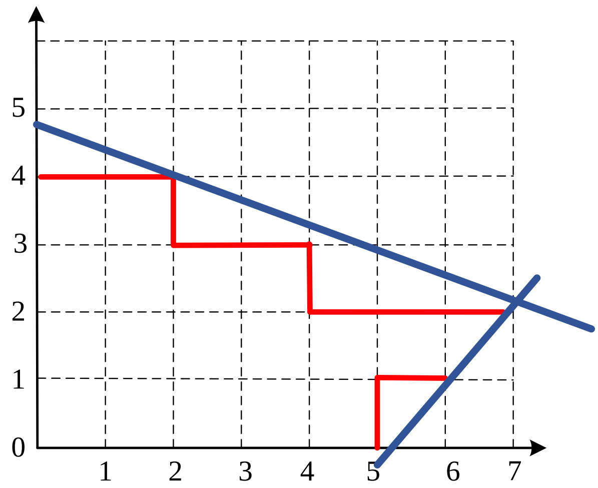


Рис.17 – Многоугольник с целочисленными вершинами

Пример 11. Целочисленное решение задачи линейного программирования графическим методом

На приобретение производственных машин для участка выделены 30 (тыс.у.ед.) Производственная площадь участка – 70 м^2. Можно закупить производственные машины двух видов: стоимостью 3 (тыс.у.ед.) и 5 (тыс.у.ед.). Более дорогая производственная машина требует для установки 12 м^2 и дает продукции на 8 (тыс.у.ед.) в месяц. Другая производственная машина требует 6 м^2 площади и дает продукции на 2 (тыс.у.ед.) в месяц.

Определить оптимальный план (вариант) приобретения оборудования, при котором производительность участка в месяц была бы максимальной.

Порядок выполнения задания:

Сводим данные в таблицу

вид ресурса	***тип закупленных машин***		***объём ресурса***
	x_1	x_2	
деньги (тыс.у.ед)	5	3	30
площади, м^2	12	6	70
прибыль (тыс.у.ед)	8	2	max

1. Записываем математическую модель задачи

Обозначим $X=\{x_1;x_2\}$ план выпуска продукции ($x_j \geq 0$ - количество единиц продукции j, которое предполагается производить). Требуется найти такой план $X=\{x_1{}^o;x_2{}^o\}$, при котором прибыль будет максимальной, т.е такой набор неотрицательных чисел, который дает наибольшее значение целевой функции:

$$F(x)=8\cdot x_1+2\cdot x_2 \rightarrow \max$$

при следующих ограничениях, связанных с имеющимися ресурсами сырья:

$$\begin{cases} 5\cdot x_1+3\cdot x_2 \leq 30 \\ 12\cdot x_1+6\cdot x_2 \leq 70 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \\ x_1 \in Z,\ \ x_2 \in Z \end{cases}$$

где Z – множество целых чисел.

2. Найдем геометрически наибольшее значение линейной функции $F(x)=8\cdot x_1+2\cdot x_2$ в области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} 5\cdot x_1+3\cdot x_2 \leq 30 \\ 12\cdot x_1+6\cdot x_2 \leq 70 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in Z, x_2 \in Z \end{cases}$$

Область допустимых решений есть пересечение полуплоскостей (в скобках указаны уравнения их границ):

$$x_2 \leq -\frac{5}{3}\cdot x_1+10 \qquad \left(x_2=-\frac{5}{3}\cdot x_1+10\right)$$

$$x_2 \leq -2\cdot x_1+\frac{35}{3} \qquad \left(x_2 \leq -2\cdot x_1+\frac{35}{3}\right)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (x_1=0)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (x_2=0)$$

Для построения ОДР зададимся точками, через которые проходят прямые, ограничивающие область.

прямая 1

x_1	0	6
x_2	10	0

прямая 2

x_1	0	6
x_2	11,7	0,33

3. Строим вектор сонаправленный с вектором $\vec{c} = grad(F(x))$ - его направление указывает на направление возрастания целевой функции $F(x) = 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$.

Прямая с уравнением $8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$ представляет собой линию уровня целевой функции $F(x) = 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$. Эта прямая $x_2 = -4 \cdot x_1$ проходит через начало координат и перпендикулярна нормальному вектору линий уровня целевой функции $\vec{c} = (8;2)$.

Передвигая эту прямую параллельно по направлению $\vec{c}$, зафиксируем её крайнее положение. Это верхняя опорная прямая для области допустимых значений (см.рис.18 показана пунктиром).

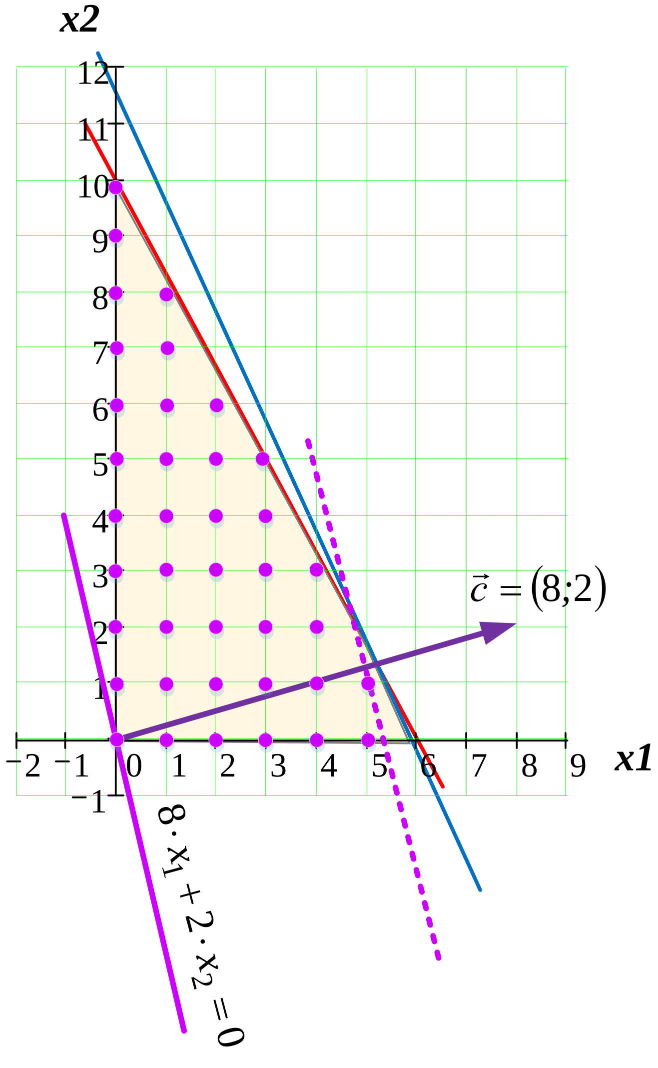


Рис.18 – Целочисленное решение графическим методом

Все целочисленные решения, принадлежащие ОДР, выделены жирными точками. Наибольшее значение $F(x_1;x_2)$ в области допустимых решений определится прямой с решением (5;1).

При этом $F(5;1)=42$ - наибольшее значение целевой функции в области допустимых решений.

4. Найденное оптимальное решение

$x_1=5$ - план приобретения дорогих производственных машин, ед.;

$x_2=1$ - план приобретения недорогих производственных машин, ед.;

$F(5;1)=F_{max}=42$ - максимально возможная прибыль при данных условиях (тыс.у.ед./мес).

Пример 12. Целочисленное решение задачи линейного программирования графическим методом.

Найти графическим методом оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью:

$$f(x,y)=3\cdot x+2\cdot y\to\min$$

$$\begin{cases} x+y\le 7 \\ x+2\cdot y\ge 7 \\ 2\cdot x+y\ge 7 \end{cases}$$

$$x\ge 0,\ y\ge 0,\quad x\in Z,\ \ y\in Z$$

Порядок выполнения задания:

1. Решение графическим методом данной задачи для случая непрерывных переменных рассмотрено в примере 1, что позволяет впоследствии сопоставить полученные решения.

2. Для решения в MathCAD необходимо сформировать массив точек с целочисленными координатами, принадлежащих ОДР. Для этого используем подпрограмму, в которой сформулированы условия принадлежности точек области.

$$\mathbf{Formir}(X\_kon, Y\_kon) := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \textbf{for}\ \ x \in 0..X\_kon \\ \quad \textbf{for}\ \ y \in 0..Y\_kon \\ \quad\quad \textbf{if}\ \ (x + y \le 7) \wedge (x + 2y \ge 7) \wedge (2x + y \ge 7) \\ \quad\quad\quad \left| \begin{array}{l} X_{i,0} \leftarrow x \\ X_{i,1} \leftarrow y \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ X \end{array} \right.$$

Дальнейшие действия по получению решения аналогичны приведенному ранее алгоритму.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 12. Целочисленное решение задачи линейного программирования графическим методом.

Найти графическим методом оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью:

$$f(x,y) = 3 \cdot x + 2 \cdot y \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x + y \le 7 \\ x + 2 \cdot y \ge 7 \\ 2 \cdot x + y \ge 7 \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0, \quad x \in Z,\ y \in Z$$

$f(x,y) := 3x + 2y$ - минимизируемая целевая функция

Заданная система ограничений:

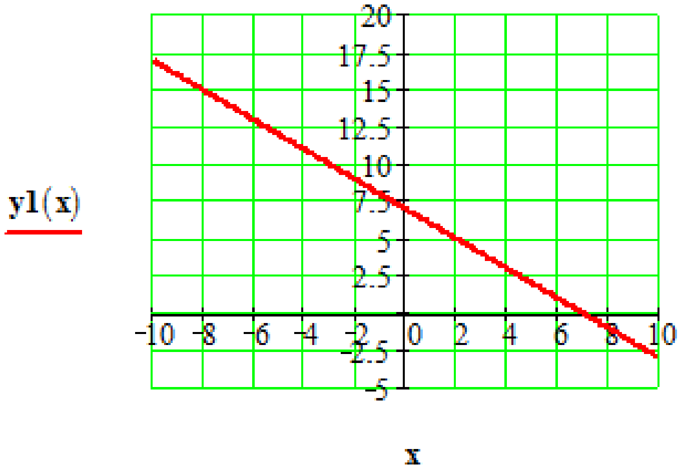
$x + y \le 7 \quad x + 2y \ge 7 \quad 2x + y \ge 7 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$

Построение допустимой области значений:

$x + y = 7$ - первое ограничение

$-x + 7$ - выражение переменной y из первого ограничения

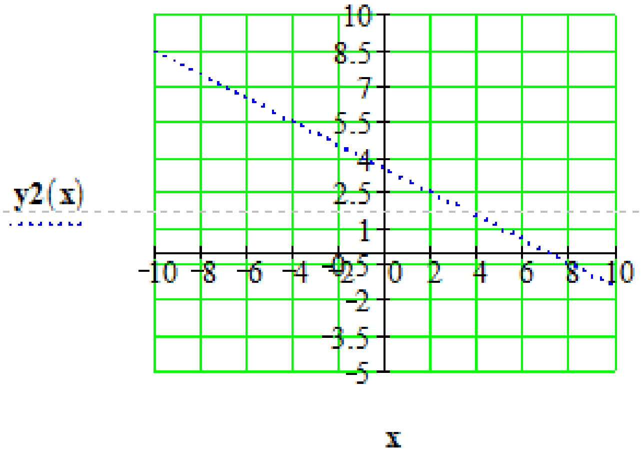
$y1(x) := -x + 7$ - функция геометрического изображения первого ограничения



Выбираем нижнюю полуплоскость, так как в ограничении используется знак "меньше или равно"

$x + 2y = 7$ - второе ограничение $\frac{-1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$

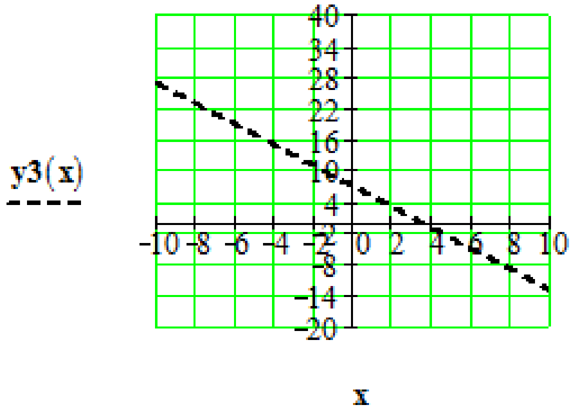
$y2(x) := \frac{-1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$



Выбираем верхнюю полуплоскость, так как в ограничении используется знак "больше или равно"

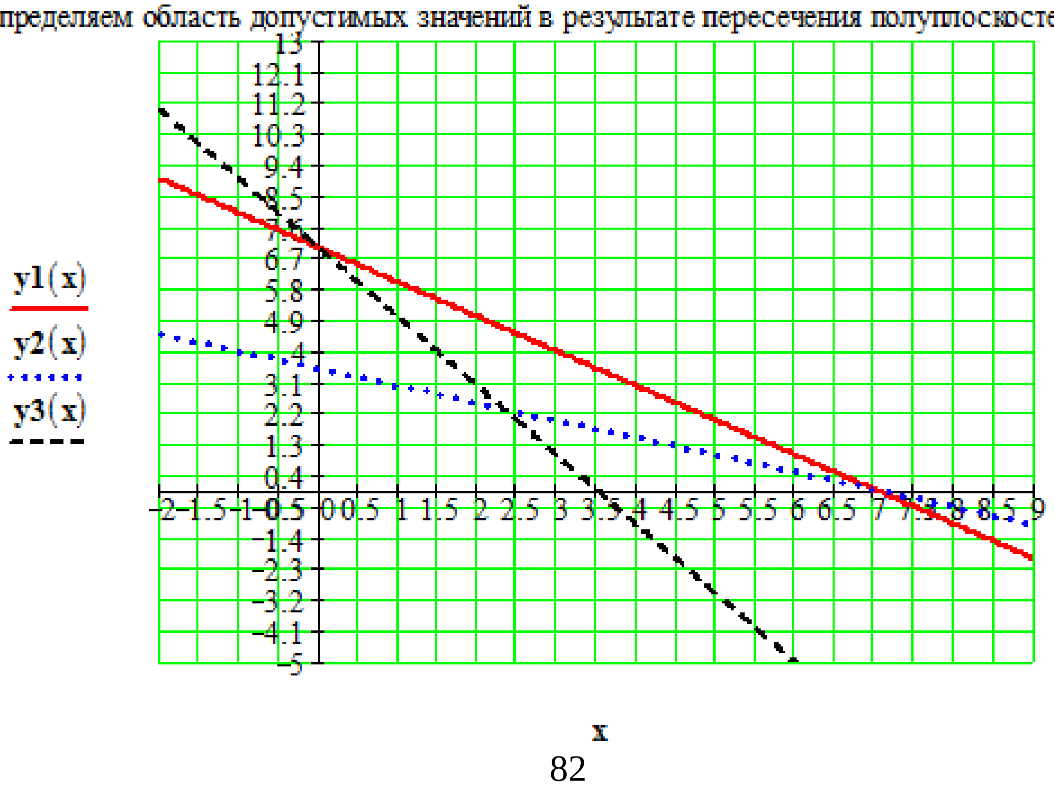
$2x + y = 7$ - третье ограничение $-2 \cdot x + 7$

$y3(x) := -2 \cdot x + 7$

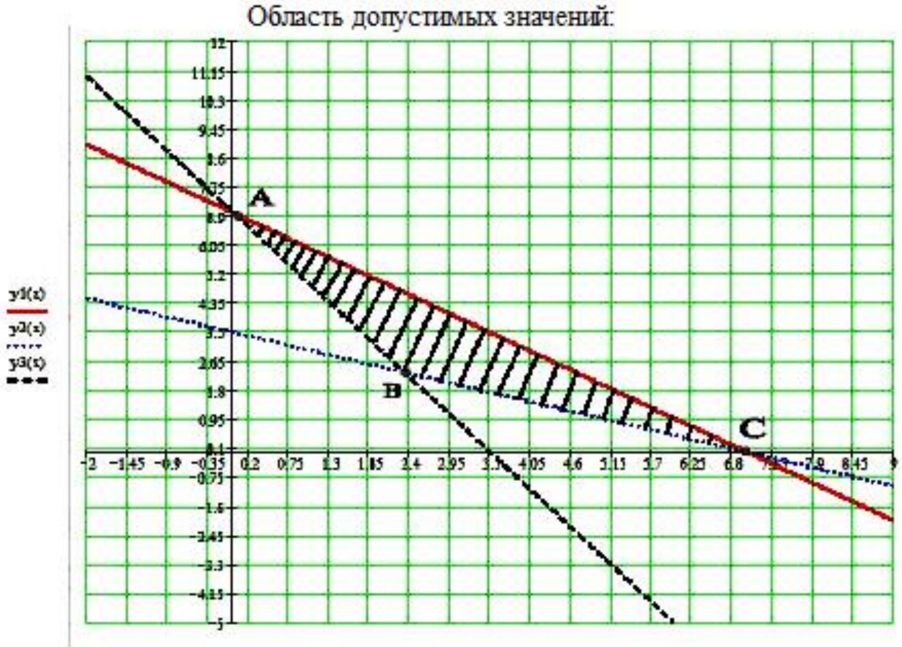


Выбираем верхнюю полуплоскость, так как в ограничении используется знак "больше или равно"

Определяем область допустимых значений в результате пересечения полуплоскостей:



Область допустимых значений:



Построение линии уровня функции цели:

$3x + 2y = C$ - здесь C - это произвольная константа $\quad \frac{-3}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot C$

$y4(x, C) := \frac{-3}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot C$ - уравнение для построения линии уровня функции цели

X_kon, Y-kon - максимально возможные значения x - , y - координат соответственно

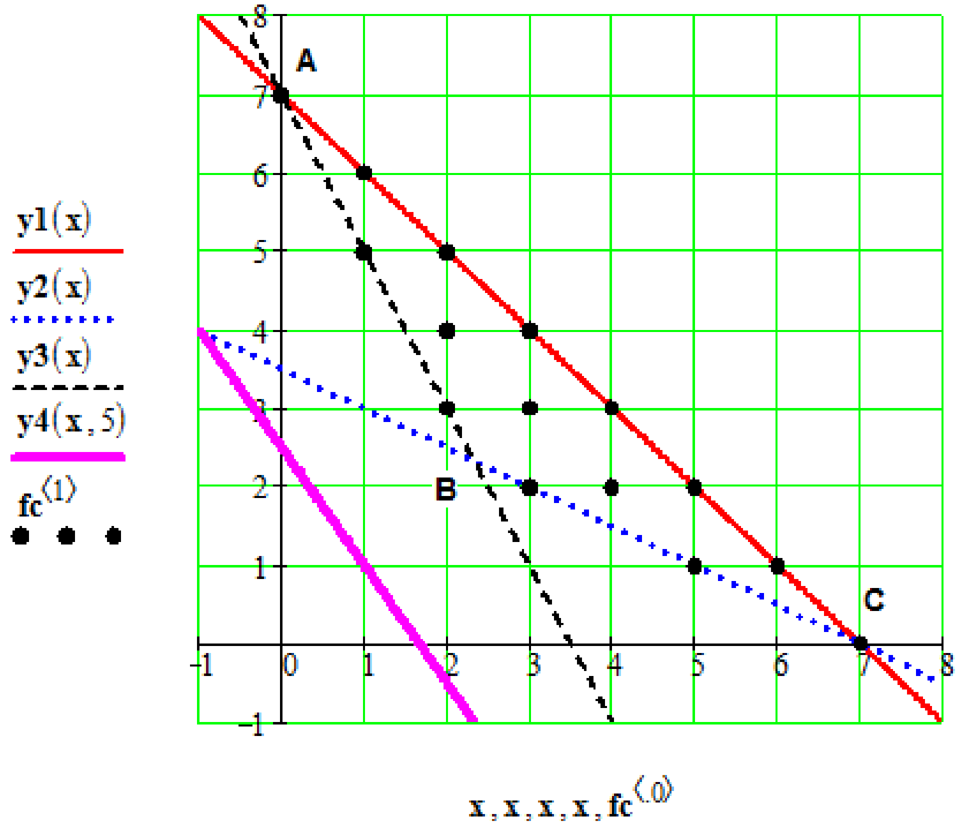
$$
\mathbf{Formir}(X\_kon, Y\_kon) := \left|
\begin{array}{l}
i \leftarrow 0 \\
\textbf{for}\ \ x \in 0..X\_kon \\
\quad \textbf{for}\ \ y \in 0..Y\_kon \\
\quad\quad \textbf{if}\ \ (x + y \le 7) \wedge (x + 2y \ge 7) \wedge (2x + y \ge 7) \\
\quad\quad\quad \left| \begin{array}{l} X_{i,0} \leftarrow x \\ X_{i,1} \leftarrow y \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\
X
\end{array}
\right.
$$

$fc := \mathbf{Formir}(10, 10)$ - формирование массива точек с целочисленными координатами, принадлежащих области допустимых значений

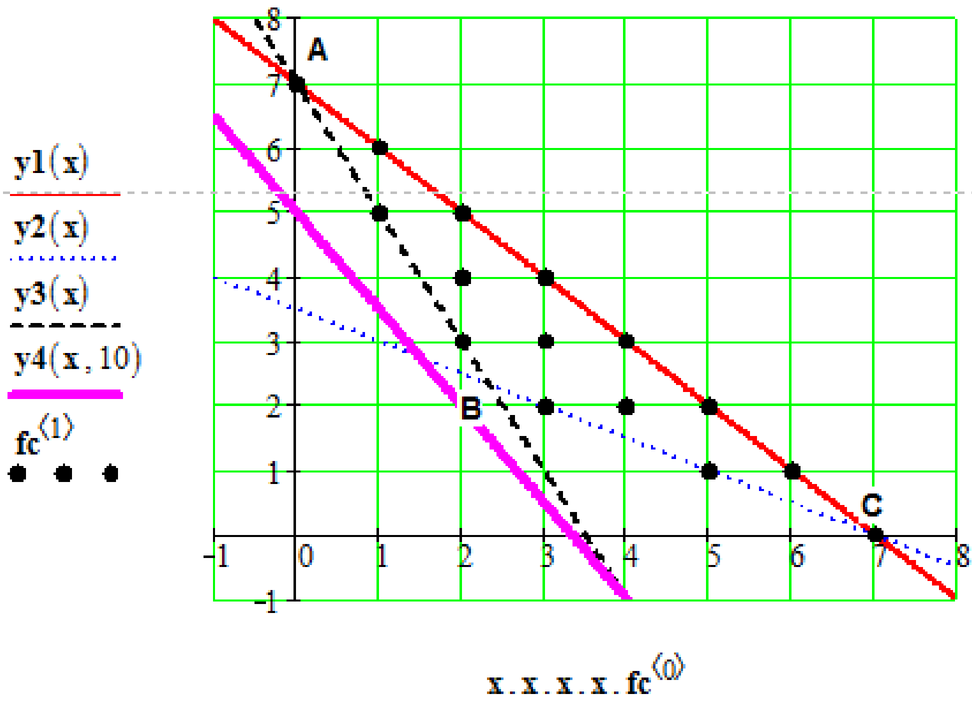
$fc =$

	0	1
0	0	7
1	1	5
2	1	6
3	2	3
4	2	4
5	2	5
6	3	2
7	3	3
8	3	4
9	4	2
10	4	3
11	5	1
12	5	2

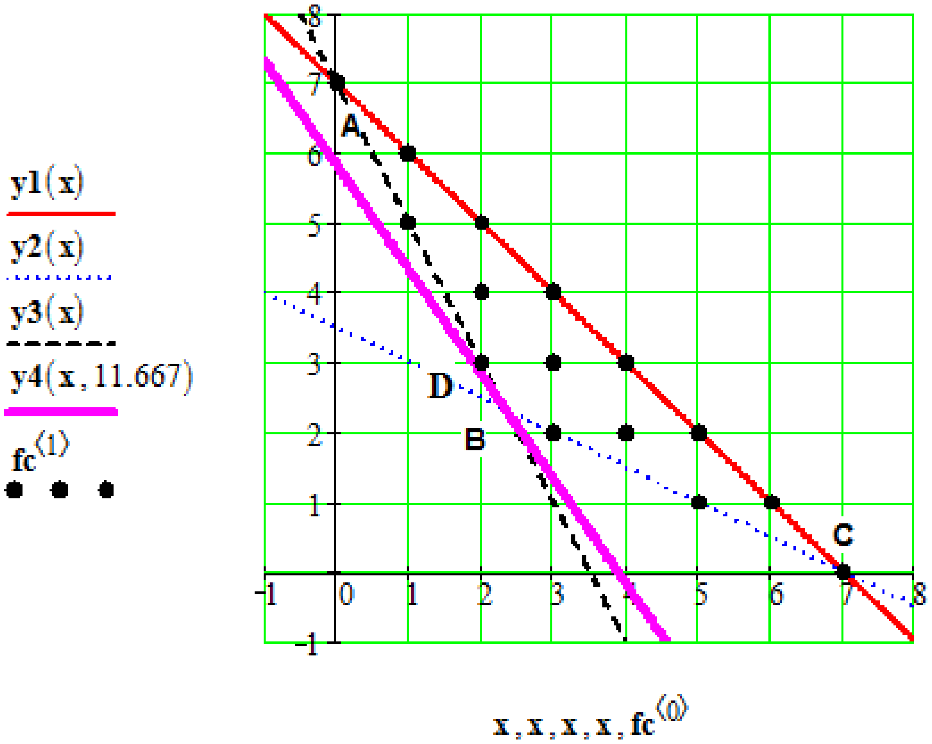
- массив точек с целочисленными координатами, в нулевом столбце которого хранятся x - координаты, а в первом столбце - y - координаты



- случай C = 5



- случай C = 10



- случай C = 11,667

Анализ приведенных случаев построения линий уровня позволяет определить направление антиградиента функции цели. Функция цели достигает минимума в точке D(2,3), которая является целочисленным решением задачи

$\mathbf{f}(2,3) = 12$ - минимальное значение функции цели

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$\mathbf{x} := 0 \qquad \mathbf{y} := 0$

Given

$\mathbf{x} + \mathbf{y} \le 7$

$\mathbf{x} + 2\mathbf{y} \ge 7$ - система ограничений

$2\mathbf{x} + \mathbf{y} \ge 7$

$\mathbf{x} \ge 0$ - условие неотрицательности

$\mathbf{y} \ge 0$

$\mathbf{z} := \mathbf{Minimize}(\mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 2.333 \end{pmatrix}$ - найденное решение

$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1) = 11.667$ - минимальное значение функции цели

5.2. Решение целочисленной задачи оптимизации методом полного перебора

В базовой комплектации MathCAD целочисленные задачи математического программирования, к сожалению, не решаются. В простейшем случае, решение можно получить простым перебором.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 13 Решение целочисленной задачи оптимизации методом полного перебора (I-вариант)

Найти оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью:

$$f(x,y) = 3\cdot x + 2\cdot y \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x + y \le 7 \\ x + 2\cdot y \ge 7 \\ 2\cdot x + y \ge 7 \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

$f(x,y) := 3x + 2y$ - минимизируемая целевая функция

Заданная система ограничений:

$x + y \le 7 \quad x + 2y \ge 7 \quad 2x + y \ge 7 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$

X_max, Y_max - максимально возможные значения

x - , y - координат соответственно

```
Result(X_max, Y_max) := | F ← 10000
                        | for x1 ∈ 0..X_max
                        |   for x2 ∈ 0..Y_max
                        |     | if [(x1 + x2 ≤ 7) ∧ (x1 + 2x2 ≥ 7) ∧ (2x1 + x2 ≥ 7)]
                        |     |   | s ← 3x1 + 2x2
                        |     |   | if s < F
                        |     |   |   | F ← s
                        |     |   |   | K ← (x1, x2)ᵀ
                        |     | s ← 0 otherwise
                        | K
```

$z := Result(10, 10)$

$z = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ - найденное целочисленное решение

$f(z_0, z_1) = 12$ - оптимальное значение функция цели

В следующем примере, с учетом ограничений на неотрицательность x, y и ограничений- неравенств, просматривается область с целочисленными значениями аргументов от 0 до 10 включительно и формируется матрица из значений целевой функции от пар аргументов x, y. При этом заменяются "неподходящие", то есть, не отвечающие ограничениям-неравенствам позиции в матрице "заведомо большим" значением MAX. После этого остаётся только найти в матрице минимальный элемент и определить его индексы стандартной функцией ***match.***

match(z, A) - функция возвращающая координаты элемента со значением z в матрице A. Если элементов со значением z в матрице A окажется несколько, то функция ***match*** вернет вложенный массив–вектор, элементы которого будут новыми векторами с двумя элементами – с номером строки и номером столбца матрицы A, где «сидит» величина z.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 14 Решение целочисленной задачи оптимизации методом полного перебора (II-вариант)

Найти оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью:

$$f(x,y) = 3 \cdot x + 2 \cdot y \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x + y \le 7 \\ x + 2 \cdot y \ge 7 \\ 2 \cdot x + y \ge 7 \end{cases}$$

$$x \ge 0, y \ge 0$$

$f(x,y) := 3x + 2y$ - минимизируемая целевая функция

Заданная система ограничений:

$x + y \le 7$ $\quad x + 2y \ge 7$ $\quad 2x + y \ge 7$ $\quad x \ge 0$ $\quad y \ge 0$

X_max, Y_max - максимально возможные значения
x - , y - координат соответственно

$X\_max := 10$ $\quad Y\_max := 10$

$x1 := 0 .. X\_max$ $\quad x2 := 0 .. Y\_max$

$MAX := 999$ - инициализация переменной для поиска минимума

$$A_{x1,x2} := \begin{vmatrix} f(x1,x2) \ \text{if} \ (x1 + x2 \le 7) \wedge (x1 + 2x2 \ge 7) \wedge (2x1 + x2 \ge 7) \\ MAX \ \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

A =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	999	999	999	999	999	999	999	14	999	999
1	999	999	999	999	999	13	15	999	999	999
2	999	999	999	12	14	16	999	999	999	999
3	999	999	13	15	17	999	999	999	999	999
4	999	999	16	18	999	999	999	999	999	999
5	999	17	19	999	999	999	999	999	999	999
6	999	20	999	999	999	999	999	999	999	999
7	21	999	999	999	999	999	999	999	999	999
8	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
9	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
10	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999

$Result := \min(A)$ - оптимальное значение функция цели

$Result = 12$

$xRes := match(Result, A)$ - определение индексов переменной Result в матрице A

$xRes_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ - найденное целочисленное решение

5.3. Решение целочисленной задачи оптимизации путем введения дополнительного ограничения

Используем функцию ***floor*** для введения дополнительного ограничения переменной на целочисленность.

floor(x) – возвращает наибольшее целое, меньшее или равное x. x должно быть вещественным числом.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 1.15 Решение целочисленной задачи оптимизации путем введения дополнительного ограничения

Найти методом дополнения оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью:

$$f(x,y) = 3\cdot x + 2\cdot y \to min$$

$$\begin{cases} x + y \le 7 \\ x + 2\cdot y \ge 7 \\ 2\cdot x + y \ge 7 \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

$f(x,y) := 3x + 2y$ - минимизируемая целевая функция

Заданная система ограничений:

$x + y \le 7$ $x + 2y \ge 7$ $2x + y \ge 7$ $x \ge 0$ $y \ge 0$

$x := 0$ $y := 0$

Given

$x + y \le 7$

$x + 2y \ge 7$ - система ограничений

$2x + y \ge 7$

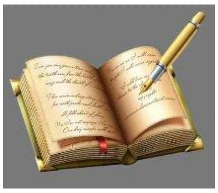
$x = \text{floor}(x)$ - дополнительное ограничение переменной на целочисленность

$x \ge 0$ $y \ge 0$ - условие неотрицательности

$z := \text{Minimize}(f, x, y)$

$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ - найденное целочисленное решение

$f(z_0, z_1) = 14$ - приемлемое значение функции цели



ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

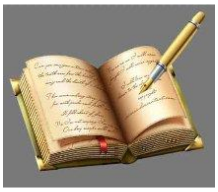
Задание 7. Целочисленное решение задачи линейного программирования графическим методом

Найти графическим методом оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью:

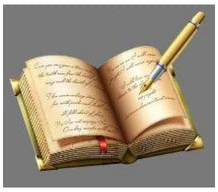
вариант 1	*вариант 2*
$F = 7\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \ge 10 \\ 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 10 \end{cases}$ $x_1 \le 6;\quad x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 \le 11 \\ -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 10 \\ 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \ge 20 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
вариант 3	*вариант 4*
$F = 5\cdot x_1 - 3\cdot x_2 \to min$ $\begin{cases} 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 6 \\ 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 \ge -6 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ 4\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \le 20 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = x_1 + 2\cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 \le 14 \\ -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 9 \\ 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \ge 27 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
вариант 5	*вариант 6*
$F = 7\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} 5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -3\cdot x_1 + x_2 \le 3 \\ 2\cdot x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 2\cdot x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 2\cdot x_2 \ge 4 \\ 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 10 \\ 4\cdot x_1 - 3\cdot x_2 \le 12 \\ 7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 28 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
вариант 7	*вариант 8*
$F = 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \ge -6 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \le 3;\quad x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 2\cdot x_1 - 4\cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} 8\cdot x_1 - 5\cdot x_2 \le 16 \\ x_1 + 3\cdot x_2 \le 2 \\ 2\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \ge 9 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$

вариант 9	*вариант 10*
$F = x_1 + 2\cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} 5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 4 \\ -x_1 - 2\cdot x_2 \le -4 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 3\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - 4\cdot x_2 \le 4 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + 2\cdot x_2 \ge 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
вариант 11	*вариант 12*
$F = 2\cdot x_1 - x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ 6\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \le 42 \\ 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 5\cdot x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 7\cdot x_2 \ge 7 \\ -2\cdot x_1 + x_2 \le 6 \\ 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \ge 10 \\ 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 10 \\ 7\cdot x_1 + x_2 \ge 7 \end{cases}$ $x_1 \le 6; \quad x_2 \le 7$ $x_1, x_2 \ge 0$
вариант 13	*вариант 14*
$F = x_1 - x_2 \to max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 8 \\ 8\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 80 \\ x_1 - 2\cdot x_2 \le 2 \\ x_1 + 4\cdot x_2 \ge 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 7\cdot x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 14 \\ 3\cdot x_1 - 5\cdot x_2 \le 15 \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 21 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
вариант 15	*вариант 16*
$F = 7\cdot x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3 \\ 5\cdot x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 5\cdot x_2 \ge 5 \end{cases}$ $0 \le x_1 \le 4; \quad 0 \le x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} 3\cdot x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2\cdot x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 3 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$

вариант 17	*вариант 18*
$F = x_1 + 3 \cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 20 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 2 \cdot x_1 + x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \ge 10 \\ 4 \cdot x_1 - x_2 \le 12 \\ 7 \cdot x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
вариант 19	*вариант 20*
$F = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \ge -6 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \le 3; \quad x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	$F = 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \to max$ $\begin{cases} 8 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \le 16 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 2 \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 9 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$



Задание 8. Решение целочисленной задачи оптимизации методом полного перебора.
Варианты задач см.задание 7.



Задание 9. Решение целочисленной задачи оптимизации путем введения дополнительного ограничения.
Варианты задач см.задание 7.

6. Задачи линейного программирования с несколькими целевыми функциями

В рассматриваемых до сих пор задачах математические модели при наличии системы ограничений имели единственную целевую функцию. Однако на практике при решении задач, связанных с принятием решений, нередко приходится учитывать набор из нескольких несоизмеримых, противоречивых целевых функций, которые необходимо рассматривать одновременно. Расширением математического программирования с единственной целевой функцией на случай нескольких целевых функций является ***многокритериальное программирование*** или ***многокритериальная оптимизация*** [2, 5, 6, 10].

В общем виде математическая формулировка многокритериальной задачи выглядит следующим образом. Требуется найти значения действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$, при которых *целевые функции:*

$$F_1(X), \ldots, F_p(X) \tag{26}$$

принимают экстремальные значения при ограничениях:

$$g_i(X) \le 0, i = 1, \ldots, m,$$

где X - n-мерный вектор независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$;

$g_i(X) \le 0$ - система ограничений.

Если цели находятся в противоречии друг с другом, то не существует оптимального решения, которое удовлетворяло бы всем критериям эффективности. В этом случае вводится понятие «*эффективное решение*». Оно означает, что невозможно улучшить значение любой из целевых функций без ухудшения значений одной или нескольких целевых функций.

Уточним введенное понятие для задачи максимизации: решение X^* называется эффективным, если не существует допустимого решения $\overline{X}$, такого, что $F_i(\overline{X}) \ge F_i(X^*)$, $i = 1, \ldots, p$, и $F_j(\overline{X}) \ge F_j(X^*)$ по крайней мере, для одного индекса j. Множество всех эффективных решений в непрерывном случае известно как эффективная граница. Эффективное решение называют также ***недоминируемым решением***, ***неулучшаемым решением*** или ***решением по Парето (Парето-оптимальным решением)***.

Найти решение, в котором значения показателей эффективности были бы пусть не оптимальными, но наилучшими по выполнению всех критериев одновременно, можно в области компромисса между этими критериями.

Решения, в которых значения всех критериев являются наилучшими одновременно, называют ***эффективными, компромиссными или субоптимальными.***

Область компромисса, в которой невозможно одновременное улучшение всех критериев, находится в ОДР системы ограничений. Решения, принадлежащие области компромиссов, являются оптимальными по Парето.

Очевидно, что наличие в математической модели каждой из таких задач нескольких целевых функций требует применения более гибких математических методов их решений.

6.1. Решение многокритериальных задач линейной оптимизации методом последовательных уступок

Рассмотрим частный случай многокритериальной задачи в случае $p = 2$. Сформулируем ее. Пусть на плоскости Ox_1x_2 задано множество $\overline{X}$ (см.рис.19) и в каждой точке этого множества определены две непрерывные функции $F_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $F_2 = f_2(x_1, x_2)$. Необходимо найти значения переменных, при которых указанные функции принимают наибольшие значения. Формулировку задачи максимизации с двумя целевыми функциями можно записать более компактно:

$$\begin{matrix} f_1(x_1, x_2) \to max \\ f_2(x_1, x_2) \to max \end{matrix} \qquad (27)$$

при ограничениях:

$$(x_1, x_2) \in \overline{X}$$

Изобразим на плоскости OF_1F_2 все точки, координаты которых удовлетворяют условиям $F_1 = f_1(x_1, x_2)$, $F_2 = f_2(x_1, x_2)$ и $(x_1, x_2) \in \overline{X}$. Полученное множество обозначим через $\overline{F}$ (см.рис.20).

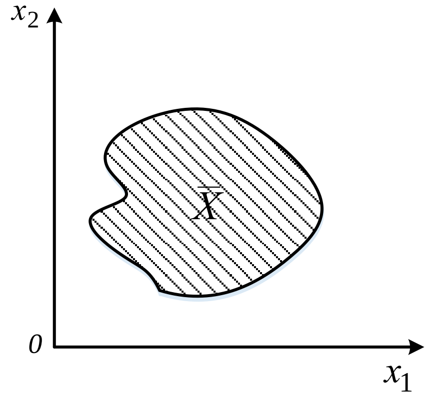


Рис.19 - ОДР на плоскости Ox_1x_2

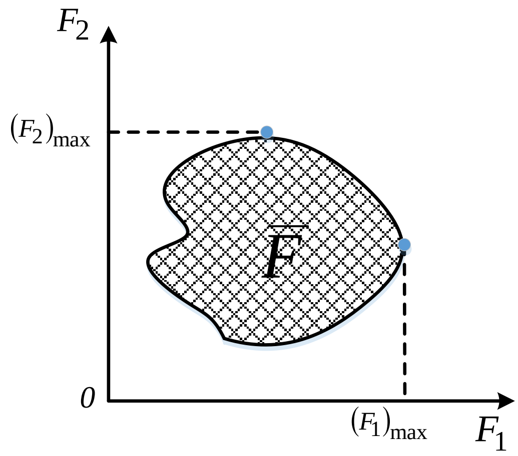


Рис.20 - ОДР на плоскости OF_1F_2

Из рис.20 видно, что $(F_1)_{max}$ - наибольшее значение F_1, и $(F_2)_{max}$ - наибольшее значение F_2 - достигаются в разных точках. При этом $(F_1)_{max}$ и $(F_2)_{\max} \notin \overline{F}$. Это означает, что задача неразрешима - не существует оптимального решения, которое одновременно максимизировало бы обе целевые функции. Поэтому нужно искать Парето-оптимальное решение, так как уже выше отмечалось, наилучшие решения многокритериальной задачи следует искать среди множества Парето.

Рассмотрим метод последовательных уступок нахождения недоминируемого решения, связанного с множеством Парето [2].

В рассматриваемом случае множество Парето составлено из допустимых точек задачи, которые не могут быть перемещены в пределах допустимого множества с улучшением сразу по двум критериям: улучшение значения одного критерия влечет ухудшение значения другого.

Метод (последовательных) уступок заключается в том, что ЛПР анализирует точки на границе Парето и выбирает одну из них - компромиссную.

Метод последовательных уступок

Алгоритм решения задач с несколькими функциями цели рассмотрим в предположении наличия p целевых функций, подлежащих минимизации.

1. Локальные критерии предварительно ранжируются по важности

Критерии нумеруются в порядке убывания важности.

Вначале нужно определить важность частных критериев, т.е. расположить частные критерии в порядке убывания важности. Таким образом, главным считается критерий F_1 , менее важным F_2, . . . , F_p.

2. Ищется наилучшее решение по наиболее важному критерию.

• Минимизируется первый по важности критерий и определяется его наименьшее значение F_{1min}

$$F_{1\min} = \min F_1(X),\ X \in \overline{F}$$

• назначается величина допустимого снижения уступки $\Delta_1 \geq 0$ критерия F_1 и ищется наименьшее значение критерия F_2 при условии, что значение F_1 должно быть не больше, чем $F_{1min}+\Delta_1$.

$$F_{2\min} = \min F_2(X),\ X \in \overline{F}$$

3. Ищется наилучшее решение по следующему по важности критерию

Снова назначается уступка $\Delta_2 \geq 0$, но уже по второму критерию, которая вместе с первой используется при нахождении условного минимума F_3

4. Оптимизируется решение по третьему критерию

Наконец, минимизируется последний по важности критерий F_p

$$F_{p\min} = \min F_p(X),\ X \in \overline{F}$$

при условии, что значения каждого критерия F_i из p-1 предыдущих должны быть не больше соответствующей величины $F_{imin}+\Delta_i$

$$F_i \leq F_{i\min} + \Delta_i,\quad где\ \ i = 1, 2, \ldots, p-1$$

Получаемое в итоге решение считается оптимальным.

Для случая максимизации функции цели уступка вычитается при записи дополнительного ограничения.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 16 Многокритериальная линейная оптимизация методом последовательных уступок

Решить задачу методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10% от его оптимального значения:

$$F(X) = \{f_1 = x_1 + 3 \cdot x_2;\ f_2 = 40 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2\} \to max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 \le 90 \\ x_1 + x_2 \le 60 \\ x_2 \le 50 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

f_1(x1 ,x2) := x1 + 3·x2 — - первая по приоритету функция цели, которая максимизируется

x1 := 1   x2 := 1

Given

x1 ≥ 0   x2 ≥ 0 — - условия неотрицательности

2·x1 + x2 ≤ 90

x1 + x2 ≤ 60 — - система ограничений

x2 ≤ 50

r := Maximize(f_1 ,x1 ,x2) — - поиск максимума первой по приоритету функции цели

$r = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix}$ — - найденное решение

f_1(10,50) = 160 — - оптимальное значение первой целевой функции

delta_1 := 160·0.1

delta_1 = 16 — - вычисление 10% уступки

f_2(x1 ,x2) := 40·x1 + 10·x2 — - вторая по приоритету функция цели, которая максимизируется

x1 := 1   x2 := 1

Given

x1 ≥ 0   x2 ≥ 0 — - условия неотрицательности

2·x1 + x2 ≤ 90

x1 + x2 ≤ 60 — - система ограничений

x2 ≤ 50

$x1 + 3 \cdot x2 \geq 160 - delta\_1$ - ввод дополнительного ограничения с уступкой при поиске максимума

$r := Maximize(f\_2, x1, x2)$ - поиск максимума второй по приоритету функции цели с учетом уступки

$r = \begin{pmatrix} 18 \\ 42 \end{pmatrix}$ - найденное решение

$f\_2(18, 42) = 1.14 \times 10^3$ - значение функции цели в найденной точке решения

$f\_1(18, 42) = 144$

НАЙДЕННОЕ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УСТУПОК РЕШЕНИЕ:

Xopt = (18, 42) - решение задачи

f1 (Xopt) = 144 - приемлемое значение первой целевой функции

f2 (Xopt) = 1140 - приемлемое значение второй целевой функции

Пример 17. Многокритериальная линейная оптимизация методом последовательных уступок.

Решить задачу методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 5 % от его оптимального значения

$$F(X) = \begin{cases} f_1 = x_1 + 3 \cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \min \end{cases}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 48 \\ 12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 36 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$f\_1(x1, x2) := x1 + 3 \cdot x2$ - первая по приоритету функция цели, которая максимизируется

$x1 := 1 \quad x2 := 1$

Given

$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$ - условия неотрицательности

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \leq 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \leq 36$ - система ограничений

$x1 \leq 4 \quad x2 \geq 1$

$r := \mathrm{Maximize}(f\_1, x1, x2)$ - поиск максимума первой по приоритету функции цели

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ - найденное решение

$f\_1(0,4) = 12$ - оптимальное значение первой целевой функции

$delta\_1 := 12 \cdot 0.05$ - вычисление 5 % уступки

$delta\_1 = 0.6$

$f\_2(x1, x2) := 2 \cdot x1 + x2$ - вторая по приоритету функция цели, которая минимизируется

$x1 := 1 \qquad x2 := 1$

Given

$x1 \geq 0 \qquad x2 \geq 0$ - условия неотрицательности

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \leq 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \leq 36$ - система ограничений

$x1 \leq 4$

$x2 \geq 1$

$x1 + 3 \cdot x2 \leq 12 + delta\_1$ - ввод дополнительного ограничения с уступкой при поиске минимума

$r := \mathrm{Minimize}(f\_2, x1, x2)$ - поиск минимума второй по приоритету функции цели с учетом уступки

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - найденное решение

$f\_2(0,1) = 1$ - значение функции цели в найденной точке решения

НАЙДЕННОЕ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УСТУПОК РЕШЕНИЕ:

Xopt = (0, 1) - решение задачи

f1 (Xopt) = 3 - приемлемое значение первой целевой функции

f2 (Xopt) = 1 - приемлемое значение второй целевой функции

6.2. Поиск компромиссного решения задач линейного программирования с несколькими целевыми функциями

Пусть имеется задача линейного программирования с линейными ограничениями, для которой поставлена цель удовлетворения сразу нескольких оптимальных показателей, каждый из которых, является линейной целевой функцией и требует нахождения min или max. Необходимо найти максимально компромиссное решение, в котором значения всех критериальных показателей были бы приближены к экстремальным значениям.

Пример 18. Поиск компромиссного решения задач линейного программирования с двумя целевыми функциями.

Найти компромиссное решение по двум показателям, один из которых требует поиска максимума, а другой – минимума

$$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 3\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 2\cdot x_1 + x_2 \to \min \end{cases}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 8\cdot x_1 + 12\cdot x_2 \le 48 \\ 12\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \le 36 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

Порядок выполнения задания:

1. Найти значение первой целевой функции $f_1 = x_1 + 3\cdot x_2$ используя функцию ***Maximize***.
2. Найти значение второй целевой функции $f_2 = 2\cdot x_1 + x_2$ используя функцию ***Minimize***.
3. После нахождения значений всех целевых функций, необходимо определить компромиссное решение. Для этого добавляются дополнительные ограничения:

$$\begin{cases} \dfrac{(f_1)_1 - f_1}{(f_1)_1} \le x_3 \\ \dfrac{f_2 - (f_2)_2}{(f_2)_2} \le x_3 \end{cases} \tag{28}$$

где $(f_1)_1, (f_2)_2$ - оптимальное значение первой и второй целевой функции соответственно;

x_3 - дополнительная переменная, которая служит значением целевой функции, для определения компромиссного решения.

Пример выполнения задания в MathCAD

Пример 18 Поиск компромиссного решения задач линейного программирования с двумя целевыми функциями.

Найти компромиссное решение по двум показателям, один из которых требует поиска максимума, а другой – минимума

$$F(X) = \begin{cases} f_1 = x_1 + 3 \cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \min \end{cases}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \le 48 \\ 12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$f\_1(x1, x2) := x1 + 3 \cdot x2$ – первая функция цели, которая максимизируется

$x1 := 1 \qquad x2 := 1$

Given

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$ – условия неотрицательности

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \le 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \le 36$ – система ограничений

$x1 \le 4 \qquad x2 \ge 1$

$r := \mathrm{Maximize}(f\_1, x1, x2)$ – поиск максимума первой функции цели

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ – найденное решение

$f\_1(0, 4) = 12$ – оптимальное значение первой целевой функции

$f\_2(x1, x2) := 2 \cdot x1 + x2$ – вторая функция цели, которая минимизируется

$x1 := 1 \qquad x2 := 1$

Given

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$ – условия неотрицательности

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \le 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \le 36$ – система ограничений

$x1 \le 4$

$x2 \ge 1$

$r := \mathrm{Minimize}(f\_2, x1, x2)$ - поиск минимума второй функции цели

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - найденное решение

$f\_2(0,1) = 1$ - значение функции цели в найденной точке решения

$z(x1, x2, x3) := x3$ - третья функция цели для поиска компромиссного решения

$x1 := 1 \qquad x2 := 1 \qquad x3 := 1$

Given

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0 \qquad x3 \ge 0$ - условия неотрицательности

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \le 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \le 36$

$x1 \le 4$

$x2 \ge 1$

- система ограничений

$\left[\frac{[12 - (x1 + 3 \cdot x2)]}{12}\right] \le x3$

$\left[\frac{[(2 \cdot x1 + x2) - 1]}{1}\right] \le x3$

- дополнительные ограничения, необходимые для поиска компромиссного решения

$r\_opt := \mathrm{Minimize}(z, x1, x2, x3)$ - поиск минимума третьей функции цели

$r\_opt = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ - найденное компромиссное решение задачи

$r\_opt = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ - найденное компромиссное решение задачи

$z(r\_opt_0, r\_opt_1, r\_opt_2) = 0.6$ - компромиссное значение функции цели

$f\_1(x1, x2) := x1 + 3\cdot x2$ - компромиссное значение первой функции цели

$f\_1(0, 1.6) = 4.8$

$f\_2(x1, x2) := 2\cdot x1 + x2$ - компромиссное значение второй функции цели

$f\_2(0, 1.6) = 1.6$

КОМПРОМИССНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ЦЕЛОМ:

Xopt = (0, 1.6) - компромиссное решение

f_1 (Xopt) = 4.8 - компромиссное значение первой функции цели

f_2 (Xopt) = 1.6 - компромиссное значение второй функции цели

6.3. Решение многокритериальных задач линейной оптимизации путем сведения к замещающей с последующим применением метода равных и наименьших отклонений

При решении задач линейного программирования методом уступок имеются различные отклонения критериев от экстремальных значений. Потребуем, чтобы в компромиссном решении относительные отклонения всех критериев от своих экстремальных значений были равны и минимальны. При этом предполагается, что в области допустимых решений задачи не существует плана, оптимизирующего все критерии.

Условие равенства отклонений запишем в вид:

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \ldots = \left|\frac{f_1 - f_p^*}{f_p^*}\right| \qquad (29)$$

f_k^* - экстремальное значение целевой функции $k = 1 \ldots p$.

Если некоторым критериям отдается предпочтение, то в условие равенства отклонений вводятся соответствующие коэффициенты $k_2 > 0, k_3 > 0, \ldots, k_p > 0$ (коэффициент k_1 считается равным единице). В этом случае соотношение примет вид:

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = k_2 \cdot \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \ldots = k_p \cdot \left|\frac{f_1 - f_p^*}{f_p^*}\right| \qquad (30)$$

Предполагая, например, что все критерии задачи максимизируются, условие равенства отклонений после соответствующих преобразований запишем в виде:

$$q_1 \cdot f_1 = q_k \cdot f_k \quad \text{или} \quad q_1 \cdot f_1 - q_k \cdot f_k = 0 \tag{31}$$

где $q_k = \dfrac{1}{f_k^{\ *}}$, $k = 1 \ldots p$ - число критериев задачи.

Для случая, когда один критерий максимизируется, а второй минимизируется, условие равенства отклонений запишется следующим образом:

$$q_1 \cdot f_1 + q_2 \cdot f_2 = 2$$

Поскольку относительные отклонения для всех критериев равны, для минимизации достаточно взять любое из отклонений. Возьмем, например, отклонение первого критерия $\left|\dfrac{f_1 - f_1^{\ *}}{f_1^{\ *}}\right|$.

Чтобы его уменьшить, надо f_1 увеличить, приближая f_1 к максимальному значению $f_1^{\ *}$. Новая задача, которая называется *замещающей,* решается на максимум переменной f_1. Аналогично решается замещающая задача и по второму критерию.

Для критерия, который минимизируется, например, для третьего, относительное отклонение $\left|\dfrac{f_3 - f_3^{\ *}}{f_3^{\ *}}\right|$ будет минимальным, когда f_3 окажется приближенным к своему наименьшему значению $f_3^{\ *}$, т.е. будет найден минимум функции f_3.

В качестве целевой функции можно взять любое из следующих выражений:

$$\begin{aligned} & u = f_1 \to \max \\ & \ldots \\ & u = f_k \to \min \\ & \ldots \\ & u = f_p \to \max \end{aligned} \tag{32}$$

Тогда все остальные требования выполняются автоматически.

Итак, чтобы решить задачу линейного программирования методом равных и наименьших относительных отклонений, необходимо составить так называемую замещающую задачу, т.е. к системе ограничений данной задачи добавить дополнительные условия:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j - f_1 = 0; \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \cdot x_j - f_k = 0; \\ q_1 \cdot f_1 - q_k \cdot f_k = 0 \\ q_1 \cdot f_1 + q_k \cdot f_k = 2 \end{array}\right\} \qquad (33)$$

где оптимизируемые критерии $f_1,\ldots,f_k$ включены в число неизвестных.

Пример 19. Многокритериальная линейная оптимизация методом равных и наименьших отклонений.

Найти решение по двум показателям, один из которых требует поиска максимума, а другой – минимума

$$F(X) = \begin{cases} f_1 = x_1 + 3 \cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \min \end{cases}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \le 48 \\ 12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

Порядок выполнения задания:

1. Найти значение f_1^* первой целевой функции $f_1 = x_1 + 3 \cdot x_2$, используя функцию ***Maximize***.

2. Найти значение второй f_2^* целевой функции $f_2 = 2 \cdot x_1 + x_2$, используя функцию ***Minimize***.

3. Записать дополнительные условия относительных отклонений

$$q_1 \cdot f_1 + q_2 \cdot f_2 = 2$$

$$\frac{f_1}{f_1^*} + \frac{f_2}{f_2^*} = 2$$

С учетом найденных значений экстремальных функций имеем:

$$\frac{x_1 + 3 \cdot x_2}{f_1^*} + \frac{2 \cdot x_1 + x_2}{f_2^*} = 2$$

4. Составить замещающую задачу, задать дополнительные ограничения. Математическая модель замещающей задачи имеет вид:

$$F(x_1, x_2, f_1, f_2) = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \le 48 \\ 12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36 \\ x_1 \le 4, \quad x_2 \ge 1 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - f_1 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - f_2 = 0 \\ \dfrac{x_1 + 3 \cdot x_2}{f_1^*} + \dfrac{2 \cdot x_1 + x_2}{f_2^*} = 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ f_1 \ge 0, \ f_2 \ge 0 \end{cases}$$

Найти решение замещающей задачи, используя функцию ***Minimize***.

Пример 1.19 Многокритериальная линейная оптимизация методом равных и наименьших отклонений

Найти решение по двум показателям, один из которых требует поиска максимума, а другой – минимума

$$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 3 \cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 2 \cdot x_1 + x_2 \to \min \end{cases}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \le 48 \\ 12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$f\_1(x1,x2) := x1 + 3 \cdot x2$ - первая функция цели, которая максимизируется

$x1 := 1 \qquad x2 := 1$

Given

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$ - условия неотрицательности

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \le 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \le 36$ - система ограничений

$x1 \le 4$

$x2 \ge 1$

$r := \text{Maximize}(f\_1, x1, x2)$ - поиск максимума первой функции цели

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ - найденное решение

$f\_1(0,4) = 12$ - оптимальное значение первой целевой функции

$f\_2(x1,x2) := 2 \cdot x1 + x2$ - вторая функция цели, которая минимизируется

$x1 := 1 \qquad x2 := 1$

Given

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$ - условия неотрицательности

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \le 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \le 36$ - система ограничений

$x1 \le 4$

$x2 \ge 1$

$r := \text{Minimize}(f\_2, x1, x2)$ - поиск минимума второй функции цели

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - найденное решение

$f\_2(0,1) = 1$ - значение функции цели в найденной точке решения

$F(x1, x2, f1, f2) := 2 \cdot x1 + x2$ - составление замещающей задачи

$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad f1 := 1 \quad f2 := 1$

Given

$x1 \ge 0 \qquad f1 \ge 0$

$x2 \ge 0 \qquad f2 \ge 0$ - условия неотрицательности

$x2 \ge 1 \qquad x1 \le 4$

$8 \cdot x1 + 12 \cdot x2 \le 48$

$12 \cdot x1 + 6 \cdot x2 \le 36$ - система ограничений

$x1 + 3 \cdot x2 - f1 = 0$

$2 \cdot x1 + x2 - f2 = 0$ - дополнительные ограничения

$$\frac{1}{12} \cdot (x1 + 3 \cdot x2) + 1 \cdot (2 \cdot x1 + x2) = 2$$

$X\_opt := \text{Minimize}(F, x1, x2, f1, f2)$ - поиск решения замещающей задачи

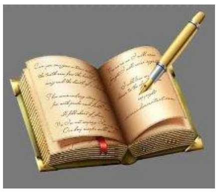
$$X\_opt = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 4.8 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$ - найденное решение

РЕШЕНИЕ ЗАМЕЩАЮЩЕЙ ЗАДАЧИ
МЕТОДОМ РАВНЫХ И НАИМЕНЬШИХ ОТКЛОНЕНИЙ

Xopt = (0, 1.6) - компромиссное решение

f_1 (Xopt) = 4.8 - компромиссное значение первой функции цели

f_2 (Xopt) = 1.6 - компромиссное значение второй функции цели



ЗАДАНИЕ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Задание 10. Многокритериальная линейная оптимизация методом последовательных уступок.

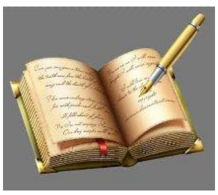
Решить задачу методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 7 % от его оптимального значения в тех вариантах заданий, где она не указана в явном виде

* *вар.1-6 Уступка по первому критерию оптимизации 10 %*	
вариант 1	*вариант 2*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 + 2 \to \max \\ f_2 = x_1 - x_2 + 6 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 \le 6 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$	$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 3\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 2\cdot x_1 + x_2 \to \min \end{cases}$ $\begin{cases} 8\cdot x_1 + 12\cdot x_2 \le 48 \\ 12\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \le 36 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ x_2 \ge 12 \end{cases}$
вариант 3	*вариант 4*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = 2\cdot x_1 + 1 \to \max \\ f_2 = 2\cdot x_1 + 3 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 1 \end{cases}$	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 4\cdot x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = x_1 + 4\cdot x_2 \to \min \end{cases}$ $\begin{cases} 18\cdot x_1 + 30\cdot x_2 \le 288 \\ 40\cdot x_1 + 40\cdot x_2 \le 160 \\ 20\cdot x_1 + 10\cdot x_2 \le 60 \\ -9\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$
вариант 5	*вариант 6*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = x_2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} 13\cdot x_1 + 26\cdot x_2 \le 182 \\ 8\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 88 \\ 0 \le x_1 \le 5 \\ 0 \le x_2 \le 4 \end{cases}$	$F(X)=\begin{cases} f_1 = -x_1 + x_2 - 6 \to \min \\ f_2 = x_1 + x_2 + 2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} 13\cdot x_1 + 26\cdot x_2 \le 78 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$
***** *вар.7, 8, 10 Значение неизвестного параметра **a** взять равным номеру варианта*	

вариант 7	*вариант 8*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 - 3\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = a\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \to \min \end{cases}$ $\begin{cases} 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ *Уступка по первому критерию оптимизации* 2**%**	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 12 + a\cdot x_1 + \\ +(31-a)\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 6 + (31-a)\cdot x_1 + \\ + a\cdot x_2 \to \min \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 \ge 8 \\ 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 40 \\ 0 \le x_1 \le 6 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
вариант 9	*вариант 10*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = 2\cdot x_1 + x_2 - \\ -5\cdot x_3 \to \max \\ f_2 = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - \\ -4\cdot x_3 \to \min \end{cases}$ $\begin{cases} 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \ge 2 \\ -2\cdot x_1 + x_2 - 3\cdot x_3 \le 27 \\ 6\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 75 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ *Уступка по первому критерию оптимизации равна номеру варианта* ***a***.	$F(X)=\begin{cases} f_1 = -x_1 + 3\cdot x_2 - \\ -2\cdot x_3 \to \min \\ f_2 = -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - \\ - x_3 \to \max \\ f_3 = x_1 + 2\cdot x_2 + \\ +4\cdot x_3 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \ge 2 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + a\cdot x_3 \ge 1 \\ x_1 + a\cdot x_2 + x_3 \le 19 \\ a\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 21 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ *Уступки по первому 6% и второму критерию оптимизации* 4 *%*
вариант 11	*вариант 12*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = -x_1 + 3\cdot x_2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$ *Уступка по первому критерию оптимизации* 4**%**	$F(X)=\begin{cases} f_1(x) = 2\cdot x_1 - x_2 \to \max \\ f_2(x) = -x_1 + x_2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - 2\cdot x_2 \le 2, \\ x_1 + 2\cdot x_2 \le 12, \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

	Уступка по первому критерию оптимизации 1 **%**
вариант 13	*вариант 14*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 2\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = \min\{3\cdot x_1 + \\ 2\cdot x_2, 6\cdot x_2\} \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 18, \\ 3\cdot x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$	$F(X)=\begin{cases} f_1 = -2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 3\cdot x_1 + x_2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} -4\cdot x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2\cdot x_2 \le 12, \\ 2\cdot x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 - 4\cdot x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$
вариант 15	*вариант 16*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 \to \max \\ f_2 = 2\cdot x_1 + x_2 - x_3 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$	$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 \to \max \\ f_2 = 3\cdot x_1 + x_2 - x_3 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$
вариант 17	*вариант 18*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = -x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 \to \max \\ f_2 = 3\cdot x_1 + x_2 + x_3 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ x_1 + x_3 \le 9 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$	$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 \to \max \\ f_2 = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \\ + x_3 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 24, \\ x_1 + x_3 \le 12 \\ x_3 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$
вар. 19-21 Значение неизвестного параметра* ***b* *взять равным номеру варианта, параметра* $d = \dfrac{b}{2}$	
вариант 19	*вариант 20*
$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 3\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = \min\{bx_1 + 2x_2, dx_2\} \to \\ \to \max \end{cases}$	$F(X)=\begin{cases} f_1 = x_1 + 4\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = \min\{bx_1 + 2x_2, dx_2\} \to \\ \to \max \end{cases}$

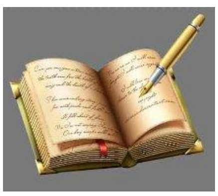
$\begin{cases} x_1 + 3\cdot x_2 \le 18, \\ x_1 + \quad x_2 \le 9, \\ x_1 - 4\cdot x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 4\cdot x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 - 5\cdot x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$
вариант 21	*вариант 22*
$F(X) = \begin{cases} f_1 = x_1 + 5\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = \min\{bx_1 + 2x_2, dx_2\} \to \\ \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 5\cdot x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 - 6\cdot x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$	$F(X) = \begin{cases} f_1 = -2\cdot x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 3\cdot x_1 + x_2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + 2\cdot x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 - 2\cdot x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$
вариант 23	*вариант 24*
$F(X) = \begin{cases} f_1 = -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \to \max \\ f_2 = 4\cdot x_1 + x_2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 12, \\ 0{,}5\cdot x_1 - x_2 \le 4 \\ 0{,}5\cdot x_1 + x_2 \le 22 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$	$F(X) = \begin{cases} f_1 = -3\cdot x_1 + x_2 \to \max \\ f_2 = 5\cdot x_1 + x_2 \to \max \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 20, \\ x_1 - 2x_2 \le 7 \\ x_1 + 0{,}5\cdot x_2 \le 20 \\ -0{,}5\cdot x_1 + 0{,}5\cdot x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$



Задание 11. Поиск компромиссного решения задач линейного программирования с двумя целевыми функциями**.**

Найти компромиссное решение по двум показателям.

Варианты задач см.задание 10.



Задание 12. Многокритериальная линейная оптимизация методом равных и наименьших отклонений

Найти решение многокритериальной задачи с двумя целевыми функциями.

Варианты задач см.задание 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. / И.Л. Акулич – М.: Высш.шк., 1986. – 319 с., ил.
2. Бейко І.В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: Навчальний посібник / І.В. Бейко, П.М. Зінько, О.Г. Наконечний – Рівне: НУВГП, 2011. – 624 с.
3. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э.М. Галеев, В.М.Тихомиров – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
4. Гончаров В.А. Методы оптимизации: учебное пособие / В.А. Гончаров. – М.: Высшее образование, 2009. – 191 с.
5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник. Сьоме видання, перероблене та доповнене. / Ю.П. Зайченко – К.: Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816 с.
6. Зайченко О.Ю. Дослідження операцій. Збірник задач / О.Ю. Зайченко, Ю.П. Зайченко – К.: Видавничий Дім «Слово», 2007. – 472 с.
7. Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации: Учеб. пособие / А.Ф.Измаилов, М.В.Солодов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
8. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И.В.Бейко, Б.Н.Бублик, П.Н.Зинько – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1983. – 512 с.
9. Попов Ю.Д. Методи оптимізації: Навчальний посібник / Ю.Д Попов, В.І. Тюптя, В.І. Шевченко − К: Електронне видання. Ел. бібліотека факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2003. − 215 с.
10. Соловьев В.И. Методы оптимальных решений: Учебное пособие. / В.И. Соловьев − М.: Финансовый университет, 2012. − 364 с.
11. Таха Хэмди А. "Введение в исследование операций", 6-ое издание. / А. Таха Хэмди – М.: Изд. Дом "Вильямс", 2001. – 912 с.

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вектором варьируемых параметров (вектором варьируемых переменных) - называется совокупность управляемых параметров

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и заключается в построении многоугольника допустимых решений, каждая точка которого является допустимым решением ЗЛП

Детерминированной задачей оптимизации - называется задача оптимизации, в которой критерий оптимальности Ф(X) и ограничивающие функции g(X), h(X) не зависят от случайного вектора внешних параметров Q

Задача условной оптимизации с ограничениями общего вида - если в детерминированной задаче оптимизации множество допустимых значений вектора варьируемых параметров формируется как ограничениями типа неравенств, так и ограничениями типа равенств, то детерминированная задача оптимизации называется задачей условной оптимизации с ограничениями общего вида

Задача линейного программирования с ограничениями типа равенств - если в детерминированной задаче оптимизации множество допустимых значений вектора варьируемых параметров формируется только ограничениями типа равенств, то детерминированная задача оптимизации называется задачей условной оптимизации с ограничениями типа равенств

Задача линейного программирования с ограничениями типа неравенств - если в детерминированной задаче оптимизации множество допустимых значений вектора варьируемых параметров формируется только ограничениями типа неравенств, то детерминированная задача оптимизации называется задачей условной оптимизации с ограничениями типа неравенств

Задача условной оптимизации - если в той или иной форме имеются ограничения на вектор варьируемых переменных X, то детерминированная задача оптимизации называется задачей условной оптимизации

Задача безусловной оптимизации - если ограничения на вектор варьируемых переменных X отсутствуют, то детерминированная задача оптимизации называется задачей безусловной оптимизации

Задача выпуклого программирования – если критерий оптимальности Ф(X) во множестве допустимых значений вектора варьируемых параметров X является выпуклым, то детерминированная задача оптимизации называется задачей выпуклого программирования. Заметим, что определение выпуклой функции Ф(X) требует выпуклости ее области определения D

Задача целочисленного программирования – если множество допустимых значений вектора варьируемых параметров является множеством целых чисел, то детерминированная задача оптимизации называется задачей целочисленного программирования

Задача линейного программирования – если критерий оптимальности Ф(X) - линейная функция, а множество допустимых значений вектора варьируемых параметров - выпуклый многогранник, то детерминированная задача оптимизации называется задачей линейного программирования

Эффективное решение (***недоминируемое решение***, ***неулучшаемое решение, решение по Парето***, ***Парето-оптимальное решение)*** - означает, что невозможно улучшить значение любой из целевых функций без ухудшения значений одной или нескольких целевых функций

Критерий оптимальности (критерий эффективности, функция цели, целевая функция, функция полезности) - величина, показывающая относительное предпочтение одних значений компонент вектора варьируемых параметров по отношению к другим значениям этих компонент, называется критерий оптимальности

Математической моделью ЗЛП - называется совокупность соотношений, содержащих целевую функцию и ограничения на её аргументы

Многомерная задача оптимизации - если размерность вектора варьируемых параметров X больше единицы, то детерминированная задача оптимизации называется многопараметрической задачей оптимизации

Общей ЗЛП называется задача, которая состоит в определении оптимальных (максимальных или минимальных) значений линейной целевой функции, в которой система ограничений может содержать как равенства, так и неравенства

Одномерная задача оптимизации - если размерность вектора варьируемых параметров X равна единице, то детерминированная задача оптимизации называется однопараметрической задачей оптимизации

Основной ЗЛП называется задача, которая состоит в определении оптимального значения целевой функции, при условии, что система ограничений представлена в виде системы уравнений

Область допустимых значений - область допустимых значений вектора управляемых параметров формируется, во-первых, ограничениями, которые непосредственно наложены на вектор управляемых параметров, и, во-вторых, ограничениями, которые наложены на вектор выходных параметров

Оптимальным решением ЗЛП $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ (или оптимальным планом) – называется допустимое решение, при котором целевая функция задачи линейного программирования принимает наибольшее (наименьшее) значение

Стандартной (или симметричной) ЗЛП называется задача, которая состоит в определении оптимального значения целевой функции, при условии, что система ограничений представлена в виде системы неравенств